Analyse harmonique associée à l'opérateur de Bessel Struve

Selma NEGZAOUI

en collaboration avec Lotfi KAMOUN

JAMA 2011
Hammamet 22-24 Mars 2011

Plan

Travaux sur l'opérateur de Bessel-Struve

- G.N. Watson (1922) :"generalised Schlomlich series"
- A. Gasmi, M.Sifi,(2004) : Transformation de Bessel-Struve sur $\mathcal{H}'(\mathbb{C})$
- L. Kamoun, M.Sifi, (2005) : Opérateur de transmutation associé à l'opérateur de Bessel-Struve

Opérateur de Bessel et opérateur de Bessel-Struve

- $$\Delta_\alpha u(x) = \frac{d^2u}{dx^2}(x) + \frac{2\alpha+1}{x}(\frac{du}{dx}(x))$$
  où u est une fonction paire de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Opérateur de Bessel et opérateur de Bessel-Struve

- $\Delta_\alpha u(x) = \frac{d^2u}{dx^2}(x) + \frac{2\alpha+1}{x}(\frac{du}{dx}(x))$
  où u est une fonction paire de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

- $l_\alpha u(x) = \frac{d^2u}{dx^2}(x) + \frac{2\alpha+1}{x}\left[\frac{du}{dx}(x) - \frac{du}{dx}(0)\right]$
  où u est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Noyau de Bessel-Struve

- $\alpha > \frac{-1}{2}$, $\begin{cases} l_\alpha u(x) = \lambda^2 u(x) \\ u(0) = 1, u'(0) = \dfrac{\lambda \Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+\frac{3}{2})} \end{cases}$ admet une unique solution notée $\Phi_\alpha(\lambda .)$ et qu'on appelle "noyau de Bessel-Struve "

Noyau de Bessel-Struve

- $\alpha > \frac{-1}{2}$, $\begin{cases} l_\alpha u(x) = \lambda^2 u(x) \\ u(0) = 1, u'(0) = \dfrac{\lambda \Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+\frac{3}{2})} \end{cases}$ admet une unique solution notée $\Phi_\alpha(\lambda.)$ et qu'on appelle "noyau de Bessel-Struve "

- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi_\alpha(\lambda x) = \dfrac{2\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})} \int_0^1 (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \exp(\lambda x t)\, dt$

Noyau de Bessel-Struve

- $\alpha > \frac{-1}{2}$, $\begin{cases} l_\alpha u(x) = \lambda^2\, u(x) \\ u(0) = 1, u'(0) = \dfrac{\lambda\, \Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+\frac{3}{2})} \end{cases}$ admet une unique solution notée $\Phi_\alpha(\lambda.)$ et qu'on appelle "noyau de Bessel-Struve "

- $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi_\alpha(\lambda x) = \frac{2\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})} \int_0^1 (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \exp(\lambda x t)\, dt$$

- $\Phi_\alpha(i\lambda x) = j_\alpha(\lambda x) + i\, h_\alpha(\lambda x)$

Propriétés :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\left| \frac{d^n}{dx^n} \Phi_\alpha(i\lambda x) \right| \leq |\lambda|^n$$

- En particulier, on a pour tout λ et x dans $\mathbb{R}$,

$$|\Phi_\alpha(i\lambda x)| \leq 1$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{\lambda \to +\infty} \Phi_\alpha(i\lambda x) = 0$

Définition de la transformation de Bessel-Struve

- On note $A(x) = |x|^{2\alpha+1}$
- $L^1_\alpha(\mathbb{R})$ représente l'espace des fonctions f mesurables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant

$$\|f\|_{1\,,\,\alpha} = \int_{\mathbb{R}} |f(t)| d\mu_\alpha(t) \,<\, +\infty \quad \text{avec} \quad d\mu_\alpha(t) = A(t)\,dt$$

Définition de la transformation de Bessel-Struve

- On note $A(x) = |x|^{2\alpha+1}$
- $L^1_\alpha(\mathbb{R})$ représente l'espace des fonctions f mesurables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant

$$\|f\|_{1\,,\,\alpha} = \int_{\mathbb{R}} |f(t)| d\mu_\alpha(t) < +\infty \quad \text{avec} \quad d\mu_\alpha(t) = A(t)\, dt$$

- On définit la transformation de Bessel-Struve dans $L^1_\alpha(\mathbb{R})$ par

$$\forall f \in L^1_\alpha(\mathbb{R}) \qquad \mathcal{F}^\alpha_{B,S}(f)(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\, \Phi_\alpha(-i\lambda y)\, d\mu_\alpha(y)$$

où $\Phi_\alpha(-i\lambda.)$ est le noyau de Bessel-Struve.

Résultats immédiats

- Soit f un fonction de $L^1_\alpha(\mathbb{R})$ alors $\mathcal{F}^\alpha_{B,S}(f)$ appartient à $C_0(\mathbb{R})$, où $C_0(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions continues ayant 0 comme limite à l'infini. De plus

$$\|\mathcal{F}_{B,S}(f)\|_\infty \leq \|f\|_{1,\alpha} \tag{1}$$

Résultats immédiats

- Soit f un fonction de $L^1_\alpha(\mathbb{R})$ alors $\mathcal{F}^\alpha_{B,S}(f)$ appartient à $C_0(\mathbb{R})$, où $C_0(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions continues ayant 0 comme limite à l'infini. De plus

$$\|\mathcal{F}_{B,S}(f)\|_\infty \leq \|f\|_{1,\alpha} \tag{1}$$

- Soient f et $g \in L^1_\alpha(\mathbb{R})$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_{B,S}(f)(x)\, g(x)\, d\mu_\alpha(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mathcal{F}_{B,S}(g)(x)\, d\mu_\alpha(x) \tag{2}$$

1. Opérateur de transmutation
2. Dual de l'opérateur de transmutation
3. La transformation de Weyl
4. Inversion de la transformation de Weyl
    - Cas α demi entier
    - Cas α non demi entier

Opérateur de transmutation

- $\alpha > -\frac{1}{2}$

$$\chi_\alpha(f)(x) = \frac{2\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})} \int_0^1 (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} f(xt)\, dt \quad f \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$$

Opérateur de transmutation

- $\alpha > -\frac{1}{2}$
$$\chi_\alpha(f)(x) = \frac{2\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}\int_0^1 (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} f(xt)\,dt \quad f \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$$

- $l_\alpha \chi_\alpha f = \chi_\alpha D^2 f$

Opérateur de transmutation

- $\alpha > -\frac{1}{2}$

  $$\chi_\alpha(f)(x) = \frac{2\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}\int_0^1 (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} f(xt)\,dt \quad f \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$$

- $l_\alpha \chi_\alpha f = \chi_\alpha D^2 f$

- $\Phi_\alpha(-i\lambda x) = \chi_\alpha(e^{-i\lambda x})$

Théorème : (L.Kamoun, M.Sifi)

L'opérateur χ_α, $\alpha > -\frac{1}{2}$, est un isomorphisme topologique de $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ sur lui même. Son inverse est donné par : χ_α^{-1}

- Si $\alpha = \frac{1}{2} + k$, $k \in \mathbb{N}$

$$\chi_\alpha^{-1} f(x) = \frac{2^{2k+1} k!}{(2k+1)!}\, x\,\left(\frac{d}{dx^2}\right)^{k+1}\left(x^{2k+1} f(x)\right); \quad x \in \mathbb{R}$$

- Si $\alpha = r + k$, $k \in \mathbb{N}$, $-\frac{1}{2} < r < \frac{1}{2}$

$$\chi_\alpha^{-1} f(x) = c_1\, x\left(\frac{d}{dx^2}\right)^{k+1}\left[\int_0^x (x^2 - t^2)^{-r-\frac{1}{2}} |t|^{2\alpha+1} f(t)\, dt\right]$$

avec $c_1 = \dfrac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\frac{1}{2} - r)}$

Dual de l'opérateur de transmutation

- Définition du dual : On définit l'opérateur χ_α^* sur $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ par

$$< \chi_\alpha^*(T), f >=< T, \chi_\alpha f > \quad , \quad f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}) \qquad (3)$$

Dual de l'opérateur de transmutation

- Définition du dual : On définit l'opérateur χ_α^* sur $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ par

$$< \chi_\alpha^*(T), f >=< T, \chi_\alpha f > \qquad , \quad f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}) \qquad (3)$$

- χ_α^* est un isomorphisme de $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ sur lui même.

Dual de l'opérateur de transmutation

- Définition du dual : On définit l'opérateur χ_α^* sur $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ par

$$< \chi_\alpha^*(T), f >=< T, \chi_\alpha f > \qquad , \quad f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}) \tag{3}$$

- χ_α^* est un isomorphisme de $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ sur lui même.

- Pour $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, la distribution $\chi_\alpha^* T_{Af}$ est définie par une fonction notée $W_\alpha f$. Cette fonction $W_\alpha f$, admet l'expression suivante

$$W_\alpha f(y) = \frac{2\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})} \int_{|y|}^{+\infty} (x^2-y^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}\, x\, f(sgn(y)x)\, dx \tag{4}$$

La transformation de Weyl

- Pour $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $y \in \mathbb{R}^\star$

$$W_\alpha f(y) = \frac{2\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})} \int_{|y|}^{+\infty} (x^2 - y^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}\, x\, f(sgn(y)x)\, dx$$

La transformation de Weyl

- Pour $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $y \in \mathbb{R}^\star$

$$W_\alpha f(y) = \frac{2\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})} \int_{|y|}^{+\infty} (x^2 - y^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}\, x\, f(sgn(y)x)\, dx$$

- Pour $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_\alpha f(x)\, g(x) A(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, W_\alpha g(x) dx$$

- W_α est un opérateur continu de $L^1_\alpha(\mathbb{R})$ sur $L^1(\mathbb{R})$
  De plus
  $$\|W_\alpha(f)\|_1 \leq C \|f\|_{1,\alpha}$$

- W_α est un opérateur continu de $L^1_\alpha(\mathbb{R})$ sur $L^1(\mathbb{R})$
  De plus
  $$\|W_\alpha(f)\|_1 \ \leq C \ \|f\|_{1,\alpha}$$

- Pour toute $f \in L^1_\alpha(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}_{B,S}(f) = \mathcal{F} \circ W_\alpha(f)$
  avec $\mathcal{F}$ est la transformation de Fourier classique donnée par :
  $\mathcal{F}(g)(\lambda) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} g(x)e^{-i\lambda x}dx$

Contre exemple

$$f(x) = \begin{cases} xe^{\frac{1}{1-x^2}} & si \quad x \in]-1,1[\\ 0 & si \quad |x| \geq 1 \end{cases}$$

On a

- $$W_\alpha f(0^+) = \frac{2\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})} \int_0^1 x^{2\alpha+1} e^{\frac{1}{1-x}} \, dx \rangle 0$$
- $$W_\alpha f(0^-) = -\frac{2\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})} \int_0^1 x^{2\alpha+1} e^{\frac{1}{1-x}} \, dx \langle 0$$

- On désigne par $\mathcal{K}_0$ l'espace des fonctions f infiniment différentiables sur $\mathbb{R}^*$ à support borné et vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{\substack{y \to 0 \\ y > 0}} y^n (W_\alpha f)^{(n)}(y) \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{y \to 0 \\ y < 0}} y^n (W_\alpha f)^{(n)}(y)$$

existent.

- On désigne par $\mathcal{K}_0$ l'espace des fonctions f infiniment différentiables sur $\mathbb{R}^*$ à support borné et vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{\substack{y \to 0 \\ y > 0}} y^n (W_\alpha f)^{(n)}(y) \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{y \to 0 \\ y < 0}} y^n (W_\alpha f)^{(n)}(y)$$

existent.

- $W_\alpha(\mathcal{D}(\mathbb{R})) \subset \mathcal{K}_0$

Lemme 1 :

Soit f une fonction de $\mathcal{K}_0$. Alors la distribution $(\chi_\alpha^*)^{-1} T_f$ est définie par la fonction notée $A\,V_\alpha f$. La fonction $V_\alpha f$ a l'expression suivante :

- Si $\alpha = k + \frac{1}{2}$; $k \in \mathbb{N}$

$$V_\alpha f(x) = (-1)^{k+1} \frac{2^{2k+1} k!}{(2k+1)!} \left(\frac{d}{dx^2} \right)^{k+1} (f(x))\,;\; x \in \mathbb{R}^\star$$

- Si $\alpha = k + r,\; k \in \mathbb{N}\,;\; -\frac{1}{2} < r < \frac{1}{2};\; x \in \mathbb{R}^\star$

$$V_\alpha f(x) = c_1 \int_{|x|}^{+\infty} (y^2 - x^2)^{-r-\frac{1}{2}} \left(\frac{d}{dy^2} \right)^{k+1} (f)(sgn(x)\,y)\,y\,dy$$

où $c_1 = \dfrac{(-1)^{k+1} 2\sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\frac{1}{2} - r)}$

Conséquence :

On en déduit que les opérateurs V_α et χ_α^{-1} sont liés par la relation de dualité suivante

$$\int_{\mathbb{R}} V_\alpha f(x)\, g(x) A(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \chi_\alpha^{-1} g(x)\, dx \qquad (5)$$

pour tout $f \in \mathcal{K}_0$ et $g \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$

Lemme 2 :

Soit $g \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^*)$, m et p sont deux entiers positifs , on a

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \qquad \left(\frac{d}{dx^2}\right)^p (x^m\, g(x)) = \sum_{i=0}^{p} \beta_i^p\, x^{m-2p+i}\, g^{(i)}(x) \quad (6)$$

où β_i^p sont des constantes dépendant de i, p et m.

Cas des demi-entiers

- $\Delta_{a,k+\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ le sous espace de $\mathcal{K}_0$ des fonctions f infiniment différentiables sur $\mathbb{R}^*$ à support inclus dans $[-a,a]$ vérifiant la condition suivante :

$$(\frac{d}{dx^2})^{k+1}f \text{ est prolongeable en une fonction de } \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

Cas des demi-entiers

- $\Delta_{a,k+\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ le sous espace de $\mathcal{K}_0$ des fonctions f infiniment différentiables sur $\mathbb{R}^*$ à support inclus dans $[-a, a]$ vérifiant la condition suivante :

$$(\frac{d}{dx^2})^{k+1} f \text{ est prolongeable en une fonction de } \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

- On munit cet espace par la topologie définie à partir des semi normes ρ_n où

$$\rho_n(f) = \sup_{\substack{0 \leq p \leq n \\ x \in [-a,a]}} |((\frac{1}{x}\frac{d}{dx})^{k+1} f)^{(p)}(x)|$$

Cas des demi-entiers

- $\Delta_{a,k+\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ le sous espace de $\mathcal{K}_0$ des fonctions f infiniment différentiables sur $\mathbb{R}^*$ à support inclus dans $[-a,a]$ vérifiant la condition suivante :

$$(\frac{d}{dx^2})^{k+1}f \text{ est prolongeable en une fonction de } \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

- On munit cet espace par la topologie définie à partir des semi normes ρ_n où

$$\rho_n(f) = \sup_{\substack{0\leq p\leq n\\ x\in[-a,a]}} |((\frac{1}{x}\frac{d}{dx})^{k+1}f)^{(p)}(x)|$$

- Pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\Delta_{k+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}) = \bigcup_{a\geq 0} \Delta_{a,k+\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$$

Cas des demi-entiers

Théorème1 :
Inversion de la transformation de Weyl

L'opérateur $W_{k+\frac{1}{2}}$ est un isomorphisme topologique de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ sur $\Delta_{k+\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ et son inverse est donné par $V_{k+\frac{1}{2}|\Delta_{k+\frac{1}{2}}(\mathbb{R})}$
avec

$$V_{k+\frac{1}{2}}f(x) = (-1)^{k+1}\frac{2^{2k+1}k!}{(2k+1)!}\left(\frac{d}{dx^2}\right)^{k+1}(f(x))\,;\ x \in \mathbb{R}^\star$$

Cas des non demi-entiers

- $\Delta_{a,k+r}(\mathbb{R})$: le sous espace de $\mathcal{K}_0$ de fonctions f à support inclus dans $[-a, a]$ vérifiant la condition suivante : $(\frac{d}{dx^2})^{k+1}\left(\int_1^{+\infty}(t^2-1)^{-r-\frac{1}{2}}f(xt)\,t\,dt\right)$ est prolongeable en une fonction appartenant à $|x|^{2r-1}\mathcal{D}(\mathbb{R})$

Cas des non demi-entiers

- $\Delta_{a,k+r}(\mathbb{R})$: le sous espace de $\mathcal{K}_0$ de fonctions f à support inclus dans $[-a, a]$ vérifiant la condition suivante : $(\frac{d}{dx^2})^{k+1}\left(\int_1^{+\infty}(t^2-1)^{-r-\frac{1}{2}}f(xt)\,t\,dt\right)$ est prolongeable en une fonction appartenant à $|x|^{2r-1}\mathcal{D}(\mathbb{R})$
- Cet espace est muni par la topologie des semi normes q_n où $q_n(f) =$

$$\sup_{\substack{0\leq p\leq n\\ x\in[-a,a]}}\left|D^p\left(|x|^{-2r+1}(\frac{d}{dx^2})^{k+1}\left(\int_1^{+\infty}(t^2-1)^{-r-\frac{1}{2}}f(xt)\,t\,dt\right)\right)\right|$$

Cas des non demi-entiers

- $\Delta_{a,k+r}(\mathbb{R})$: le sous espace de $\mathcal{K}_0$ de fonctions f à support inclus dans $[-a,a]$ vérifiant la condition suivante : $(\frac{d}{dx^2})^{k+1}\left(\int_1^{+\infty}(t^2-1)^{-r-\frac{1}{2}}f(xt)\,t\,dt\right)$ est prolongeable en une fonction appartenant à $|x|^{2r-1}\mathcal{D}(\mathbb{R})$
- Cet espace est muni par la topologie des semi normes q_n où $q_n(f) =$
$$\sup_{\substack{0\leq p\leq n\\ x\in[-a,a]}}\left|D^p\left(|x|^{-2r+1}(\frac{d}{dx^2})^{k+1}\left(\int_1^{+\infty}(t^2-1)^{-r-\frac{1}{2}}f(xt)\,t\,dt\right)\right)\right|$$
- On considère, pour $k\in\mathbb{N}$, l'espace
$$\Delta_{k+r}(\mathbb{R}) = \bigcup_{a\geq 0}\Delta_{a,k+r}(\mathbb{R})$$

Cas des non demi-entiers

Théorème 2 : Inversion de la transformation de Weyl

W_{k+r} est un isomorphisme topologique de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ sur $\Delta_{k+r}(\mathbb{R})$ et son inverse est donné par $V_{k+r|\Delta_{k+r}(\mathbb{R})}$
avec

$$V_{k+r}f(x) = c_1 \int_{|x|}^{+\infty} (y^2 - x^2)^{-r-\frac{1}{2}} \left(\frac{d}{dy^2}\right)^{k+1} (f)(sgn(x)y)\, y\, dy$$

où $\quad c_1 = \dfrac{(-1)^{k+1} 2\sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\frac{1}{2}-r)}$

Théorème de Paley-Wiener

- Théorème de Paley-Wiener pour $\alpha = \dfrac{1}{2}$
- Théorème de Paley-Wiener pour $\alpha = k + \dfrac{1}{2}$, avec $k \in \mathbb{N}$
- Théorème de Paley-Wiener-Schwartz

Théorème de Paley-Wiener pour $\alpha = \frac{1}{2}$

- Soit $a > 0$, $\mathcal{H}_a$ désigne l'espace des fonctions f analytiques vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ \exists\, c_n > 0\,;\ \forall z \in \mathbb{C}\,,\qquad (1+|z|^2)^n |f(z)| e^{-a\,Im(z)} < c_n$$

Théorème de Paley-Wiener pour $\alpha = \frac{1}{2}$

- Soit $a > 0$, $\mathcal{H}_a$ désigne l'espace des fonctions f analytiques vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ \exists\, c_n > 0\,;\ \forall z \in \mathbb{C}\,, \qquad (1+|z|^2)^n |f(z)| e^{-a\, Im(z)} < c_n$$

- On introduit $\Lambda_{a,\frac{1}{2}}$ l'espace des fonctions g analytiques vérifiant

$$\exists\, h \in \mathcal{H}_a\ \forall\, z \in \mathbb{C}^* \qquad g(z) = \frac{h'(z) - h'(0)}{z}$$

et on note $\Lambda_{\frac{1}{2}} = \bigcup_{a>0} \Lambda_{a,\frac{1}{2}}$

Théorème de Paley-Wiener pour $\alpha = \frac{1}{2}$

- Soit $a > 0$, $\mathcal{H}_a$ désigne l'espace des fonctions f analytiques vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ \exists\, c_n > 0\,;\ \forall z \in \mathbb{C}\,, \qquad (1+|z|^2)^n |f(z)| e^{-a\, Im(z)} < c_n$$

- On introduit $\Lambda_{a,\frac{1}{2}}$ l'espace des fonctions g analytiques vérifiant

$$\exists\, h \in \mathcal{H}_a\ \forall\, z \in \mathbb{C}^* \qquad g(z) = \frac{h'(z) - h'(0)}{z}$$

et on note $\Lambda_{\frac{1}{2}} = \bigcup_{a>0} \Lambda_{a,\frac{1}{2}}$

- On a

$$\mathcal{F}_{BS}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{D}(\mathbb{R})) = \Lambda_{\frac{1}{2}}$$

Théorème de Paley-Wiener pour $\alpha > \frac{1}{2}$

Pour $\alpha > \frac{1}{2}$, les assertions suivantes sont équivalentes

1. $g = \mathcal{F}_{BS}^{\alpha}(f)$ where $f \in \mathcal{D}_a(\mathbb{R})$
2. g est prolongeable en une fonction analytique sur $\mathbb{C}$, $\tilde{g}$ vérifiant

$$\exists\, h \in \mathcal{F}_{BS}^{\alpha-1}(\mathcal{D}_a(\mathbb{R}))\ ;\ \ \forall z \in \mathbb{C} \qquad \tilde{g}(z) = \alpha\,\frac{h'(z) - h'(0)}{z}$$

Théorème de Paley-Wiener-Schwartz

- On définit la transformation de Bessel-Struve sur $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ par

$$\forall\, T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}),\ \mathcal{F}_{B,S}(T)(\lambda) = < T, \Phi_\alpha(-i\lambda.) > \qquad (7)$$

Théorème de Paley-Wiener-Schwartz

- On définit la transformation de Bessel-Struve sur $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ par

$$\forall\, T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})\,,\; \mathcal{F}_{B,S}(T)(\lambda) = < T, \Phi_\alpha(-i\lambda.) > \qquad (7)$$

- Pour tout $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{F}_{B,S}(T) = \mathcal{F} \circ \chi_\alpha^\star(T) \qquad (8)$$

Théorème

Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, $b > 0$, $supp(T) \subseteq [-b, b]$, $f \ = \mathcal{F}_{B,S}(T)$
2. f est prolongeable en une fonction holomorphe $\tilde{f}$ sur $\mathbb{C}$ vérifiant

$$\exists m \in \mathbb{N}\,,\ \exists c > 0\,,\ \forall z \in \mathbb{C}\ \ |\tilde{f}(z)| \ \leq \ c\,(1 + |z|^2)^{\frac{m}{2}}\ e^{b(Im(z))}$$

Merci pour votre attention