Formule de la moyenne et développements de Taylor

Jacques Faraut

Hammamet, 22 mars 2011

G est un groupe localement compact,
K un sous-groupe compact.
$L^1(K\backslash G/K)$: algèbre de convolution des fonctions intgrables biinvariantes par K.
(G, K) est une *paire de Gelfand* si $L^1(K\backslash G/K)$ est commutative.

On suppose que (G, K) est une paire de Gelfand.
Une *fonction sphérique* est une fonction continue φ sur G, biinvariante par K, $\varphi(e) = 1$, et

$$\int_K \varphi(xky)\alpha(dk) = \varphi(x)\varphi(y).$$

Les caractères de l'algèbre de Banach commutative $L^1(K\backslash G/K)$ sont de la forme

$$\chi(f) = \int_G f(x)\varphi(x)m(dx),$$

où φ est une fonction sphérique bornée.
Le spectre de Gelfand Σ de $L^1(K\backslash G/K)$ est un espace topologique localement compact.
Nous écrivons $\varphi(\sigma; x)$ la fonction sphérique associée à $\sigma \in \Sigma$.

G est un groupe de Lie connexe.
$\mathbf{D}(G/K)$: algèbre des opérateurs différentiels sur G/K invariants par l'action (à gauche) de G.

Théorème (Thomas,1984) (G, K) *est une paire de Gelfand si et seulement si* $\mathbf{D}(G/K)$ *est commutative.*
Dans un tel cas les fonctions sphériques sont des fonctions propres des opérateurs $D \in \mathbf{D}(G/K)$:

$$D\varphi(\sigma; x) = \widehat{D}(\sigma)\varphi(\sigma; x).$$

La valeur propre $\widehat{D}(\sigma)$ est une fonction continue définie sur Σ.

Problème général

On veut construire
- une base linéaire $(D_\mu)_{\mu\in\mathfrak{M}}$ de $\mathbf{D}(G/K)$,
- une suite de fonctions analytiques $(b_\mu)_{\mu\in\mathfrak{M}}$,

telles que

$$D_\mu b_\nu(o) = \delta_{\mu\nu},$$

et établir une *formule de la moyenne*: pour une fonction analytique f sur G/K,

$$\int_K f(xky)\alpha(dk) = \sum_{\mu\in\mathfrak{M}} \Big(D_\mu f\Big)(x)b_\mu(y),$$

sous des hypothèses à préciser

Observons qu'il suffit de montrer que, si f est analytique et invariante par K,

$$f(y) = \sum_{\mu \in \mathfrak{M}} \Big(D_\mu f\Big)(o) b_\mu(y) \quad (o = eK).$$

Dans la cas particulier où $f(x) = \varphi(\sigma; x)$ on obtient un développement de Taylor généralisé des fonctions sphériques :

$$\varphi(\sigma; x) = \sum_{\mu \in \mathfrak{M}} \widehat{D_\mu}(\sigma) b_\mu(x).$$

Exemple de base $G = \mathbb{R}$, $K = \{0\}$, $\Sigma = \mathbb{R}$,

$$D_\mu = \left(\frac{d}{dx}\right)^\mu, \qquad b_\mu(x) = \frac{x^\mu}{\mu!}, \qquad \mu \in \mathbb{N}.$$

La formule de la moyenne est la formule de Taylor :

$$f(x+y) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(\left(\frac{d}{dx}\right)^\mu f\right)(x)\frac{y^\mu}{\mu!}.$$

La formule de Taylor des fonctions sphériques est le développement usuel de l'exponentielle

$$\varphi(\sigma; x) = e^{i\sigma x} = \sum_{\mu=1}^{\infty} (i\sigma)^\mu \frac{x^\mu}{\mu!}.$$

Exemple historique

$G = SO(n) \ltimes \mathbb{R}^n$, le groupe des déplacements, $K = SO(n)$, $G/K \simeq \mathbb{R}^n$. $\Sigma = [0, \infty[$.

Fonctions sphériques :

$$\varphi(\sigma; x) = \int_{S(\mathbb{R}^n)} e^{i\sigma(u|x)} \beta(du).$$

L'algèbre $\mathbb{D}(G/K)$ est l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients constants sur $\mathbb{R}^n$, invariants par rotation. Cette algèbre est engendrée par le laplacien Δ, et $\widehat{\Delta}(\sigma) = -\sigma^2$.

On peut prendre $D_\mu = \Delta^\mu$ $(\mu \in \mathbb{N})$. Et alors

$$b_\mu(x) = c_\mu \|x\|^{2\mu}.$$

Formule de la moyenne :

$$\int_K f(x+k\cdot y)\alpha(dk) = \sum_{\mu=0}^{\infty} c_\mu \Big(\Delta^\mu f\Big)(x)\|y\|^{2\mu}.$$

ou

$$\int_{S(\mathbb{R}^n)} f(x+ru)\beta(du) = \sum_{\mu=0}^{\infty} c_\mu \Big(\Delta^\mu f\Big)(x) r^{2\mu}.$$

(Courant-Hilbert,1937)

Développement de Taylor des fonctions sphériques

$$\varphi(\sigma;x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} c_\mu (-1)^\mu \sigma^{2\mu}\|x\|^{2\mu}.$$

Si f est radiale : $f(x) = F(\|x\|)$:

$$a_n \int_0^\pi F\Big(\sqrt{s^2+t^2-2st\cos\theta}\Big)\sin^{n-2}\theta d\theta$$
$$= \sum_{\mu=0}^\infty c_\mu \Big(L^\mu F\Big)(s)\ t^{2\mu},$$

L est la partie radiale du laplacien Δ :

$$L = \frac{d^2}{dt^2} + \frac{n-1}{t}\frac{d}{dt}.$$

Cette formule est à l'origine des *translations généralisées* de Delsarte (1938) :
L est un opérateur différentiel sur $\mathbb{R}$,
$\varphi(\lambda, x)$ est solution de

$$L\varphi(\lambda; x) = \lambda\varphi(\lambda; x), \quad \varphi(\lambda, 0) = 1.$$

On considère le développement en série entière de $\varphi(\lambda; x)$ par rapport à λ:

$$\varphi(\lambda, x) = \sum_{\mu}^{\infty} \lambda^{\mu} b_{\mu}(x).$$

Translations généralisées T^x :

$$T^x = \sum_{\mu=0}^{\infty} b_{\mu}(x) L^{\mu}.$$

Lorsque L est de la forme

$$L = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{A'(x)}{A(x)}\frac{d}{dx},$$

ces translations généralisées ont conduit aux hypergroupes de Chébli-Trimèche.

Il est possible de considérer une telle formule de la moyenne dans le cadre des espaces de Damek-Ricci.

Paires de Gelfand associées au groupe de Heisenberg

Le groupe de Heisenberg de dimension $2n+1$ peut être défini comme l'ensemble $H = \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ muni du produit

$$(z,t)(z',t') = \Big(z + z', t + t' + \mathrm{Im}(z'|z)\Big).$$

$K = U(n)$ opère sur H : $k \cdot (z,t) = (k \cdot z, t)$.

G produit semi-direct $G = K \ltimes H$.

Produit dans G :

$$(k; z,t)(k', z', t') = \Big(kk'; z{+}k{\cdot}z', t{+}t'{+}\mathrm{Im}(k{\cdot}z'|z)\Big).$$

(G,K) est une paire de Gelfand. $G/K \simeq H$.

Spectre de (G,K) : $\Sigma = \Sigma^1 \cup \Sigma^2$,

$$\Sigma^1 = \{(\lambda, m) \mid \lambda \in \mathbb{R}^*, m \in \mathbb{N}\}.$$

Fonctions sphériques de 1ère espèce :

$$\varphi(\lambda, m; z, t) = e^{i\lambda t} e^{-\frac{1}{2}|\lambda\|z\|^2} \frac{L_m^{(n-1)}(|\lambda|\|z\|^2)}{L_m^{(n-1)}(0)}.$$

($L_m^{(n-1)}$: polynôme de Laguerre.)
Développement

$$\varphi(\lambda, m; z, t)$$
$$= e^{i\lambda t} e^{-\frac{1}{2}|\lambda|\|z\|^2} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{1}{(n)_k k!} |\lambda|^k (m)_k \|z\|^{2k}.$$

$$\Sigma^2 = \{\rho \geq 0\}$$

Fonctions sphériques de 2ième espèce :

$$\varphi(\rho; z, t) = j_{n-1}(2\sqrt{\rho}\|z\|),$$

(j_{n-1} fonction de Bessel modifiée.)
Développement :

$$\varphi(\rho; z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(n)_k k!} \rho^k \|z\|^{2k}.$$

Topologie du spectre Σ

L'application $\Sigma \to \mathbb{R}^2$:

$$(\lambda, m) \in \Sigma^1 \mapsto (\lambda, |\lambda| m),$$
$$\rho \in \Sigma^2 \mapsto (0, \rho)$$

est un homéomorphisme de Σ sur son image, l'éventail de Heisenberg.

(P. Bougerol)

Définissons l'opérateur $L_k \in \mathbb{D}(G/K) \simeq \mathbb{D}(H)^K$ par

$$L_k f(z,t) = \Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial \zeta_j \partial \bar{\zeta}_j} \Big)^k f\Big(z+\zeta, t+\mathrm{Im}(\zeta|z)\Big)\Big|_{\zeta=0}.$$

Pour $k=1$,

$$L_1 = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \bar{z}_j} + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial t}\Big(z_j \frac{\partial}{\partial z_j} - \bar{z}_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \Big) + \frac{1}{4}\|z\|^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

À un facteur près L_1 est le sous-laplacien.

$$L_1 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(Z_j\overline{Z}_j + \overline{Z}_j Z_j).$$

où

$$Z_j = \frac{\partial}{\partial z_j} + \frac{1}{2i}\overline{z}_j\frac{\partial}{\partial t}, \quad \overline{Z}_j = \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} - \frac{1}{2i}z_j\frac{\partial}{\partial t}.$$

Pour $\mu \in \mathfrak{M} = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $\mu = (k,\ell)$, posons

$$D_\mu = L_k \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\ell, \quad b_\mu(z,t) = \frac{1}{(n)_k}\frac{1}{\ell!}\|z\|^{2k}t^\ell.$$

Alors

$$D_\mu b_\mu(0,0) = \delta_{\mu\nu}.$$

Théorème *Si f est une fonction analytique sur H,*

$$\int_K f\Big(z + k\cdot w, t + \tau + \mathrm{Im}(k\cdot w|z)\Big)\alpha(dk)$$
$$= \sum_{\mu\in\mathfrak{M}} D_\mu f(z,t) b_\mu(w,\tau)$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty} c_{k,\ell} L_k\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\ell} f(z,t)\|w\|^{2k}\tau^{\ell}.$$

Développement de Taylor

$$\begin{aligned}\varphi(\sigma; z, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(n)_k} \frac{1}{\ell!} \widehat{L_k}(\sigma)(i\lambda)^{\ell} \|z\|^{2k} t^{\ell} \\ &= e^{i\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n)_k} \widehat{L_k}(\sigma) \|z\|^{2k}.\end{aligned}$$

(On convient de poser $\lambda = 0$ si $\sigma \in \Sigma^2$.)

Les fonctions $\widehat{L_k}(\sigma)$ s'expriment à l'aide des polynômes de Meixner-Pollaczek

Polynômes de Meixner-Pollaczek

On note $q_m^{(\nu)}(s)$ la suite de polynômes définie par la fonction génératrice

$$\sum_{m=0}^{\infty} q_m^{(\nu)}(s) w^m = (1-w)^{s-\frac{\nu}{2}}(1+w)^{-s-\frac{\nu}{2}}.$$

Les polynômes $q_m^{(\nu)}(i\lambda)$ sont orthogonaux pour le poids

$$w^{(\nu)}(\lambda) = \left|\Gamma\left(i\lambda + \frac{\nu}{2}\right)\right|^2, \quad w^{(1)}(\lambda) = \frac{\pi}{\cosh \pi\lambda}.$$

Théorème

$$\widehat{L_k}(\lambda, m) = 2^{-k}|\lambda|^k q_k^{(n)}\Big(m + \frac{n}{2}\Big),$$
$$\widehat{L_k}(\rho) = (-1)^k \frac{\rho^k}{k!}. \tag{1}$$

En particulier, pour $k = 1$, on obtient pour le sous-laplacien

$$\widehat{L_1}(\lambda, m) = -|\lambda|\Big(m + \frac{n}{2}\Big), \quad \widehat{L_1}(\rho) = -\rho.$$

Le théorème précédent permet d'exprimer explicitement L_k comme un polynôme en $T = \frac{\partial}{\partial t}$ et L_1 :

$$L_k = Q_k(T, L_1),$$

où le polynôme Q_k se déduit facilement du polynôme de Meixner-Pollaczek $q_k^{(n)}$. Pour $n = 1$ on retrouve un résultat de Koornwinder : Meixner-Pollaczek polynomials and the Heisenberg algebra, 1988.

La démonstration utilise la relation qu'il y a entre les polynômes de Laguerre et les polynômes de Meixner-Pollaczek. Le polynôme $q_m^{(\nu)}$ est essentiellement la transformée de Mellin de la fonction de Laguerre $\psi_m^{(\nu)}(u) = e^{-u} L_m^{(\nu-1)}(2u)$

$$q_m^{(\nu)}(s) = \frac{1}{\Gamma\left(s + \frac{\nu}{2}\right)} \int_0^\infty \psi_m^{(\nu)}(u) u^{s+\frac{\nu}{2}-1} du.$$

On établit aussi le développement

$$\psi_m^{(\nu)}(u) = \frac{(\nu)_m}{m!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\nu)_k} q_k^{(\nu)}\left(m + \frac{\nu}{2}\right) u^k.$$

Plus généralement on peut considérer un sous-groupe $K \subset U(n)$. Si K opère sans multiplicité sur l'espace $\mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$ des polynômes holomorphes sur $\mathbb{C}^n$, la paire (G, K), où $G = K \ltimes H$, est une paire de Gelfand.

Avec M. Wakayama, nous avons étendu dans ce cadre général les résultats que nous avons présentés dans le cas particulier où $K = U(n)$.