Potentiels de Riesz et fonction maximale fractionnaire dans le cadre de la transformation de Dunkl

Sallem Hassani

Plan

- Introduction.

Plan

- Introduction.
- Potentiels de Riesz et fonction maximale fractionnaire associés à la transformation de Dunkl.

Introduction

Système de racines

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$, muni du produit scalaire $< .,. >$. Pour $\alpha \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$, on définit la réflexion par rapport à l'hyperplan H_α orthogonal au vecteur α par

$$\sigma_\alpha(x) = x - 2\frac{< x, \alpha >}{\|\alpha\|^2}\alpha, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

où $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$.

Système de racines

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$, muni du produit scalaire $< .,. >$. Pour $\alpha \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$, on définit la réflexion par rapport à l'hyperplan H_α orthogonal au vecteur α par

$$\sigma_\alpha(x) = x - 2\frac{< x, \alpha >}{\|\alpha\|^2}\alpha, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

où $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$.

Par définition un système de racines $\mathscr{R}$ est un sous ensemble de $\mathbb{R}^d$ qui satisfait les conditions suivantes :

- $\mathscr{R}$ est fini, ne contient pas 0.
- $\mathscr{R} \cap \mathbb{R}\alpha = \{\pm\alpha\}, \alpha \in \mathscr{R}$.
- $\sigma_\alpha(\mathscr{R}) = \mathscr{R}, \alpha \in \mathscr{R}$.

Système de racines

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$, muni du produit scalaire $< .,. >$. Pour $\alpha \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$, on définit la réflexion par rapport à l'hyperplan H_α orthogonal au vecteur α par

$$\sigma_\alpha(x) = x - 2\frac{< x, \alpha >}{\|\alpha\|^2}\alpha, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

où $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$.
Par définition un système de racines $\mathscr{R}$ est un sous ensemble de $\mathbb{R}^d$ qui satisfait les conditions suivantes :

- $\mathscr{R}$ est fini, ne contient pas 0.
- $\mathscr{R} \cap \mathbb{R}\alpha = \{\pm\alpha\}, \alpha \in \mathscr{R}$.
- $\sigma_\alpha(\mathscr{R}) = \mathscr{R}, \alpha \in \mathscr{R}$.

Pour $\beta \in \mathbb{R}^d \setminus \cup_{\alpha \in \mathscr{R}} H_\alpha$, on appelle sous système de racines positif, l'ensemble

$$\mathscr{R}_+ = \{\alpha \in \mathscr{R}, < \alpha, \beta > \in \mathbb{R}_+\}.$$

L'ensemble $\{\sigma_\alpha, \alpha \in \mathscr{R}_+\}$ engendre un sous groupe fini G du groupe orthogonal $O(d)$, G est dit groupe de réflexion associé au système de racines $\mathscr{R}$.

L'ensemble $\{\sigma_\alpha, \alpha \in \mathscr{R}_+\}$ engendre un sous groupe fini G du groupe orthogonal $O(d)$, G est dit groupe de réflexion associé au système de racines $\mathscr{R}$.
Une fonction $\kappa : \alpha \to \kappa_\alpha$ définie sur $\mathscr{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ est dite fonction de multiplicité si elle est G invariante.

Opérateurs de Dunkl

On considère les opérateurs différentiels et aux différences T_j, $1 \leq j \leq d$ sur $\mathbb{R}^d$, associés au groupe de réflexion G sur $\mathbb{R}^d$ avec un système de racines positif $\mathscr{R}_+$ et une fonction de multiplicité κ, introduits par C. F. Dunkl en 1989 et appelés opérateurs de Dunkl. Ils sont définis pour $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^d)$

$$T_j f(x) = \partial_j f(x) + \sum_{\alpha \in \mathscr{R}_+} \kappa_\alpha \frac{f(x) - f(x\sigma_\alpha)}{< x, \alpha >} < \alpha, e_j >, \quad 1 \leq j \leq d,$$

où ∂_j désigne la dérivée partielle et $e_1, ..., e_d$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$.

Opérateur d'entrelacement V_κ (C. F. Dunkl 1991)

Il existe un unique isomorphisme V_κ de l'espace des polynômes homogènes $\mathscr{P}_n$ sur $\mathbb{R}^d$ de degré n dans lui même satisfaisant la relation de permutation

$$T_j V_\kappa = V_\kappa \partial_j, \quad j = 1, ..., d, \qquad V_\kappa(1) = 1.$$

Représentation intégrale de V_κ

Théorème (M. Rösler 1999)

Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, il existe une mesure de probabilité μ_x sur $\mathbb{R}^d$ telle que

$$V_\kappa f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) d\mu_x(y).$$

Représentation intégrale de V_κ

Théorème (M. Rösler 1999)

Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, il existe une mesure de probabilité μ_x sur $\mathbb{R}^d$ telle que

$$V_\kappa f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)d\mu_x(y).$$

Théorème (Y. Xu 1997)

Dans le cas où $G = \mathbb{Z}_2^d$, on a

$$V_\kappa f(x) = \int_{[-1,1]^d} f(x_1t_1, ..., x_dt_d) \prod_{j=1}^{d} M_{\kappa_j}(1+t_j)(1-t_j^2)^{\kappa_j-1}dt,$$

où $M_{\kappa_j} = \frac{\Gamma(\kappa_j+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\kappa_j)}$.

Noyau de Dunkl E_κ

Définition

Le noyau de Dunkl E_κ est le transformé par V_κ du noyau exponentiel classique. Il est donné par

$$E_\kappa(x, y) = V_\kappa(e^{<.,y>})(x), \qquad x, y \in \mathbb{R}^d.$$

Noyau de Dunkl E_κ

Définition

Le noyau de Dunkl E_κ est le transformé par V_κ du noyau exponentiel classique. Il est donné par

$$E_\kappa(x,y) = V_\kappa(e^{<.,y>})(x), \qquad x, y \in \mathbb{R}^d.$$

En dimension 1, E_κ s'exprime en termes des fonctions de Bessel.

$$E_\kappa(x,y) = j_{\kappa-\frac{1}{2}}(ixy) + \frac{xy}{2\kappa+1} j_{\kappa+\frac{1}{2}}(ixy),$$

où

$$j_\alpha(z) = 2^\alpha \Gamma(\alpha+1)\frac{J_\alpha(z)}{z^\alpha} = \Gamma(\alpha+1)\sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{(z/2)^{2n}}{n!\Gamma(n+\alpha+1)},$$

est la fonction de Bessel normalisée.

Transformation de Dunkl

La transformation de Dunkl $\mathscr{F}_\kappa$ est définie pour $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ convenable par

$$\mathscr{F}_\kappa f(y) = c_h \int_{\mathbb{R}^d} f(x) E_\kappa(x, -iy) h_\kappa^2(x) dx, \qquad y \in \mathbb{R}^d,$$

où h_κ est la fonction poids homogène de degré $\gamma_\kappa = \sum_{\alpha \in \mathscr{R}_+} \kappa(\alpha)$

définie sur $\mathbb{R}^d$ par

$$h_\kappa(x) = \prod_{\alpha \in \mathscr{R}_+} | < \alpha, x > |^{\kappa(\alpha)},$$

et

$$c_h^{-1} = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{\|x\|^2}{2}} h_\kappa^2(x) dx.$$

Propriétés de $\mathscr{F}_\kappa$

Théorème (C. F. Dunkl 1992, M.F.E. De Jeu 1993)

- *Pour tout* $f \in L^1(\mathbb{R}^d, h_\kappa^2)$,

$$\|\mathscr{F}_\kappa f\|_{\kappa,\infty} \leq \|f\|_{\kappa,1}.$$

où $\|.\|_{\kappa,p}$ *est la norme usuelle de l'espace* $L^p(\mathbb{R}^d, h_\kappa^2)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Propriétés de $\mathscr{F}_\kappa$

Théorème (C. F. Dunkl 1992, M.F.E. De Jeu 1993)

- *Pour tout* $f \in L^1(\mathbb{R}^d, h_\kappa^2)$,

$$\|\mathscr{F}_\kappa f\|_{\kappa,\infty} \leq \|f\|_{\kappa,1}.$$

où $\|.\|_{\kappa,p}$ *est la norme usuelle de l'espace* $L^p(\mathbb{R}^d, h_\kappa^2)$, $1 \leq p \leq \infty$.

- *(Formule d'inversion) Soit* f *et* $\mathscr{F}_\kappa f$ *sont dans* $L^1(\mathbb{R}^d, h_\kappa^2)$ *on a*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} E_\kappa(ix, y)\mathscr{F}_\kappa f(y) h_\kappa^2(y) dy, \quad p.p.\ x \in \mathbb{R}^d.$$

Propriétés de $\mathscr{F}_\kappa$

Théorème (C. F. Dunkl 1992, M.F.E. De Jeu 1993)

- *Pour tout* $f \in L^1(\mathbb{R}^d, h_\kappa^2)$,

$$\|\mathscr{F}_\kappa f\|_{\kappa,\infty} \leq \|f\|_{\kappa,1}.$$

  où $\|.\|_{\kappa,p}$ *est la norme usuelle de l'espace* $L^p(\mathbb{R}^d, h_\kappa^2)$, $1 \leq p \leq \infty$.

- *(Formule d'inversion) Soit* f *et* $\mathscr{F}_\kappa f$ *sont dans* $L^1(\mathbb{R}^d, h_\kappa^2)$ *on a*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} E_\kappa(ix, y)\mathscr{F}_\kappa f(y) h_\kappa^2(y) dy, \quad p.p.\ x \in \mathbb{R}^d.$$

- *(Théorème de Plancherel) La transformation de Dunkl est une isométrie de* $L^2(\mathbb{R}^d, h_\kappa^2)$.

Opérateur de translation de Dunkl (généralisée)

Définition

L'opérateur de translation de Dunkl τ_y *est défini sur* $L^2(\mathbb{R}^d, h_\kappa^2)$ *par l'équation*

$$\mathscr{F}_\kappa(\tau_y f)(x) = E_\kappa(y, -ix)\mathscr{F}_\kappa f(x), \qquad x \in \mathbb{R}^d.$$

Opérateur de translation de Dunkl (généralisée)

Définition

L'opérateur de translation de Dunkl τ_y *est défini sur* $L^2(\mathbb{R}^d, h_\kappa^2)$ *par l'équation*

$$\mathscr{F}_\kappa(\tau_y f)(x) = E_\kappa(y, -ix)\mathscr{F}_\kappa f(x), \qquad x \in \mathbb{R}^d.$$

Remarque : Pour le moment une formule explicite pour l'opérateur de translation est connue seulement dans deux cas :

- $G = \mathbb{Z}_2^d$ (M. Rösler, 1994).
- f est une fonction radiale (M. Rösler, 2003).

Propriétés de bornitude de l'opérateur τ_x

Théorème (S. Thangavelu et Y. Xu 2005)

- *Pour* $f \in L^p(\mathbb{R}^d, h_\kappa^2)$ *radiale,* $1 \leq p \leq 2$ *on a*

$$\|\tau_x f\|_{\kappa,p} \leq \|f\|_{\kappa,p}.$$

Propriétés de bornitude de l'opérateur τ_x

Théorème (S. Thangavelu et Y. Xu 2005)

- *Pour* $f \in L^p(\mathbb{R}^d, h_\kappa^2)$ *radiale,* $1 \leq p \leq 2$ *on a*

$$\|\tau_x f\|_{\kappa,p} \leq \|f\|_{\kappa,p}.$$

- *Soit* $G = \mathbb{Z}_2^d$*. Pour* $f \in L^p(\mathbb{R}^d, h_\kappa^2)$*,* $1 \leq p \leq \infty$ *on a*

$$\|\tau_x f\|_{\kappa,p} \leq c\|f\|_{\kappa,p}.$$

Produit de convolution $*_\kappa$

Définition

Le produit de convolution de Dunkl $*_\kappa$ de deux fonctions f et g dans $L^2(\mathbb{R}^d, h_\kappa^2)$ est donné par

$$f *_\kappa g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \tau_x f(-y) g(y) h_\kappa^2(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Produit de convolution $*_\kappa$

Définition

Le produit de convolution de Dunkl $*_\kappa$ de deux fonctions f et g dans $L^2(\mathbb{R}^d, h_\kappa^2)$ est donné par

$$f *_\kappa g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \tau_x f(-y) g(y) h_\kappa^2(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Ce produit de convolution est commutatif et pour $f, g \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\mathscr{F}_\kappa(f *_\kappa g) = \mathscr{F}_\kappa(f)\mathscr{F}_\kappa(g).$$

Potentiels de Riesz et fonction maximale fractionnaire associés à la transformation de Dunkl

Potentiels de Riesz et fonction maximale fractionnaire associés à la transformation de Dunkl

Riesz Potentials and fractional maximal function for the Dunkl transform

(Avec S. Mustapha et M. Sifi)

Potentiels de Riesz

Définition

Pour $0 < \alpha < 2\gamma_\kappa + d$, le potentiel de Riesz $I_\alpha^\kappa f$ est défini sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ par

$$I_\alpha^\kappa f(x) = (d_\kappa^\alpha)^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\tau_y f(x)}{\|y\|^{2\gamma_\kappa+d-\alpha}} h_\kappa^2(y)dy,$$

où

$$d_\kappa^\alpha = 2^{-\gamma_\kappa - d/2+\alpha} \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\gamma_\kappa + \frac{d-\alpha}{2})}.$$

Potentiels de Riesz

Définition

Pour $0 < \alpha < 2\gamma_\kappa + d$*, le potentiel de Riesz* $I_\alpha^\kappa f$ *est défini sur* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ *par*

$$I_\alpha^\kappa f(x) = (d_\kappa^\alpha)^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\tau_y f(x)}{\|y\|^{2\gamma_\kappa + d - \alpha}} h_\kappa^2(y) dy,$$

où

$$d_\kappa^\alpha = 2^{-\gamma_\kappa - d/2 + \alpha} \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\gamma_\kappa + \frac{d-\alpha}{2})}.$$

Question

Comment agit I_α^κ sur les espaces $L^p(\mathbb{R}^d, h_\kappa^2)$ pour $1 \leq p < \infty$?

Y. Xu et S. Thangavelu ont montré que la condition $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{2\gamma_\kappa + d}$ est suffisante pour assurer une inégalité de Hardy Littlewood Sobolev pour I_α^κ dans le cas où $G = \mathbb{Z}_2^d$ ou dans le cas des fonctions radiales et $p \leq 2$. Ce résultat est restreint à ces deux cas à cause de manque d'information sur la bornitude de l'opérateur de translation.

Y. Xu et S. Thangavelu ont montré que la condition $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{2\gamma_\kappa + d}$ est suffisante pour assurer une inégalité de Hardy Littlewood Sobolev pour I_α^κ dans le cas où $G = \mathbb{Z}_2^d$ ou dans le cas des fonctions radiales et $p \leq 2$. Ce résultat est restreint à ces deux cas à cause de manque d'information sur la bornitude de l'opérateur de translation.

Objectif

Généraliser ce résultat pour tous les groupes de réflexions G.

Théorème

Soit α un réel tel que $0 < \alpha < 2\gamma_\kappa + d$, (p, q) une paire de réels telle que $1 \leq p < q < \infty$ et $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{\alpha}{2\gamma_\kappa + d}$. Alors :

- Si $p > 1$, alors $f \to I_\alpha^\kappa f$ se prolonge en un opérateur borné de $L^p(\mathbb{R}^d, h_\kappa^2)$ dans $L^q(\mathbb{R}^d, h_\kappa^2)$ i.e.

$$\|I_\alpha^\kappa f\|_{\kappa,q} \leq A_{p,\alpha}\|f\|_{\kappa,p}, \qquad f \in L^p(\mathbb{R}^d, h_\kappa^2),$$

  où $A_{p,\alpha} > 0$ dépend seulement de p et α.
- Si $p = 1$, $f \to I_\alpha^\kappa f$ est de type faible $(1, q)$ i.e.

$$\int_{\{x:\quad |I_\alpha^\kappa f(x)|>\lambda\}} h_\kappa^2(x)dx \leq A_\alpha \left(\frac{\|f\|_{\kappa,1}}{\lambda}\right)^q, \qquad f \in L^1(\mathbb{R}^d, h_\kappa^2),$$

  où $A_\alpha > 0$ dépend seulement de α.

Idée de la démonstration

- Prolongement de $f \to I_\alpha^\kappa f$ pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^d, h_\kappa^2)$, $p \geq 1$:

Comme

$$\|y\|^{-a} = \frac{1}{\Gamma(\frac{a}{2})} \int_0^\infty s^{\frac{a}{2}} e^{-s\|y\|^2} \frac{ds}{s}, \qquad y \in \mathbb{R}^d, \quad a > 0.$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^d} \tau_y f(x) e^{-s\|y\|^2} h_\kappa^2(y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \tau_x(e^{-s\|y\|^2})(y) h_\kappa^2(y) dy$$

Idée de la démonstration

- Prolongement de $f \longrightarrow I_\alpha^\kappa f$ pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^d, h_\kappa^2)$, $p \geq 1$:

Comme

$$\|y\|^{-a} = \frac{1}{\Gamma(\frac{a}{2})} \int_0^\infty s^{\frac{a}{2}} e^{-s\|y\|^2} \frac{ds}{s}, \qquad y \in \mathbb{R}^d, \quad a > 0.$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^d} \tau_y f(x) e^{-s\|y\|^2} h_\kappa^2(y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \tau_x(e^{-s\|y\|^2})(y) h_\kappa^2(y) dy$$

on obtient

$$\begin{aligned} I_\alpha^\kappa f(x) &= \frac{2^{\gamma_\kappa + \frac{d}{2} - \alpha}}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_0^\infty s^{\gamma_\kappa + \frac{d-\alpha}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \tau_x(e^{-s\|y\|^2})(y) h_\kappa^2(y) dy \frac{ds}{s} \\ &= S_1 f(x) + S_2 f(x), \end{aligned}$$

$$S_1 f(x) = \frac{2^{\gamma_\kappa + \frac{d}{2} - \alpha}}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_0^\sigma s^{\gamma_\kappa + \frac{d-\alpha}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \tau_x(e^{-s\|y\|^2})(y) h_\kappa^2(y) dy \frac{ds}{s},$$

$$S_2 f(x) = \frac{2^{\gamma_\kappa + \frac{d}{2} - \alpha}}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_\sigma^\infty s^{\gamma_\kappa + \frac{d-\alpha}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \tau_x(e^{-s\|y\|^2})(y) h_\kappa^2(y) dy \frac{ds}{s},$$

le paramètre σ sera choisi convenablement par la suite.

$$S_2 f(x) = \frac{2^{\gamma_\kappa + \frac{d}{2} - \alpha}}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_\sigma^\infty s^{\gamma_\kappa + \frac{d-\alpha}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \tau_x(e^{-s\|y\|^2})(y) h_\kappa^2(y) dy \frac{ds}{s},$$

le paramètre σ sera choisi convenablement par la suite.
Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d, h_\kappa^2)$ telle que $\|f\|_{\kappa,p} = 1$ et $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{\alpha}{2\gamma_\kappa + d}$,

$$\textit{Interpolation complexe} \implies \|S_1 f\|_\infty \leq A\sigma^{\frac{1}{2}(\frac{2\gamma_\kappa + d}{p} - \alpha)}.$$

$$\textit{Lemme de Shur} \implies \|S_2 f\|_{\kappa,p} \leq B\sigma^{-\frac{\alpha}{2}}. \qquad (1)$$

$$S_2f(x) = \frac{2^{\gamma_\kappa+\frac{d}{2}-\alpha}}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}\int_\sigma^\infty s^{\gamma_\kappa+\frac{d-\alpha}{2}}\int_{\mathbb{R}^d} f(y)\tau_x(e^{-s\|y\|^2})(y)h_\kappa^2(y)dy\frac{ds}{s},$$

le paramètre σ sera choisi convenablement par la suite.
Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d, h_\kappa^2)$ telle que $\|f\|_{\kappa,p} = 1$ et $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{\alpha}{2\gamma_\kappa + d}$,

$$\textit{Interpolation complexe} \implies \|S_1f\|_\infty \leq A\sigma^{\frac{1}{2}(\frac{2\gamma_\kappa+d}{p}-\alpha)}.$$

$$\textit{Lemme de Shur} \implies \|S_2f\|_{\kappa,p} \leq B\sigma^{-\frac{\alpha}{2}}. \tag{1}$$

- Estimation faible : les considérations précédentes permettent d'obtenir une estimation faible. En effet, on choisit σ de sorte que

$$\int_{\{x:\quad |S_1 f(x)| > \frac{\lambda}{2}\}} h_\kappa^2(x)dx = 0, \quad \lambda > 0$$

i.e.

$$A\sigma^{\frac{1}{2}(\frac{2\gamma_\kappa + d}{p} - \alpha)} = \frac{\lambda}{2}. \tag{2}$$

En combinant (1) et (2) et le fait que $q = \dfrac{p(2\gamma_\kappa + d)}{2\gamma_\kappa + d - \alpha p}$ et $\|f\|_{\kappa,p} = 1$ on aboutit à l'estimation,

$$\int_{\{x:\quad |I_\alpha^\kappa f(x)| > \lambda\}} h_\kappa^2(x)dx \leq C_{p,\alpha}\left(\frac{\|f\|_{\kappa,p}}{\lambda}\right)^q.$$

$$\int_{\{x:\quad |S_1 f(x)|>\frac{\lambda}{2}\}} h_\kappa^2(x)dx = 0, \quad \lambda > 0$$

i.e.

$$A\sigma^{\frac{1}{2}(\frac{2\gamma_\kappa+d}{p}-\alpha)} = \frac{\lambda}{2}. \tag{2}$$

En combinant (1) et (2) et le fait que $q = \dfrac{p(2\gamma_\kappa + d)}{2\gamma_\kappa + d - \alpha p}$ et $\|f\|_{\kappa,p} = 1$ on aboutit à l'estimation,

$$\int_{\{x:\quad |I_\alpha^\kappa f(x)|>\lambda\}} h_\kappa^2(x)dx \leq C_{p,\alpha}\left(\frac{\|f\|_{\kappa,p}}{\lambda}\right)^q.$$

- L'estimation forte découle du théorème d'interpolation de Marcinckiewcz.

Fonction maximale fractionnaire $M_{\kappa,\alpha}$

Définition

Pour $0 < \alpha < 2\gamma_\kappa + d$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^d, h_\kappa^2)$, $1 \leq p < \infty$, on définit la fonction maximale fractionnaire $M_{\kappa,\alpha}$ par

$$M_{\kappa,\alpha} f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{m_\kappa r^{d+2\gamma_\kappa-\alpha}} \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| \tau_x \chi_{B_r}(y) h_\kappa^2(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

où

$$m_\kappa = (c_h 2^{\gamma_\kappa + \frac{d}{2}} \Gamma(\gamma_\kappa + \frac{d}{2} + 1))^{\frac{\alpha}{d+2\gamma_\kappa} - 1},$$

et χ_{B_r} désigne la fonction caractéristique de la boule B_r de rayon r et de centre 0.

Corollaire

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $0 < \alpha < 2\gamma_k + d$ et (p, q) une paire de réels $1 \leq p < q < \infty$ satisfaisant $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{\alpha}{2\gamma_\kappa + d}$. Alors :

- l'opérateur maximal $M_{\kappa,\alpha}$ est borné de $L^p(\mathbb{R}^d, h_\kappa^2)$ vers $L^q(\mathbb{R}^d, h_\kappa^2)$ pour $p > 1$.
- $M_{\kappa,\alpha}$ est de type faible $(1, q)$, i.e. pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d, h_\kappa^2)$

$$\int_{\{x:\quad M_{\kappa,\alpha} f(x) > \lambda\}} h_\kappa^2(x) dx \leq C_\alpha \left(\frac{\|f\|_{\kappa,1}}{\lambda} \right)^q, \qquad \lambda > 0,$$

où $C_\alpha > 0$ dépend seulement de α.

Remarque

La condition $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{2\gamma_\kappa + d}$ est aussi nécessaire pour la bornitude de $M_{\kappa,\alpha}$ de $L^p(\mathbb{R}^d, h_\kappa^2)$ dans $L^q(\mathbb{R}^d, h_\kappa^2)$ pour $p > 1$ (le cas où $p = 1$, une estimation faible pour $M_{\kappa,\alpha}$ est satisfaite).

Merci pour votre attention