Projection des mesures orbitales et distributions de Dirichlet

Faïza Fourati

23 mars 2011

Plan de l'exposé

- Formule du type Markov-Krein
- Projection des mesures orbitales
- Projection des distributions de Dirichlet

Formule du type Markov-Krein

Formule du type Markov-Krein

Cette formule relie deux mesures positives μ et ν sur $\mathbb{R}$:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(z-t)^{\theta}} \mu(dt) = \exp\Big(-\int_{\mathbb{R}} \log(z-u)\nu(du)\Big), \quad \theta = \nu(\mathbb{R}).$$

On dit que μ est la transformée de Markov- Krein de la mesure ν.

Formule pour la mesure μ

Définition.

Pour $s \in \mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C} \backslash]-\infty, 0]$, on définit z^s comme suit: si $z = re^{i\alpha}$, avec $r > 0$, $\alpha \in]-\pi, \pi[$, alors $z^s = r^s e^{is\alpha}$.

Définition.

Une fonction f définie sur $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ est dite à croissance modérée, si pour tout compact K de $\mathbb{R}$, il existe $\varepsilon > 0$, une constante $C > 0$ et un entier naturel N tels que pour tous $x \in K$ et $0 < |y| < \varepsilon$,

$$|f(x+iy)| \leq \frac{C}{|y|^N}$$

Formule pour la mesure μ

Pour une fonction f holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ et à croissance modérée, on définit la distribution $[f]$, valeur au bord de f par: pour $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle [f], \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0, \varepsilon > 0} \int_{\mathbb{R}} (f(t+i\varepsilon) - f(t-i\varepsilon))\varphi(t)dt$$

Pour $\alpha \in \mathbb{C}$

$$\langle [z^\alpha], \varphi \rangle = -2i\pi \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \langle Y_{\alpha+1}, \check{\varphi} \rangle$$

où

$$\langle Y_\alpha, \varphi \rangle = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \varphi(t) t^{\alpha-1} dt.$$

En particulier, pour $m \in \mathbb{N}^*$,

$$[z^{-m}] = -2i\pi \frac{1}{(m-1)!} \delta^{(m-1)}.$$

$$Y_\alpha * Y_\beta = Y_{\alpha+\beta}, \qquad Y_0 = \delta, \quad Y_{-m} = \delta^m (m \in \mathbb{N}).$$

Théorème.

a) Si $g(z) = \exp\Big(-\int_{\mathbb{R}} \log(z-u)\nu(du)\Big)$ *alors*

$$[g](x) = -2i\sin(\pi\nu([x,+\infty[))\exp(-\int_{\mathbb{R}} \log(|x-u|)\nu(du)$$

b) Si μ *est à support compact*

$$\mu = -\frac{1}{2i\pi}\Gamma(\theta)\check{Y}_{(\theta-1)} \star [g]. \tag{1}$$

.

Lemme.

Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ à croissance modérée sur $\mathbb{R}$, et μ une mesure à support compact sur $\mathbb{R}$. Alors la fonction F définie par

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}} f(z-t)\mu(dt)$$

est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ à croissance modérée sur $\mathbb{R}$ et

$$[F] = [f] * \mu$$

Démonstration du théorème La formule de Markov-Krein peut s'écrire

$$\int_{\mathbb{R}} f(z-t)\mu(dt) = g(z)$$

où $f(z) = \frac{1}{z^\theta}$, et $g(z) = \exp\Big(-\int_{\mathbb{R}} \log(z-u)\nu(du)\Big)$ donc

$$[f] \star \mu = [g]$$

comme

$$[f] = -2i\pi \frac{1}{\Gamma(\theta)} \check{Y}_{(1-\theta)}$$

par suite

$$\check{Y}_{\theta-1} \star (\check{Y}_{1-\theta} \star \mu) = (\check{Y}_{\theta-1} \star \check{Y}_{1-\theta}) \star \mu$$
$$\mu = -\frac{1}{2i\pi}\Gamma(\theta)\check{Y}_{(\theta-1)} \star [g].$$

Projection des mesures orbitales

Herm$(n, \mathbb{F})$ l'espace des matrices hermitiennes $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{F} = \mathbb{R}$; $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$.
Le groupe unitaire $U(n, \mathbb{F})$ opère sur *Herm*$(n, \mathbb{F})$ par:

$$x \mapsto uxu^* \quad (u \in U(n, \mathbb{F})).$$

Soit $x \in Herm(n, \mathbb{F})$, $\qquad O_x = \{uxu^* \mid u \in U(n, \mathbb{F})\}$.
La mesure orbitale μ_x *de support* O_x *est définie sur* $Herm(n, \mathbb{F})$ *par:*

$$\int_{Herm(n,\mathbb{F})} f(y)\mu_x(dy) = \int_{U(n,\mathbb{F})} f(uxu^*)\nu(du)$$

où ν *est la mesure de Haar normalisée du groupe unitaire* $U(n, \mathbb{F})$

Projection des mesures orbitales

La mesure $M_x^{\mathbb{F}}$ est la projection de la mesure orbitale μ_x sur la droite $\mathbb{R}E_{11}$

$$\int_{\mathbb{R}} F(t)M_x^{\mathbb{F}}(dt) = \int_{Herm(n,\mathbb{F})} F(y_{11})\mu_x(dy) = \int_{U(n,\mathbb{F})} F((uxu^*)_{11})\nu(du).$$

O_x contient une matrice diagonale $a = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$,où $a_1, \ldots, a_n$ sont les valeurs propres de x; par conséquent $O_x = O_a$,

$$\int_{\mathbb{R}} F(t)M_x^{\mathbb{F}}(dt) = \int_{U(n,\mathbb{F})} F((uau^*)_{11})\nu(du).$$

Projection des mesures orbitales

En effectuant le produit uau^*:

$$\begin{pmatrix} u_{11} & . & . & . & u_{1n} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ u_{n1} & . & . & . & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & & & & \\ & . & & & \\ & & . & & \\ & & & . & \\ & & & & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{u_{11}} & . & . & . & \overline{u_{n1}} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ \overline{u_{1n}} & . & . & . & \overline{u_{nn}} \end{pmatrix}.$$

On obtient

$$(uau^*)_{11} = a_1|u_{11}|^2 + \cdots + a_n|u_{n1}|^2.$$

$$\int_{\mathbb{R}} F(t)M_x(dt) = \int_{U(n,\mathbb{F})} F(a_1|u_{11}|^2 + \cdots + a_n|u_{n1}|^2)\nu(du).$$

Projection des mesures orbitales

On considère l'application

$$\psi : U(n, \mathbb{F}) \to S(\mathbb{F}^n), \quad u \mapsto (u_{11}, \dots, u_{n1})$$

où $S(\mathbb{F}^n)$ est la sphère unité de $\mathbb{F}^n$ et $d = dim_{\mathbb{R}}\mathbb{F} = 1, 2, 4$.
L'image par ψ de la mesure de Haar ν est égale à la mesure uniforme normalisée σ sur $S(\mathbb{F}^n)$.

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) M_x^{\mathbb{F}}(dt) = \int_{S(\mathbb{F}^n)} f(a_1|u_1|^2 + \cdots + a_n|u_n|^2)\sigma(du).$$

Projection des mesures orbitales

On considère le simplexe Δ_{n-1} défini par:

$$\Delta_{n-1} = \{\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n) \in \mathbb{R}^n / \tau_i \geq 0, \tau_1 + \cdots + \tau_n = 1\}$$

$$\Phi : S^{dn-1} \to \Delta_{n-1},$$
$$u = (u_1, \ldots, u_n) \mapsto \tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n) = (|u_1|^2, ..., |u_n|^2).$$

L'image de la mesure σ est la distribution de Dirichlet D_n qui est une mesure de probabilité définie sur le simplexe Δ_{n-1} par:

$$D_n(d\tau) = \frac{\Gamma(n\frac{d}{2})}{(n-1)!\Gamma(\frac{d}{2})^n}(\tau_1 \dots \tau_n)^{\frac{d}{2}-1}\lambda(d\tau)$$

où λ est la mesure uniforme normalisée sur Δ_{n-1} et $d = dim_{\mathbb{R}}\mathbb{F}$

$$\int_{S(\mathbb{F}^n)} f|(u_1|^2, \dots, |u_n|^2)\sigma(du) = \int_{\Delta_{n-1}} f(\tau_1, \dots, \tau_n)D_n(d\tau)$$

La *projection de la mesure orbitale* $M_x^{\mathbb{F}}$ est l'image de la distribution de Dirichlet D_n par:

$$\Delta_{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \tau \longmapsto a_1\tau_1 + \cdots + a_n\tau_n.$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) M_x^{\mathbb{F}}(dt) = \int_{\Delta_{n-1}} f(a_1\tau_1 + \cdots + a_n\tau_n) D_n(d\tau)$$

Soit $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, $n \geq 2$. La distribution de Dirichlet $D_n^{(\kappa)}$ est la mesure de probabilité définie sur Δ_{n-1} par

$$\int_{\Delta_{n-1}} f(\tau) D_n^{(\kappa)}(d\tau) = \frac{\Gamma(\kappa_1 + \cdots + \kappa_n)}{(n-1)!\Gamma(\kappa_1)\dots\Gamma(\kappa_n)} \int_{\Delta_{n-1}} f(\tau_1, \dots, \tau_n) \tau_1^{\kappa_1 - 1} \dots \tau_n^{\kappa_n - 1} \lambda(d\tau).$$

Pour $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $a_1 \leq \ldots \leq a_n$, on définit la mesure $M_n(\kappa; a)$ sur $\mathbb{R}$ comme étant l'image de la distribution de Dirichlet $D_n^{(\kappa)}$ par l'application

$$\tau \mapsto a_1\tau_1 + \cdots + a_n\tau_n.$$

$$\int_{\mathbb{R}} F(t) M_n(\kappa; a; dt) = \int_{\Delta_{n-1}} F(a_1\tau_1 + \ldots + a_n\tau_n) D_n^{(\kappa)}(d\tau).$$

$$supp(M_n(\kappa; a)) = [a_1, a_n]$$

.

Proposition.

Soient $a_1, \ldots, a_n$*, les valeurs propres de* x *et* $\kappa_1 = \ldots = \kappa_n = \frac{d}{2}$

$$M_x^{\mathbb{F}} = M_n(\kappa; a)$$

.

Théorème.

La mesure $M_n(\kappa; a)$ est la transformée de Markov- Krein de la mesure $\nu = \sum_{i=1}^{n} \kappa_i \delta_{a_i}$.

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(z-t)^{\theta}} M_n(\kappa; a; dt) = q_{\kappa,a}(z),$$

où $q_{\kappa,a}(z) = \exp\left(-\int_{\mathbb{R}} \log(z-u)\nu(du)\right) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{z-a_i}\right)^{\kappa_i}$,
$\theta = \kappa_1 + \cdots + \kappa_n$ *et* $z \in \mathbb{C} \backslash]-\infty, a_n]$.

Corollaire.

$$M_n(\kappa; a) = -\frac{1}{2i\pi} \Gamma(\theta) \check{Y}_{(\theta-1)} \star [q_{\kappa,a}]. \tag{2}$$

On suppose les a_i sont distincts

- Dans le cas où $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, $\kappa_i = 1$, $\theta = n$(Okounkov)

$$\mu(x) = (n-1) \sum_{a_j \geq x} c_j (a_j - x)^{n-2},$$

$c_j = \prod_{k \neq j} \frac{1}{a_k - a_j}$.
Pour $n \geq 3$ μ est une fonction spline ayant pour nœuds $a_1, \ldots, a_n$ et à support $[a_1, a_n]$. Sa restriction sur chacun des intervalles $[a_i, a_{i+1}]$ est une fonction polynome de degr $\leq n-2$, et μ est de classe C^{n-3}.

$$q_{\kappa,a}(z) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(z-a_i)},$$

$supp([q_{\kappa,a}]) = \{a_1, \ldots, a_n\}.$

$$q_{\kappa,a} = \sum_{j=1}^{n} c_j \frac{1}{z-a_j}, \quad \text{avec} \quad c_j = \prod_{k \neq j} \frac{1}{a_k - a_j}.$$

$$[q_{\kappa,a}] = -2i\pi \sum_{j=1}^{n} c_i \delta_{a_j}.$$

$$\mu = (n-1)!\, \check{Y}_{n-1} \star \Big(\sum_{j=1}^{n} c_j \delta_{a_j} \Big).$$

Comme

$$\check{Y}_{n-1} \star \delta_a = \frac{1}{(n-2)!}(a-x)_+^{n-2},$$

$$\mu(x) = (n-1)\sum_{a_j \geq x} c_j (a_j - x)^{n-2}.$$

• $\mathbb{F} = \mathbb{H}$, $\kappa_i = 2$,

$$\mu(x) = (2n-1) \sum_{\{j/a_j > x\}} \left(c_j (a_j - x)^{2n-2} + (2n-2) d_j (a_j - x)^{2n-3}\right)$$

Preuve.

$$q_{\kappa,a}(z) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(z-a_i)^2}$$

$supp([q_{\kappa,a}]) = \{a_1, \ldots, a_n\}$.

$$q_{\kappa,a}(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{z-a_j} + \sum_{j=1}^{n} \frac{d_j}{(z-a_j)^2},$$

donc

$$[q_{\kappa,a}] = -2i\pi \sum_{j=1}^{n} c_j \delta_{a_j} + d_j \delta'_{a_j}.$$

Comme

$$\check{Y}_{2n-1}\star\delta_a = \frac{1}{(2n-2)!}(a-x)_+^{2n-2} \quad \text{et} \quad \check{Y}_{2n-1}\star\delta_a^{'} = \frac{1}{(2n-3)!}(a-x)_+^{2n-3},$$

$$\mu(x) = (2n-1)\sum_{\{j/a_j>x\}}(c_j(a_j-x)^{2n-2} + (2n-2)d_j(a_j-x)^{2n-3}).$$

La restriction de μ sur chacun des intervalles $[a_i, a_{i+1}]$ est une fonction polynome de degr $\leq 2n-2$, et μ est de classe C^{2n-4}.

- $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $\kappa_i = \frac{1}{2}$.

$$[q_{\kappa,a}](x) = -2i\sin(\frac{\pi}{2}\sharp\{a_k > x\})\prod_{j=1}^{n}|x-a_i|^{-\frac{1}{2}}$$

$$\mu(x) = \frac{n-2}{2\pi}\int_x^{a_n}(s-x)^{\frac{n}{2}-2}\sin(\frac{\pi}{2}\sharp\{a_k > s\})\prod_{j=1}^{n}|s-a_i|^{-\frac{1}{2}}ds$$

Si n est pair, $n = 2m$, $n \geq 4$,

$$[q_{\kappa,a}](x) = -2i\sum_{j=1}^{m}\frac{(-1)^{m-j}}{\sqrt{\prod_{i=1}^{n}|x-a_i|}}\chi_{]a_{2j-1},a_{2j}[}(x).$$

$$\mu(x) = \frac{n-2}{2\pi}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{m-j}\int_x^{a_n}\frac{(s-x)^{m-2}}{\sqrt{\prod_{i=1}^{n}|s-a_i|}}\chi_{]a_{2j-1},a_{2j}[}(s)ds$$

.

- Si $0 < \kappa_i < 1$,

$$[q_{\kappa,a}](x) = -2i\sin(\pi \sum_{\{j|a_j>x\}} \kappa_j) \prod_{j=1}^{n} |x-a_j|^{-\kappa_j}$$

pour $\theta := \kappa_1 + \cdots + \kappa_n = 1$, (Cifarelli-Regazzini)
$\check{Y}_{1-\theta} = \delta_0$, donc

$$\mu(x) = \frac{1}{\pi}\sin(\pi \sum_{\{j|a_j>x\}} \kappa_j) \prod_{j=1}^{n} |x-a_j|^{-\kappa_j}$$

Pour $\theta > 1$, on suppose que $a_1, \ldots, a_n$ sont distincts

$$\mu(x) = \frac{\theta-1}{\pi}\int_x^{a_n} (s-x)^{\theta-2}(\sin(\pi \sum_{\{j|a_j>s\}} \kappa_j) \prod_{i=1}^{n} |s-a_i|^{-\kappa_i})ds.$$

.