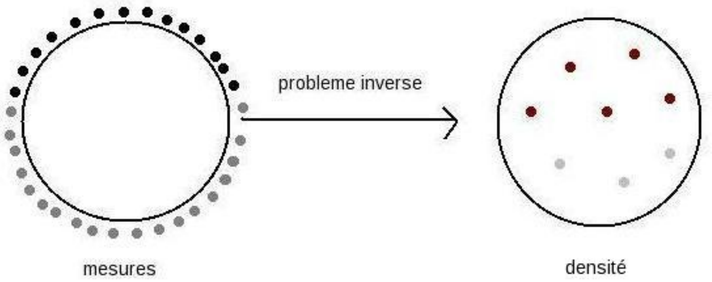
La base de Slepian

A.-M. Nicu
travail commun avec:
A. Bonami, A. Karoui, J. Leblond

INRIA-Sophia Antipolis et Faculté des Sciences de Bizerte

23 mars 2011

Problèmes inverses - Contexte général



mesures: potentiel gravitationnel, électrique, magnétique, etc.

densité continue ou discrete (sources, points masses)

Potentiel gravitationnel

La loi universelle de la gravitation (Isaac Newton) :

$$V(y) = G \int_{\mathbb{B}} \frac{\rho(x)}{|x-y|} dx$$

où V peut être donné à la surface de la terre, ∇V, Hess V sur differentes orbites satellitaires, G est la const. gravitationnelle, $\rho \in L^2(\mathbb{B})$ la densité de la terre.

$$\Delta V = \begin{cases} \underbrace{-4\pi\rho(x)}_{f} & \text{si } x \in \mathbb{B} \text{ (Poisson equation);} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{B} \text{ (Laplace equation).} \end{cases}$$

Potentiel électrique

$$U(X) = h(X) + \sum_{k=1}^{m} \frac{< p_k, X - C_k >}{\|X - C_k\|^3}$$

où h est harmonique, $X \in \mathbb{S}$, C_k, p_k les positions des sources, resp. des moments des sources, m le nombre des sources.

$$\begin{cases} -\Delta U = \underbrace{\sum_{k=1}^{m} p_k \cdot \nabla \delta_{C_k}}_{f} \text{ sur } \mathbb{B} \\ \frac{\partial U}{\partial n}|_{\mathbb{S}} = \phi, U|_{\mathbb{S}} = g \end{cases}$$

ϕ, g sont les conditions sur le bord, n-la normale à $\mathbb{S}$.

Étude du problème
Représentation des données

$$Pot(\sigma_k) \mapsto c_{nm}? \text{ avec } Pot(\sigma) = \sum_{n,m} c_{nm} B_{nm}(\sigma)$$

1. si $\sigma_k \in \mathbb{S}$ alors $B_{nm}(\sigma) = Y_{nm}(\sigma)$ avec Y_{nm} la base des harmoniques sphériques
2. si $\sigma_k \in \Omega \subset \mathbb{S}$, $B_{nm}(\sigma) = S_{nm}(\sigma)$ avec S_{nm} la base de Slepian

Pot. gravitationnel en harmoniques sphériques :

$$V(r,\theta,\phi) = \frac{GM}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} c_{nm}(\frac{a}{r})^n Y_{nm}(\theta,\phi)$$

Pot. électrique en harmoniques sphériques :

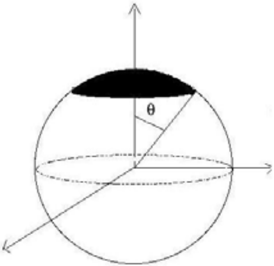
$$U(r,\theta,\phi) = h + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} r^{-(n+1)} c_{nm} Y_{nm}(\theta,\phi)$$

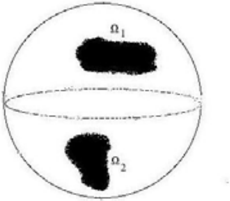
avec h harmonique

Base de Slepian

Propriétés :

- orthogonale sur la région étudiée $\Omega \subset \mathbb{S}$
- orthonormale sur la sphère $\mathbb{S}$
- la région etudiée peut être un continent, une calote sphérique, etc.


θ


Ω1
Ω2

Construction de la base

- $\forall f \in L^2(\mathbb{S})\,, f(\theta,\phi) = \sum_{n=0}^{L} \sum_{m=-n}^{n} f_{nm} Y_{nm}(\theta,\phi)$
- trouver f t.q. $\mu = \dfrac{\int_\Omega f^2 \mathrm{d}\sigma}{\int_\mathbb{S} f^2 \mathrm{d}\sigma}$ soit maximal
- on résout le problème $D\mathbf{f} = \mu\mathbf{f}$ e.q

$$\sum_{n'=0}^{L} \sum_{n'=-m'}^{m'} D_{nm,n'm'} f_{n'm'} = \mu f_{nm} \qquad (1)$$

où $D_{nm,n'm'} = \sum_{n=0}^{L} \sum_{m=-n}^{n} Y_{nm}(u) Y_{nm}(u')$ et D matrice de dim. $(L+1)^2 \times (L+1)^2$.

- on multiplie (1) par $Y_{nm}(\theta, \phi)$ et on obtient :

$$\mathbf{K}(f)(\theta, \phi) = \int_{\Omega} D((\theta, \phi), (\theta', \phi')) f(\theta', \phi') \mathrm{d}\sigma = \mu f(\theta', \phi')$$

avec $D((\theta, \phi), (\theta', \phi')) = \sum_{n=0}^{L} \sum_{m=-n}^{n} Y_{nm}(u) Y_{nm}(u')$

L'opérateur $\mathbf{K}$ commute avec l'opérateur de Sturm-Liouville $\mathbf{S}$ définie sur une calotte sphérique

$$\mathcal{C} : 0 \leq \theta \leq arccos(b), 0 \leq \phi \leq 2\pi :$$

$$\mathbf{S} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(1 - x^2)(b - x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}] - L(L + 2)x - \frac{m^2(b - x)}{1 - x^2} \quad (2)$$

et donc ils ont les même fonctions propres (les fonctions de Slepian).

Gauss-Legendre méthode

Sur $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \simeq \sum_{i=1}^{N} w_i f(x_i)$$

avec x_i les racines du polynôme de Legendre $P_N(x)$ et w_i les poids données par :

$$w_i = -\frac{a_{N+1}}{a_N} \frac{1}{P_{N+1}(x_i) P'_N(x_i)}$$

Sur $\mathbb{S}$:

$$\int_{\mathbb{S}} f(x)\mathrm{d}w(x) \simeq \sum_{d=1}^{D} w_d f(\theta_d, \phi_d)$$

$(\theta_d, \phi_d) \in \{\theta_j, j = 0, \ldots, S\} \times \{\phi_k, k = 0, \ldots, 2S + 1\}$- ensemble des noeuds avec $\phi_k = \frac{k\pi}{S+1}, \phi_k \in [0, 2\pi]$, $S \in \mathbb{N}$

θ_j et ϕ_k-co-latitudinal et longitudinal noeuds.

$$W_S = \{w_d = w_{j,k}, j = 0, \ldots, S, k = 0, \ldots, 2S+1\}$$

avec $w_{j,k} = \frac{2\pi}{2S+1} w_j$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta,\phi)\sin\theta \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} f(\arccos x,\phi)\mathrm{d}x\mathrm{d}\phi$$
$$\simeq \sum_{k=0}^{2S+1}\sum_{j=0}^{S} \frac{2\pi w_j}{2S+2} f(\arccos x_j, \phi_k)$$

où x_j sont les zeros de $P_{S+1}(x)$.

-on applique la méthode de quadrature de Gauss-Legendre :

$$\mathbf{K}F_n(u) = \int_{\mathcal{C}} \Big(\sum_{n=0}^{L} \sum_{m=-n}^{n} Y_{nm}(u) Y_{nm}(u') \Big) F_n(u') \mathrm{d}u' \qquad (3)$$

avec le noyau :

$$K(m, x, x') = \sum_{n=|m|}^{L} \frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} P_n^m(x) P_n^m(x') \qquad (4)$$

Les <u>fonctions de Slepian</u> sont les fonctions propres de $\mathbf{K}$ qui ont une dépendance angulaire de la forme $e^{im\phi}$. On note avec H_m l'espace de ces fonctions.

Sur $H_{m'}$, si on prend $g(u) = f(cos\theta)e^{im'\phi} = f(x)e^{im'\phi}$ et on applique l'opérateur $\mathbf{K}$ on obtient :

$$(\mathbf{K}f)(u) = \int_{\mathcal{C}} \Big(\sum_{n=0}^{L} \sum_{m=-n}^{n} Y_{nm}(u) Y_{nm}(u') \Big) f(x') e^{im'\phi'} \mathrm{d}x' \mathrm{d}\phi'$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_b^1 \Big(\sum_{n=0}^{L} \sum_{m=-n}^{n} Y_{nm}(x,\phi) Y_{nm}(x',\phi') \Big) f(x') e^{im'\phi'} \mathrm{d}x' \mathrm{d}\phi'$$

$$\int_0^{2\pi}\int_b^1 \Big(\sum_{n=0}^{L}\sum_{m=-n}^{n}\frac{2n+1}{4\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(x)e^{im\phi}P_n^m(x')e^{-im\phi'}\Big)f(x')e^{im'\phi'}\mathrm{d}x'\mathrm{d}\phi'$$

$$=\int_b^1\sum_{n=0}^{L}\sum_{m=-n}^{n}\frac{2n+1}{4\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(x)P_n^m(x')f(x')\Big(e^{im\phi}\int_0^{2\pi}e^{i\phi'(-m+m')}\mathrm{d}\phi'\Big)\mathrm{d}x$$

$$=e^{im'\phi}\int_b^1\sum_{l=|m'|}^{L}\frac{2n+1}{2\pi}\frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}P_n^{m'}(x)P_n^{m'}(x')f(x')\mathrm{d}x'$$

$$\int_b^1\sum_{l=|\overline{m}|}^{L}\frac{2n+1}{2\pi}\frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}P_n^{\overline{m}}(x)P_n^{\overline{m}}(x')f(x')\mathrm{d}x'=$$
$\mu_n(m)f_n(x), x\in[b,1]$.
Le rang de $\mathbf{K}$ is $L-|m|+1$ et donc il admet $L-|m|+1$ valeurs et fonctions propres (concentrées dans $\mathcal{C}$, les autres sont zeros).

Theorem

Soit $n \geq 0$, $0 < \epsilon < 1$ $\exists$ $N(\epsilon, |\mu_n(m)|) \in \mathbb{N}$ *t.q*
$\forall N \geq N(\epsilon, |\mu_n(m)|)$ *on a :*

$$\sup_{b \leq x \leq 1} |f_n(x) - \frac{1}{\mu_n(m)} \sum_{j=1}^{N} w_j K(m, x, y_j) f_n(y_j)| \leq \epsilon \qquad (5)$$

y_j *et* w_j *sont les noeuds resp. les poids.*

Etapes de la preuve :

Lemma

$|P_n^m(cos\theta)| \leq C_n \cdot (2n)^m$

Lemma

Pour $k \geqslant 0$ et pour $0 \leq m \leq n$ il existe une constante constante c_k t.q :

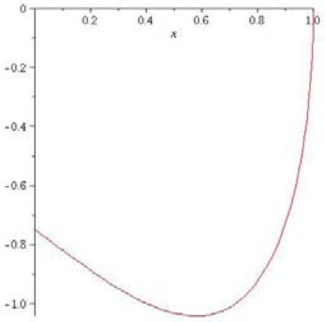
$$\sup_{x \in [b,1]} \left| \frac{\mathrm{d}^k P_n^m(\cos x)}{\mathrm{d}x^k} \right| \leq c_k n^{m+2k}$$

Lemma

$$\sup_{x \in [b,1]} \left| \frac{\partial^k K(m,x,x')}{\partial x^k} \right| \leq C_L \sum_{n=m}^{L} \frac{2n+1}{2\pi} n^{2k}$$

Simulations numériques

FIGURE: Fonctions propres pour L=3



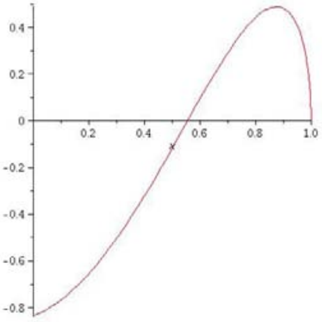
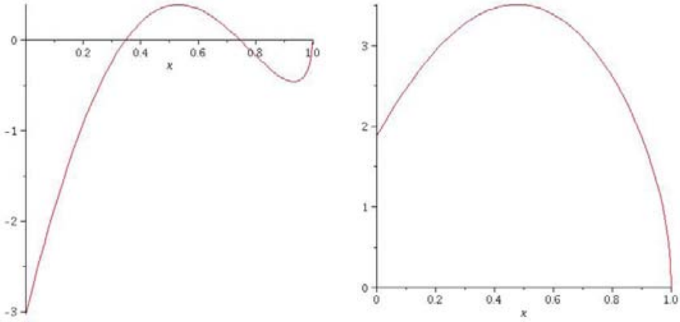


Figure: Fonctions propres pour L=3



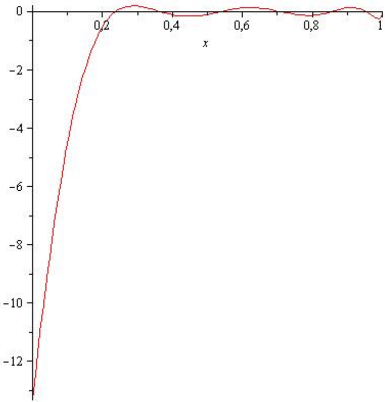


FIGURE: L=10

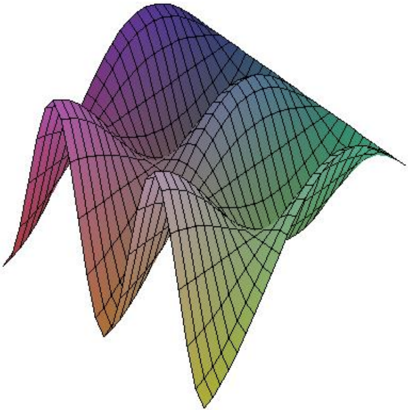


FIGURE: Slepian function

Formule de quadrature Gauss-Legendre pour EEG

résolution du pb. inverse de l'EEG $\rightsquigarrow$calcule des coeff. des harm. sph.
<u>1ère méthode</u> : pseudo-inverse Moore-Penrose

$$f_{nm} = U \cdot pinv(A)$$

où A est la matrice associée aux harm. sph., U le potentiel électrique $\rightsquigarrow$ nb. de conditionnement très élève $\rightsquigarrow$ problème mal condionné
<u>2ème méthode</u> : Gauss-Legendre $\rightsquigarrow$ pb. bien conditionné

Perspectives

$\mathbf{K}$ commute avec l'opérateur Sturm-Liouville (2) et donc ils ont les même fonctions propres.
On résout $\mathbf{S}F_n = \mu_n F_n$ pour

- $m = 0$
- $m > 0$

En utilisant les polynômes de Legendre shiftés :

$$S_n(x) = P_n\left(\frac{x - b_1}{b_2}\right)$$

avec $b_1 = (1+b)/2, b_2 = (1-b)/2$ on se ramène à un problème aux valeurs propres généralisé de matrices de la forme $Ax = \mu Bx$.

Merci !