

# Formule de la moyenne et développements de Taylor

Jacques Faraut

Hammamet, 22 mars 2011

$G$  est un groupe localement compact,

$K$  un sous-groupe compact.

$L^1(K \backslash G / K)$  : algèbre de convolution des fonctions intégrables biinvariantes par  $K$ .

$(G, K)$  est une *paire de Gelfand* si  $L^1(K \backslash G / K)$  est commutative.

On suppose que  $(G, K)$  est une paire de Gelfand.

Une *fonction sphérique* est une fonction continue  $\varphi$  sur  $G$ , biinvariante par  $K$ ,  $\varphi(e) = 1$ ,

et

$$\int_K \varphi(xky) \alpha(dk) = \varphi(x)\varphi(y).$$

Les caractères de l'algèbre de Banach commutative  $L^1(K\backslash G/K)$  sont de la forme

$$\chi(f) = \int_G f(x)\varphi(x)m(dx),$$

où  $\varphi$  est une fonction sphérique bornée.

Le spectre de Gelfand  $\Sigma$  de  $L^1(K\backslash G/K)$  est un espace topologique localement compact.

Nous écrivons  $\varphi(\sigma; x)$  la fonction sphérique associée à  $\sigma \in \Sigma$ .

$G$  est un groupe de Lie connexe.

$\mathbf{D}(G/K)$  : algèbre des opérateurs différentiels sur  $G/K$  invariants par l'action (à gauche) de  $G$ .

**Théorème** (Thomas, 1984)  *$(G, K)$  est une paire de Gelfand si et seulement si  $\mathbf{D}(G/K)$  est commutative.*

Dans un tel cas les fonctions sphériques sont des fonctions propres des opérateurs  $D \in \mathbf{D}(G/K)$ :

$$D\varphi(\sigma; x) = \widehat{D}(\sigma)\varphi(\sigma; x).$$

La valeur propre  $\widehat{D}(\sigma)$  est une fonction continue définie sur  $\Sigma$ .

## *Problème général*

On veut construire

- une base linéaire  $(D_\mu)_{\mu \in \mathfrak{M}}$  de  $\mathbf{D}(G/K)$ ,
  - une suite de fonctions analytiques  $(b_\mu)_{\mu \in \mathfrak{M}}$ ,
- telles que

$$D_\mu b_\nu(o) = \delta_{\mu\nu},$$

et établir une *formule de la moyenne*:  
pour une fonction analytique  $f$  sur  $G/K$ ,

$$\int_K f(xky)\alpha(dk) = \sum_{\mu \in \mathfrak{M}} (D_\mu f)(x)b_\mu(y),$$

sous des hypothèses à préciser

Observons qu'il suffit de montrer que, si  $f$  est analytique et invariante par  $K$ ,

$$f(y) = \sum_{\mu \in \mathfrak{M}} (D_{\mu}f)(o)b_{\mu}(y) \quad (o = eK).$$

Dans la cas particulier où  $f(x) = \varphi(\sigma; x)$  on obtient un développement de Taylor généralisé des fonctions sphériques :

$$\varphi(\sigma; x) = \sum_{\mu \in \mathfrak{M}} \widehat{D}_{\mu}(\sigma)b_{\mu}(x).$$

Exemple de base  $G = \mathbb{R}$ ,  $K = \{0\}$ ,  $\Sigma = \mathbb{R}$ ,

$$D_\mu = \left(\frac{d}{dx}\right)^\mu, \quad b_\mu(x) = \frac{x^\mu}{\mu!}, \quad \mu \in \mathbb{N}.$$

La formule de la moyenne est la formule de Taylor :

$$f(x + y) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \left( \left(\frac{d}{dx}\right)^\mu f \right)(x) \frac{y^\mu}{\mu!}.$$

La formule de Taylor des fonctions sphériques est le développement usuel de l'exponentielle

$$\varphi(\sigma; x) = e^{i\sigma x} = \sum_{\mu=1}^{\infty} (i\sigma)^\mu \frac{x^\mu}{\mu!}.$$

### *Exemple historique*

$G = SO(n) \ltimes \mathbb{R}^n$ , le groupe des déplacements,  
 $K = SO(n)$ ,  $G/K \simeq \mathbb{R}^n$ .  $\Sigma = [0, \infty[$ .

Fonctions sphériques :

$$\varphi(\sigma; x) = \int_{S(\mathbb{R}^n)} e^{i\sigma(u|x)} \beta(du).$$

L'algèbre  $\mathbb{D}(G/K)$  est l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients constants sur  $\mathbb{R}^n$ , invariants par rotation. Cette algèbre est engendrée par le laplacien  $\Delta$ , et  $\widehat{\Delta}(\sigma) = -\sigma^2$ .

On peut prendre  $D_\mu = \Delta^\mu$  ( $\mu \in \mathbb{N}$ ). Et alors

$$b_\mu(x) = c_\mu \|x\|^{2\mu}.$$



Formule de la moyenne :

$$\int_K f(x + k \cdot y) \alpha(dk) = \sum_{\mu=0}^{\infty} c_{\mu} (\Delta^{\mu} f)(x) \|y\|^{2\mu}.$$

ou

$$\int_{S(\mathbb{R}^n)} f(x + ru) \beta(du) = \sum_{\mu=0}^{\infty} c_{\mu} (\Delta^{\mu} f)(x) r^{2\mu}.$$

(Courant-Hilbert, 1937)

Développement de Taylor des fonctions sphériques

$$\varphi(\sigma; x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} c_{\mu} (-1)^{\mu} \sigma^{2\mu} \|x\|^{2\mu}.$$

Si  $f$  est radiale :  $f(x) = F(\|x\|)$  :

$$\begin{aligned} & a_n \int_0^\pi F\left(\sqrt{s^2 + t^2 - 2st \cos \theta}\right) \sin^{n-2} \theta d\theta \\ &= \sum_{\mu=0}^{\infty} c_\mu (L^\mu F)(s) t^{2\mu}, \end{aligned}$$

$L$  est la partie radiale du laplacien  $\Delta$  :

$$L = \frac{d^2}{dt^2} + \frac{n-1}{t} \frac{d}{dt}.$$

Cette formule est à l'origine des *translations généralisées* de Delsarte (1938) :

$L$  est un opérateur différentiel sur  $\mathbb{R}$ ,

$\varphi(\lambda, x)$  est solution de

$$L\varphi(\lambda; x) = \lambda\varphi(\lambda; x), \quad \varphi(\lambda, 0) = 1.$$

On considère le développement en série entière de  $\varphi(\lambda; x)$  par rapport à  $\lambda$ :

$$\varphi(\lambda, x) = \sum_{\mu}^{\infty} \lambda^{\mu} b_{\mu}(x).$$

Translations généralisées  $T^x$  :

$$T^x = \sum_{\mu=0}^{\infty} b_{\mu}(x) L^{\mu}.$$

Lorsque  $L$  est de la forme

$$L = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{A'(x)}{A(x)} \frac{d}{dx},$$

ces translations généralisées ont conduit aux hypergroupes de Chébli-Trimèche.

Il est possible de considérer une telle formule de la moyenne dans le cadre des espaces de Damek-Ricci.

## *Paires de Gelfand associées au groupe de Heisenberg*

Le groupe de Heisenberg de dimension  $2n+1$  peut être défini comme l'ensemble

$H = \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$  muni du produit

$$(z, t)(z', t') = (z + z', t + t' + \operatorname{Im}(z'|z)).$$

$K = U(n)$  opère sur  $H$  :  $k \cdot (z, t) = (k \cdot z, t)$ .

$G$  produit semi-direct  $G = K \ltimes H$ .

Produit dans  $G$  :

$$(k; z, t)(k', z', t') = (kk'; z + k \cdot z', t + t' + \operatorname{Im}(k \cdot z'|z)).$$

$(G, K)$  est une paire de Gelfand.  $G/K \simeq H$ .

Spectre de  $(G, K)$  :  $\Sigma = \Sigma^1 \cup \Sigma^2$ ,

$$\Sigma^1 = \{(\lambda, m) \mid \lambda \in \mathbb{R}^*, m \in \mathbb{N}\}.$$

Fonctions sphériques de 1ère espèce :

$$\varphi(\lambda, m; z, t) = e^{i\lambda t} e^{-\frac{1}{2}|\lambda||z|^2} \frac{L_m^{(n-1)}(|\lambda||z|^2)}{L_m^{(n-1)}(0)}.$$

$(L_m^{(n-1)})$  : polynôme de Laguerre.)

Développement

$$\varphi(\lambda, m; z, t)$$

$$= e^{i\lambda t} e^{-\frac{1}{2}|\lambda||z|^2} \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{1}{(n)_k k!} |\lambda|^k (m)_k \|z\|^{2k}.$$

$$\Sigma^2 = \{\rho \geq 0\}$$

Fonctions sphériques de 2ième espèce :

$$\varphi(\rho; z, t) = j_{n-1}(2\sqrt{\rho}\|z\|),$$

( $j_{n-1}$  fonction de Bessel modifiée.)

Développement :

$$\varphi(\rho; z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(n)_k k!} \rho^k \|z\|^{2k}.$$

*Topologie du spectre  $\Sigma$*

L'application  $\Sigma \rightarrow \mathbb{R}^2$  :

$$(\lambda, m) \in \Sigma^1 \mapsto (\lambda, |\lambda|m),$$

$$\rho \in \Sigma^2 \mapsto (0, \rho)$$

est un homéomorphisme de  $\Sigma$  sur son image,  
l'éventail de Heisenberg.

(P. Bougerol)



Définissons l'opérateur  $L_k \in \mathbb{D}(G/K) \simeq \mathbb{D}(H)^K$   
 par

$$L_k f(z, t) = \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial \zeta_j \partial \bar{\zeta}_j} \right)^k f(z + \zeta, t + \text{Im}(\zeta | z)) \Big|_{\zeta=0}.$$

Pour  $k = 1$ ,

$$L_1 = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \bar{z}_j} + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( z_j \frac{\partial}{\partial z_j} - \bar{z}_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \right) + \frac{1}{4} \|z\|^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

À un facteur près  $L_1$  est le sous-laplacien.

$$L_1 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (Z_j \bar{Z}_j + \bar{Z}_j Z_j).$$

où

$$Z_j = \frac{\partial}{\partial z_j} + \frac{1}{2i} \bar{z}_j \frac{\partial}{\partial t}, \quad \bar{Z}_j = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} - \frac{1}{2i} z_j \frac{\partial}{\partial t}.$$

Pour  $\mu \in \mathfrak{M} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ,  $\mu = (k, \ell)$ , posons

$$D_\mu = L_k \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^\ell, \quad b_\mu(z, t) = \frac{1}{(n)_k} \frac{1}{\ell!} \|z\|^{2k} t^\ell.$$

Alors

$$D_\mu b_\mu(0, 0) = \delta_{\mu\nu}.$$

**Théorème** Si  $f$  est une fonction analytique sur  $H$ ,

$$\begin{aligned}
 & \int_K f(z + k \cdot w, t + \tau + \text{Im}(k \cdot w|z)) \alpha(dk) \\
 &= \sum_{\mu \in \mathfrak{M}} D_\mu f(z, t) b_\mu(w, \tau) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} c_{k,\ell} L_k \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^\ell f(z, t) \|w\|^{2k} \tau^\ell.
 \end{aligned}$$

Développement de Taylor

$$\begin{aligned}\varphi(\sigma; z, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(n)_k} \frac{1}{\ell!} \widehat{L}_k(\sigma) (i\lambda)^\ell \|z\|^{2k} t^\ell \\ &= e^{i\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n)_k} \widehat{L}_k(\sigma) \|z\|^{2k}.\end{aligned}$$

(On convient de poser  $\lambda = 0$  si  $\sigma \in \Sigma^2$ .)

Les fonctions  $\widehat{L}_k(\sigma)$  s'expriment à l'aide des polynômes de Meixner-Pollaczek

## *Polynômes de Meixner-Pollaczek*

On note  $q_m^{(\nu)}(s)$  la suite de polynômes définie par la fonction génératrice

$$\sum_{m=0}^{\infty} q_m^{(\nu)}(s) w^m = (1-w)^{s-\frac{\nu}{2}} (1+w)^{-s-\frac{\nu}{2}}.$$

Les polynômes  $q_m^{(\nu)}(i\lambda)$  sont orthogonaux pour le poids

$$w^{(\nu)}(\lambda) = \left| \Gamma\left(i\lambda + \frac{\nu}{2}\right) \right|^2, \quad w^{(1)}(\lambda) = \frac{\pi}{\cosh \pi \lambda}.$$

## Théorème

$$\begin{aligned}\widehat{L}_k(\lambda, m) &= 2^{-k} |\lambda|^k q_k^{(n)} \left(m + \frac{n}{2}\right), \\ \widehat{L}_k(\rho) &= (-1)^k \frac{\rho^k}{k!}.\end{aligned}\tag{1}$$

En particulier, pour  $k = 1$ , on obtient pour le sous-laplacien

$$\widehat{L}_1(\lambda, m) = -|\lambda| \left(m + \frac{n}{2}\right), \quad \widehat{L}_1(\rho) = -\rho.$$

Le théorème précédent permet d'exprimer explicitement  $L_k$  comme un polynôme en  $T = \frac{\partial}{\partial t}$  et  $L_1$  :

$$L_k = Q_k(T, L_1),$$

où le polynôme  $Q_k$  se déduit facilement du polynôme de Meixner-Pollaczek  $q_k^{(n)}$ . Pour  $n = 1$  on retrouve un résultat de Koornwinder : Meixner-Pollaczek polynomials and the Heisenberg algebra, 1988.

La démonstration utilise la relation qu'il y a entre les polynômes de Laguerre et les polynômes de Meixner-Pollaczek. Le polynôme  $q_m^{(\nu)}$  est essentiellement la transformée de Mellin de la fonction de Laguerre  $\psi_m^{(\nu)}(u) = e^{-u} L_m^{(\nu-1)}(2u)$

$$q_m^{(\nu)}(s) = \frac{1}{\Gamma\left(s + \frac{\nu}{2}\right)} \int_0^\infty \psi_m^{(\nu)}(u) u^{s + \frac{\nu}{2} - 1} du.$$

On établit aussi le développement

$$\psi_m^{(\nu)}(u) = \frac{(\nu)_m}{m!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\nu)_k} q_k^{(\nu)}\left(m + \frac{\nu}{2}\right) u^k.$$



Plus généralement on peut considérer un sous-groupe  $K \subset U(n)$ . Si  $K$  opère sans multiplicité sur l'espace  $\mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$  des polynômes holomorphes sur  $\mathbb{C}^n$ , la paire  $(G, K)$ , où  $G = K \ltimes H$ , est une paire de Gelfand.

Avec M. Wakayama, nous avons étendu dans ce cadre général les résultats que nous avons présentés dans le cas particulier où  $K = U(n)$ .