Decay of Solutions to a $2D$ Schrödinger Equation

Saânouni Tarek
Agrégé et assistant à I. P. E. I. El Manar

Journal of Partial Differential Equations
Vol 24, Iss 1, pp 37-54

JAMA (2011)

Cadre général

L'équation de Schrödinger semilinéaire

$$(S_g) : i\partial_t u + \Delta u = uG^{'}(|u|^2) = g(u), \quad u : (0, T^*) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}.$$

G étant une fonction réelle.

Lois de conservations :

- la masse

$$M(u,t) := \|u(t)\|_{L^2}^2 = M(u,0),$$

- le moment

$$\Im\left(\int \bar{u}(t)\nabla u(t)\,dx\right),$$

- l'Hamiltonien

$$H(u,t) := \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 + \int_{\mathbb{R}^d} G(|u|^2)\,dx = H(u,0).$$

Historique

(1) Cas de nonlinéarité monômiale $(S_{\pm u|u|^{p-1}})$, $\quad p > 1.$
Invariance par changement d'échelle

$$u(t,x) \Rightarrow u_\lambda(t,x) := \lambda^{\frac{2}{p-1}} u(\lambda^2 t, \lambda x), \quad \lambda > 0.$$

Le seul indice p qui laisse la norme de $\dot{H}^1$ invariante par la transformation précédente est

$$p_c := \frac{d+2}{d-2}, \quad d \geq 3.$$

• Cas soucritique $(p < p_c)$

Caractère localement bien posé dans l'espace d'énergie.
$T^* = T^*(\|u_0\|_{H^1}) \Rightarrow$ dans le cas défocalisant $T^* = \infty$.
$p > 1 + \frac{4}{d} \Rightarrow$ Scattering. Ginibre-Velo (1985).

• Cas critique $(p = p_c)$

Caractère localement bien posé dans l'espace d'énergie et $T^* = T^*(e^{it\Delta}u_0)$. Cazenave-Weissler, (1990). Dans le cas défocalisant $T^* = \infty$, + Scattering, Visan (2007).

• Cas surcritique $(p > p_c)$

Résultas partiels d'instabilité, Carles (2007).

(2) Cas de nonlinéarité exponentielle.

• Nakamura-Ozawa, (1998)

petite donnée initiale $\Downarrow$

caractère globalement bien posé dans $H^{\frac{d}{2}}(\mathbb{R}^d)$, $d \geq 2$ et scattering, pour une nonlinéarité satisfaisant

$$|g^{'}(u)| \lesssim |u| e^{\lambda |u|^2}, \quad \text{pour un certain} \quad \lambda > 0.$$

Le cas $d = 2$.

Dans ce cas il y a plusieurs motivations pour considérer une nonlinéarité exponentielle.

1/ En deux dimensions d'espace, toute nonlinéarité ponlynômiale est sous critique dans l'espace d'énergie.

2/ L'injection de Sobolev

$$H^1(\mathbb{R}^2) \subset L^p(\mathbb{R}^2), \quad 2 \leq p < \infty.$$

3/ Les estimations de type Moser-Trudinger.

- Colliander-Ibrahim-Majdoub-Masmoudi, (2009)

$$H(u_0) \leq 1 \Downarrow$$

caractère globalement bien posé dans l'espace d'énergie de

$$i\partial_t u + \Delta u = u(e^{4\pi|u|^2} - 1) \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^2.$$

$$H(u_0) > 1 \Rightarrow \textit{instable}.$$

- Ibrahim-Majdoub-Masmoudi-Nakanishi, (2009),

$$i\partial_t u + \Delta u = u(e^{4\pi|u|^2} - 1 - 4\pi|u|^2) \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^2.$$

$$H(u_0) < 1 \Rightarrow \textit{scattering}$$

$H(u_0) = 1 \Rightarrow$ scattering est un problème ouvert.

• Saânouni, (2010) $\Rightarrow$ caractère globalement bien posé dans l'espace d'énergie, sans condition sur la donnée initiale de

$$i\partial_t u + \Delta u = u(1 + 4\pi|u|^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}\left(\mathrm{e}^{(1+4\pi|u|^2)^{\frac{\alpha}{2}}} - e\right), \quad 0 < \alpha < 2.$$

• Saânouni, (2010) $\Rightarrow$ scattering dans l'espace d'énergie et dans l'espace conforme de

$$i\partial_t u+\Delta u = u(1+4\pi|u|^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}\left(\mathrm{e}^{(1+4\pi|u|^2)^{\frac{\alpha}{2}}}-e(1+4\pi|u|^2)^{\frac{\alpha}{2}}\right), \alpha \in (0,2).$$

Objectif

On considère

$$i\partial_t u + \Delta u = u(e^{4\pi|u|^2} - 1) \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^2$$

$$\Downarrow$$

$$u \in C(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^2)) \cap L^4_{loc}(C^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2))$$

le scattering dans l'espace d'énergie est un problème ouvert dans les deux cas sous critique et critique $H(u_0) \leq 1$.
On se propose de prouver le résultat de dispersion

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t)\|_{L^r(\mathbb{R}^2)} = 0, \quad \forall\, 2 < r < \infty.$$

Remarques

- Le résultat de dispersion est plus faible que le scattering.
- Un résultat similaire existe dans le cas monômial sous critique

$$i\partial_t u + \Delta u = u|u|^{p-1}, \quad 1 < p < \frac{d+2}{d-2}.$$

En effet Visciglia (2009) a prouvé que

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t)\|_{L^r(\mathbb{R}^2)} = 0, \quad \forall r \in (2, \frac{2d}{d-2})$$

avec la convention $\frac{d+2}{d-2} = \frac{2d}{d-2} = \infty$ si $d \in \{1, 2\}$.

- Ce résultat est intéressant pour $1 < p \leq 1 + \frac{4}{d}$.

Résultat principal

Théorème

Soient $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^2)$ *tel que* $H(u_0) \leq 1$*et* $u \in C(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^2))$ *la solution du problème de Cauchy*
$i\partial_t u + \Delta u = u(e^{4\pi|u|^2} - 1), \quad u(0) = u_0$. *Donc, pour tout* $2 < r < \infty$,

1. $\limsup_{t\to\infty} \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} < 1 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \|u(t)\|_{L^r(\mathbb{R}^2)} = 0.$
2. $\limsup_{t\to\infty} \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 1 \Rightarrow \liminf_{t\to\infty} \|u(t)\|_{L^r(\mathbb{R}^2)} = 0.$
   De plus, si $t_n \nearrow +\infty$, *existent une sous suite* (s_n) *et une suite de nombres réels positifs* (r_n), *tels que*

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \|u(s_n + r_n)\|_{L^r(\mathbb{R}^2)} = 0.$$

Outils essentiels

- Estimation de Strichartz

$$\|u\|_{L^p L^r} \lesssim \|u(0)\|_{L^2} + \|g(u)\|_{L^{a'} L^{b'}}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2}.$$

- Formule integrale de Duhamel

$$u(t,x) = e^{it\Delta} u_0 - i \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} g(u(s))\, ds.$$

- Estimation à priori prouvée récemment par Colliander et al.

$$\|u\|_{L^4(\mathbb{R}, L^8(\mathbb{R}^2))} \lesssim \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^2))}^{\frac{3}{4}} \|\nabla u\|_{L^\infty(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^2))}^{\frac{1}{4}} \lesssim M(u)^{\frac{3}{4}} H(u)^{\frac{1}{4}}.$$

Pour contrôler le terme nonlinéaire, on utilise les deux outils

Inégalités de Moser-Trudinger

Soit $\alpha \in (0, 4\pi)$. Une constante C_α existe telle que pour tout $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ satisfaisant $\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq 1$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\alpha |u(x)|^2} - 1\right) dx \leq C_\alpha \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

De plus ona

$$\sup_{\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} \leq 1} \int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{4\pi |u(x)|^2} - 1\right) dx < \infty,$$

$$\sup_{\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} \leq 1} \int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{(4\pi+\epsilon) |u(x)|^2} - 1\right) dx = \infty, \quad \forall \epsilon > 0.$$

Inégalité logarithmique (Ibrahim-Masmoudi-Majboub)

Pour tout $\lambda > \frac{1}{\pi}$ et tout $0 < \mu \leq 1$, une constante $C_\lambda > 0$ existe tel que, pour toute fonction $u \in (H^1 \cap C^{\frac{1}{2}})(\mathbb{R}^2)$, on a

$$\|u\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq \lambda \|u\|^2_\mu \log\left(C_\lambda + \frac{8^{\frac{1}{2}}\|u\|_{C^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2)}}{\mu^{\frac{1}{2}}\|u\|_\mu}\right)$$

avec

$$\|u\|^2_\mu := \|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \mu^2 \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

De plus, la condition $\lambda > 1/\pi$ est optimale.

éléments de la preuve

- Par un argument d'interpolation, il suffit de montrer le Théorème pour $r = 3$.

- La la preuve repose sur les deux résultats suivants

Résultats intermédiaires

Lemme (1)

Soit $u_0 \in H^1$ *tel que* $H(u_0) \leq 1$ *et* $u \in C(\mathbb{R}, H^1)$ *la solution du problème de Cauchy*

$$i\partial_t u + \Delta u = u(e^{4\pi|u|^2} - 1), \quad u(0) = u_0.$$

Soit (t_n) *une suite de nombres réels tendant vers l'infini. Alors, deux cas sont possibles.*

1. $\exists T > 0,\ \exists \eta \in (0,1)$ *tel que*
   $\sup_n \|\nabla u(t_n + t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \eta, \quad \forall t \in [0, T].$
2. *Ils existent* (s_n) *une sous suite de* (t_n) *et une suite de réels positifs* (r_n) *tels que*
   $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$ *et* $\lim_{n\to\infty} \|\nabla u(s_n + r_n)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 1.$

Proposition (Estimation uniforme)

Soient $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $0 < \eta < 1$, *et* $(\varphi_n) \in (H^1(\mathbb{R}^2))^{\mathbb{N}}$ *tels que* $\sup_n \|\varphi_n\|_{H^1} < \infty$, $H(\varphi_n) \leq 1$, *et* $\varphi_n \rightharpoonup \varphi$ *dans* H^1. *Soient* $u_n \in C(\mathbb{R}, H^1)$ *la solution du problème de Cauchy*

$$i\partial_t u_n + \Delta u_n = u_n(e^{4\pi|u_n|^2} - 1), \quad u_n(0) = \varphi_n$$

et $u \in C(\mathbb{R}, H^1)$ *la solution du même problème avec donnée initiale* φ. *Donc,*
si $\exists T > 0$, *tel que* $\sup_n \|\nabla u_n(t)\|_{L^2} \leq \eta, \quad \forall t \in [0, T]$, *alors*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists T_\varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que } \|\chi(u_n - u)\|_{L^\infty_{T_\varepsilon} L^2} < \varepsilon, \quad \forall n > n_\varepsilon.$$

La preuve de la proposition repose sur les deux lemmes suivants

Lemme (2)

Soit (φ_n) *une suite de* $H^1(\mathbb{R}^2)$ *satisfaisant*

$$\sup_n \|\varphi_n\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} < \infty,$$
$$H(\varphi_n) \leq 1,$$
$$\varphi_n \rightharpoonup \varphi \ \textit{dans} \ H^1(\mathbb{R}^2).$$

Alors,

$$H(\varphi) \leq 1.$$

Lemme (3)

Soient $0 < \eta < 1$, (φ_n) *une suite de* $H^1(\mathbb{R}^2)$ *satisfaisant* $\sup_n \|\varphi_n\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} < \infty$ *et* $H(\varphi_n) \leq 1$. *Soit* $u_n \in C(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^2))$ *la solution du problème de Cauchy*

$$i\partial_t u_n + \Delta u_n = u_n(e^{4\pi|u_n|^2} - 1), \quad u_n(0) = \varphi_n.$$

Si $\exists T_1 > 0$, *tel que* $\sup_n \|\nabla u_n(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \eta, \quad \forall t \in [0, T_1]$,
alors, $\exists T > 0$, $\exists C(\eta)$ *tel que*

$$\sup_n \left(\|u_n\|_{L^\infty_T H^1 \cap L^4_T W^{1,4}} \right) \leq C(\eta).$$

Idée de la preuve du Théorème

Par l'absurde :

- Etape 1

Inégalité de Gagliardo-Nirenberg

$$\|u(t)\|^3_{L^3(\mathbb{R}^2)} \leq C\|u(t)\|^2_{H^1(\mathbb{R}^2)}\left(\sup_x \|u(t)\|_{L^2(Q_1(x))}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\exists t_n \to \infty,\ \exists x_n \in \mathbb{R}^2,\ \exists \varepsilon > 0$$

tel que

$$\|u(t_n)\|_{L^2(Q_1(x_n))} \geq \varepsilon, \quad \forall n.$$

- Etape 2

Premier cas : $\limsup\limits_{t\to\infty} \|\nabla u(t)\|_{L^2} < 1$. Soient

$$\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2),\ 0 \leq \chi \leq 1,\ \chi = 1 \ \text{ sur } \ Q_1(0) \ \text{ et } \ supp(\chi) \subset Q_2(0).$$

$$u_n(t,x) := u(t+t_n, x+x_n),\ \varphi_n(x) := u(t_n, x+x_n), \quad \varphi_n \rightharpoonup \varphi \text{ dans } H^1$$

Lemme (1) $\Downarrow$

$$\exists \eta \in (0,1),\ \exists T > 0 \quad \text{tel que} \quad \sup_n \|\nabla u_n(t)\|_{L^2} \leq \eta,\ \forall t \in [0,\ T]$$

La proposition $\Downarrow$

$$\exists n_\varepsilon,\ \exists T > 0 \quad \text{tel que}$$

$$\|\chi(u_n - \bar{u})\|_{L_T^\infty L^2} \leq \frac{\varepsilon}{4}, \quad \forall n \geq n_\varepsilon,$$

avec $i\partial_t \bar{u} + \Delta \bar{u} = \bar{u}(e^{4\pi|\bar{u}|^2 - 1} - 1), \quad \bar{u}(0) = \varphi.$

$$\|\varphi_n\|_{L^2(Q_1(0))} = \|u(t_n)\|_{L^2(Q_1(x_n))} \geq \varepsilon, \quad \lim_n \|\varphi_n - \varphi\|_{L^2(Q_1(0))} = 0$$

continuité en zéro $\Downarrow$

$$\exists T > 0 \;/\; \inf_{[0,T]} \|\chi \bar{u}(t)\|_{L^2} \geq \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \inf_{[0,T]} \|\chi u_n(t)\|_{L^2} \geq \frac{\varepsilon}{4}, \; \forall n \geq n_\varepsilon.$$

$$\Downarrow$$

$$\|u_n(t)\|_{L^2(Q_2(0))} = \|u(t+t_n)\|_{L^2(Q_2(x_n))} \geq \frac{\varepsilon}{4}, \; \forall n \geq n_\varepsilon, \; \forall t \in [0, T].$$

$$\Downarrow$$

$$\|u(t)\|_{L^2(Q_2(x_n))} \geq \frac{\varepsilon}{4}, \; \forall n \geq n_\varepsilon, \; \forall t \in [t_n, t_n + T].$$

• Etape 3 On conclut en utilisant $u \in L^4(\mathbb{R}, L^8(\mathbb{R}^2))$.

$$\|u(t)\|_{L^8(Q_2(x_n))} \geq \alpha > 0, \ \forall n \geq n_\varepsilon, \ \forall t \in [t_n, t_n + T].$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} \|u\|^4_{L^4 L^8} &= \int_0^\infty \|u(t)\|_{L^8} \, dt \\ &\geq \sum_{n \geq n_\varepsilon} \int_{t_n}^{T+t_n} \|u(t)\|_{L^8} \, dt \\ &\geq \sum_{n \geq n_\varepsilon} \alpha T = \infty. \end{aligned}$$

Absurde

Deuxième cas : $\limsup_{t\to\infty} \|\nabla u(t)\|_{L^2} = 1$.

Lemme (1)$\Rightarrow$ $\exists r_n \to 0$ et une sous suite (s_n) tels que pour $y_n := s_n + r_n$,

$$\lim_n r_n = 0, \quad \lim_n \|\nabla u(y_n)\|_{L^2} = 0.$$

$$\text{Etape (1)} \; + \|u(y_n)\|_{L^3} > \varepsilon \;\Rightarrow \|u(y_n)\|_{L^2(Q_1(x_n))} > \varepsilon$$

$$\varphi_n(x) := u(y_n, x + x_n) \;\Rightarrow \|\varphi_n\|_{L^2(Q_1(0))} > \varepsilon, \; \forall n.$$

$$H(\varphi_n) = H(u) = 1, \quad \lim_n \|\nabla \varphi_n\|_{L^2} = 1.$$

$$H(\varphi_n) = \|\nabla\varphi_n\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\left(e^{4\pi|\varphi_n|^2} - 1 - 4\pi|\varphi_n|^2\right)dx$$

$$\Downarrow$$

$$\|\varphi_n\|_{L^4}^4 \lesssim \int_{\mathbb{R}^2}\left(e^{4\pi|\varphi_n|^2} - 1 - 4\pi|\varphi_n|^2\right)dx \to 0.$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_n \|\varphi_n\|_{L^2(Q_1(0))} = 0.$$

Absurde

Perspective

$$\limsup_{t\to\infty} \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\liminf_{t\to\infty} \|u(t)\|_{L^r(\mathbb{R}^2)} = 0 \quad \text{pour tout} \quad 0 < r < \infty.$$

est ce qu'on a

$$\limsup_{t\to\infty} \|u(t)\|_{L^r(\mathbb{R}^2)} = 0 \quad \text{pour tout} \quad 2 < r < \infty.$$

Merci pour votre attention.