Topologie

Houcine Chebli **Lotfi Lassoued**

Université Virtuelle de Tunis

Mai 2009

Guide d'Etude

1 Contenu du cours

Ce cours se compose de six chapitres. Chaque chapitre est subdivisé en sections et se termine par plusieurs exercices dont la plupart sont corrigés.

- Le premier chapitre introduit la notion de norme et de distance sur un ensemble E donné qui en fait un *un espace métrique.* Plusieurs exemples de normes et de distances sont donnés, notamment sur l'ensemble $\mathbb{R}^n$ où on en distingue la norme euclidienne. On introduit alors la notion de normes (ou distances) équivalentes.
- Dans le deuxième chapitre, on étudie les propriétés topologiques d'un espace métrique. On définit les concepts de suites convergentes, d'ensemble fermés, d'ensemble ouvert, de voisinage d'un point, de partie dense et de sous-espace métrique.
- Dans le chapitre III, on introduit la notion de fonction continue entre deux espaces métriques. Elles sont caractérisées par le fait que l'image réciproque de tout fermé est fermée. On introduit aussi le concept d'homéomorphisme entre espaces métriques. L'importance du rôle imparti aux applications linéaires justifie qu'on caractérise les applications linéaires continues. On montre en particulier que toute application linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie dans un espace de dimension finie est toujours continue.
- Le quatrième chapitre traite les espaces métriques complets. Ce sont ceux tels que toute suite de Cauchy converge. On y démontre en particulier le théorème de prolongement par "densité" d'applications continues.
- Le chapitre V est consacré au concept d'espaces métriques compacts. Ce sont ceux tels qu'on puisse extraire de toute suite une sous-suite convergente. Les théorèmes caractérisant les ensembles compacts et énonçant leurs propriétés jouent par la suite un rôle très important. Les fonctions continues entre espaces métriques comapcts jouient de propriétés particulières, en particulier si f est continue et bijective entre deux espaces métriques compacts, alors sa réciproque est aussi continue.

- Le dernier chapitre est consacré à l'étude des propriétés topologiques des espaces connexes. Ce sont ceux qui n'admettent pas de partition en deux ouverts non vides. On montre en particulier que les applications continues conservent la propriété de connexité.

2 Les objectifs généraux

Le but de ce cours est de présenter et d'étudier les principaux concepts topologiques dans le cadre élémentaire des espaces métriques plutôt que dans le cadre général des espaces topologiques. Notamment, les concepts d'espaces métriques complets, d'espaces métriques compacts et d'espaces métriques connexes.

3 Les objectifs spécifiques

Au terme de ce cours, l'étudiant doit

1. Maitriser le concept de norme et de distance .
2. Etre en mesure de comparer deux distances.
3. Etudier la nature d'une suite dans un espace métrique.
4. Déterminer les valeurs d'adhérences d'une suite.
5. Maitriser les concepts d'ouvert, de fermé, de voisinage d'un point, de partie dense.
6. Etre en mesure d'exprimer la continuité d'une application au moyen d'objets topologiques.
7. Etre capable de décider si un espace métrique est complet ou non.
8. Etre capable d'exploiter le caractère complet, notamment dans l'étude des suites.
9. Maitriser le concept d'espace métrique compact.
10. Etre en mesure d'exploiter la compacité dans l'étude des fonctions continues.
11. Maitriser le concept d'espace métrique connexe.
12. Exploiter la connexité dans l'étude des fonctions continues.
13. Etre en mesure de reconnaitre qu'un espace est connexe.

4 Le public cible

Ce cours s'adresse particulièrement aux étudiants de licence de mathématiques ou mathématiques appliquées, ayant une bonne familiarité avec le calcul différentiel et intégral de fonctions d'une ou plusieurs variables et les espaces vectoriel de dimension finie, ainsi qu'aux étudiants des grandes écoles d'ingénieurs.

5 Les prérequis

Ce cours s'appuie principalement sur des connaissances de base en analyse réelle et complexe . Cependant, pour bien assimiler les divers chapitres, il est recommandé de bien connaitre les différents chapitres du cours de mathématiques de la deuxième année de licence. En particulier, les chapitres sur les suite et séries numériques, les fonctions d'une ou plusieurs variables, les espaces vectoriels de dimension finie, les applications linéaires, etc.

6 Conseils de lecture

Ce cours a été élaboré sous forme d'un texte simple, pratique et aussi autocontenu que possible. Pour les théorèmes, les auteurs ont opté pour des énoncés simples plutôt qu'optimaux. Des remarques, des exemples et des exercices apportent des illustrations ou des applications ou viennent, quelquefois, suggérer des ouvertures et extensions plus sophistiquées. Par conséquent, le lecteur est invité à bien étudier les exemples présentés et à essayer de résoudre par lui même les exercices proposés. Le recours systématique au corrigé n'est pas conseillé et doit se faire plutôt en dernière issue. Dans le but de faciliter la comprhéhension, des liens sont insérés dans le texte et renvoient aux définitions ou aux résultats originaux de ce cours ou, éventuellement d'autres cours de l'Université Virtuelle de Tunis. Enfin, le lecteur trouvera un complément appréciable dans les références que nous indiquons ci-dessous et qui ont d'ailleurs largement inspiré ce cours.

7 Références

1. Aubin J.-P. (1994) Initiation à l'Analyse Appliquée, Masson.
2. Bourbaki N. (1990) Topologie Générale, Masson.
3. Brezis H. (1992) Analyse Fonctionnelle, Masson.

4. Choquet G. (1992) Cours de Topologie, Masson.
5. Dixmier J. (1981) Topologie Générale, Presses Universitaires de France.
6. Rudin W. (1995) Analyse Fonctionnelle, Ediscience international, Paris.
7. Schwartz L. (1980) Topologie Générale et Analyse Fonctionnelle, Herman.

Table des matières

Chapitre 1

Espaces métriques

1.1 Normes sur un espace vectoriel

Définition 1.1.1. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une norme sur E est une application $\| \ \| : E \to \mathbb{R}_+$ vérifiant pour x et y dans E et λ dans $\mathbb{K}$:*

(1) $\|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0$

(2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (l'inégalité triangulaire)

Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé un espace vectoriel normé (en abrégé evn).

De l'inégalité triangulaire, on déduit la proposition suivante

Proposition 1.1.2. *Si $\| \ \|$ est une norme sur un espace vectoriel E, alors pour tout x et tout y dans E, on a*

$$\Big| \|x\| - \|y\| \Big| \leq \|x - y\|$$

Proposition 1.1.3. *Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. L'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ est une norme sur E appelée norme euclidienne associée au produit scalaire.*

Exemple 1.1.4.

1. L'application $x \mapsto |x|$ est une norme sur $\mathbb{R}$
2. L'application $z \mapsto |z|$ est une norme sur $\mathbb{C}$
3. Dans $\mathbb{R}^n$, on définit les trois normes suivantes : si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est dans $\mathbb{R}^n$,

$$\begin{gathered} \|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|, \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2} \\ \|x\|_\infty = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|) \end{gathered} \tag{1.1}$$

On notera que $\| \|_2$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire euclidien : $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots x_ny_n$.
Sauf mention du contraire, l'espace $\mathbb{R}^n$ sera toujours muni de l'une de ces trois normes.

4. Soit $E = C([a, b], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour f et g dans cet espace,
$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,dt$$
définit un produit scalaire sur E. La norme euclidienne associée est définie par
$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2\,dt\right)^{1/2}$$
On peut définir d'autres normes sur $C([a, b], \mathbb{R})$, par exemple
$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\,dt, \quad \|f\|_\infty = \sup_{a\leq t\leq b} |f(t)|$$

5. Soit $(E_1, \| \|_1), \ldots, (E_n, \| \|_n)$ des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$ et $E = E_1\times\cdots\times E_n$ l'espace vectoriel produit. Un élément x de E s'écrit $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ où $x_i \in E_i$, $1 \leq i \leq n$. L'application définie pour x dans E par
$$\|x\| = \max(\|x_1\|_1, \ldots, \|x_n\|_n)$$
est une norme sur E appelée norme produit.

1.2 Distance - Espace métrique

Définition 1.2.1. *Une distance sur un ensemble E est une application* d *définie sur $E\times E$ à valeurs dans $[0, +\infty[$ vérifiant, pour tous x, y et z dans E*

(1) $\mathrm{d}(x, y) = 0$ *si et seulement si* $x = y$

(2) $\mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(y, x)$

(3) $\mathrm{d}(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Un espace métrique est un ensemble muni d'une distance.

Exemple 1.2.2.

Sur $\mathbb{R}$, la distance usuelle est définie par $\mathrm{d}(x, y) = |x - y|$.

Exemple 1.2.3. distance associée à une norme.

Si E est une espace vectoriel normé, alors l'application définie par

$$\mathrm{d}(x,y) = \|x-y\|$$

est une distance sur E. C'est la distance associée à la norme sur E.
Sauf mention du contraire, c'est cette distance qu'on choisit toujours sur une espace vectoriel normé.

Exemple 1.2.4. Distance discrète.

Soit E un ensemble quelconque. L'application d définie sur $E \times E$ par

$$\mathrm{d}(x,x) = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{d}(x,y) = 1 \;\text{ si }\; x \neq y$$

est une distance appelée distance discrète sur E.

Exemple 1.2.5. Espace métrique produit.

Soit $(E_1,\,\mathrm{d}_1)$, $(E_2,\,\mathrm{d}_2)\ldots(E_n,\,\mathrm{d}_n)$ des espaces métriques. On pose, pour $x = (x_1,\ldots,x_n)$ et $y = (y_1,\ldots,y_n)$ dans $E = E_1 \times \cdots E_n$:

$$\mathrm{d}_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}_i(x_i,y_i), \quad \mathrm{d}_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}_i^2(x_i,y_i)\right)^{1/2}$$

$$\mathrm{d}_\infty(x,y) = \max_{1\leq i\leq n} \mathrm{d}_i(x_i,y_i)$$

Cela définit trois distances sur l'espace produit E.
Sauf mention du contraire, l'espace produit sera toujours muni de l'une de ces trois distances.

Proposition 1.2.6. *Si E est un espace métrique, alors quels que soient x, y et a dans E, on a*

$$|\,\mathrm{d}(a,x) - \mathrm{d}(a,y)| \leq \mathrm{d}(x,y)$$

Démonstration. D'après l'inégalité triangulaire, on a

$$\mathrm{d}(a,x) \leq \mathrm{d}(a,y) + \mathrm{d}(y,x)$$

ce qui donne

$$\mathrm{d}(a,x) - \mathrm{d}(a,y) \leq \mathrm{d}(x,y).$$

Par symétrie, on montre de même que

$$\mathrm{d}(a,y) - \mathrm{d}(a,x) \leq \mathrm{d}(x,y)$$

Ces deux dernières inégalités impliquent l'inégalité cherchée. □

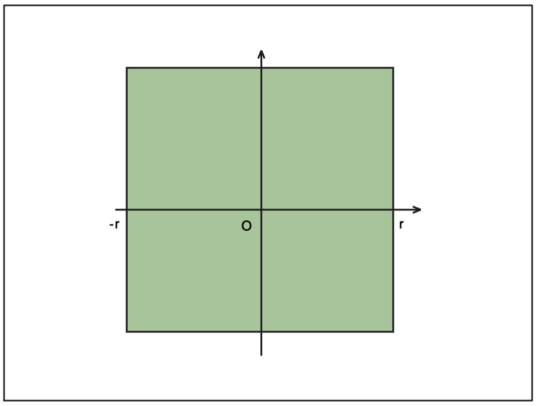

FIG. 1.1 – La boule $B(0,r)$ pour la distance d_∞.

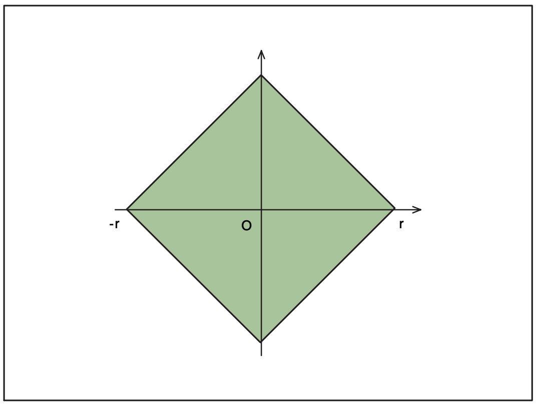

FIG. 1.2 – La boule $B(0,r)$ pour la distance d_1.

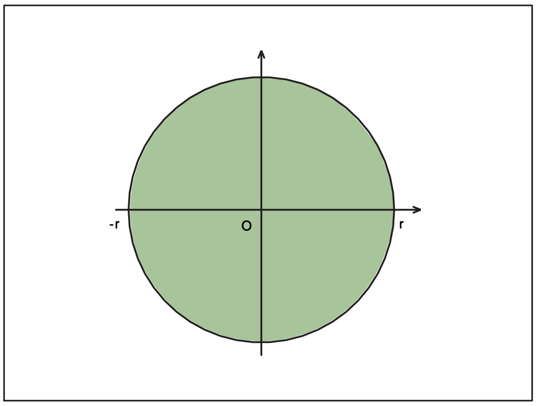

FIG. 1.3 – La boule $B(0,r)$ pour la distance d_2.

Définition 1.2.7. *Soit* (E, d) *un espace métrique, soit* a *un point de* E *et* $r > 0$. *Les ensembles suivants*

$$B(a,r) = \{x \in E \mid \mathrm{d}(a,x) < r\}$$

$$\overline{B(a,r)} = \{x \in E \mid \mathrm{d}(a,x) \leq r\}$$

$$S(a,r) = \{x \in E \mid \mathrm{d}(a,x) = r\}$$

sont appelés respectivement boule ouverte, boule fermée et sphère de centre a *et de rayon* r.

Il est clair que $\{a\} \subset B(a,r) \subset \overline{B(a,r)}$. En particulier, aucune boule n'est vide. Il n'en est pas de même des sphères.

Exemple 1.2.8.

1. Dans $\mathbb{R}$, $B(a,r) =]a-r, a+r[$
2. Si l'on désigne par d_1, d_2 et d_∞ les distances associées respectivement aux normes $\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_2$ et $\| \cdot \|_\infty$ définies par (1.1), les boules du plan de centres l'origine et de rayon $r > 0$ sont représentées par les figures 1.1, 1.2 et 1.3.

Définition 1.2.9. *Une partie* A *d'un espace métrique* (E, d) *est dite bornée s'il existe une constante* $M > 0$ *telle que*

$$\mathrm{d}(x,y) \leq M, \quad \forall x, y \in A.$$

Proposition 1.2.10. *Une partie* A *d'un espace métrique* (E, d) *est bornée si et seulement si elle est contenue dans une boule.*
Une partie A *d'un espace vectoriel normé* $(E, \| \, \|)$ *est bornée si et seulement si il existe une constante* $M > 0$ *telle que*

$$\|x\| \leq M, \quad \forall x \in A$$

1.3 Normes et distances équivalentes

Définition 1.3.1. *Deux normes* $\| \, \|_1$ *et* $\| \, \|_2$ *sur une espace vectoriel* E *sont dites équivalentes s'il existe des constantes* $\alpha > 0$ *et* $\beta > 0$ *telles que*

$$\alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1, \quad \forall x \in E$$

Deux distances d_1 *et* d_2 *sur un espace métrique* E *sont dites équivalentes s'il existe des constantes* $\alpha > 0$ *et* $\beta > 0$ *telles que*

$$\alpha \, \mathrm{d}_1(x,y) \leq \mathrm{d}_2(x,y) \leq \beta \, \mathrm{d}_1(x,y), \quad \forall x, y \in E$$

Remarque 1.3.2.

Soit E un espace vectoriel normé. La propriété : "$\| \|_1$ et $\| \|_2$ sont équivalentes" est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes sur E.
De même, si E est un espace métrique, la relation définie sur l'ensemble des distances sur E : "d_1 et d_2 sont équivalentes", est une relation d'équivalence.

Proposition 1.3.3. *Sur $E = \mathbb{R}^n$, les trois normes $\| \|_1$, $\| \|_2$ et $\| \|_\infty$ sont équivalentes et on a*

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty.$$

Démonstration. Il est clair que, pour tout $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E$, on a $|x_i| \leq \|x\|_\infty$; on en déduit que

$$\|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$$

D'autre part, on vérifie que $\|x\|_2^2 \leq \|x\|_1^2$, il s'ensuit que $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$. Enfin, il est clair que $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$. □

Notons que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$$

1.4 Exercices

Exercice 1.4.1.

Soit $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé et f un endomorphisme de E. On pose, pour tout x dans E,

$$\|x\|_1 = \|f(x)\|$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $\| \|_1$ définisse une norme sur E.

Exercice 1.4.2.

Soit n un entier naturel et $a_0,\ a_2, \dots, a_k$ des réels deux à deux distincts. On considère l'application $\| \|_k : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$\|p\|_k = \sum_{i=0}^{k} |p(a_i)|$$

A quelle condition cette application définit-elle une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$?

Exercice 1.4.3.

On considère sur $E = C([0,1], \mathbb{R})$ les deux normes définies par

$$\|f\|_\infty = \sup_{0 \leq t \leq 1} |f(t)| \quad \text{et} \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt$$

Montrer que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 1.4.4.

Pour tout $x = (x_1, x_2)$ de $\mathbb{R}^2$, on pose

$$N(x) = \sqrt{x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2}$$

Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 1.4.5.

1. Pour tout $p \in [1, +\infty[$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

   Montrer que $\| \ \|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.
2. Soit $E = C([a,b], \mathbb{R})$ et $p \in [1, +\infty[$. Pour $f \in E$, on pose

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p\, dt \right)^{1/p}$$

   Montrer que $\| \ \|_p$ est une norme sur E.

Exercice 1.4.6.

Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose

$$N(f) = \left(|f(0)|^2 + \int_0^1 |f'(t)|^2\, dt \right)^{1/2}$$

Montrer que N est une norme sur E.

Exercice 1.4.7.

Soit (E, d) un espace métrique et $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une application croissante vérifiant :

$$\phi(a+b) \leq \phi(a) + \phi(b), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}_+$$
$$\phi(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$$

1. Montrer que $\phi \circ \mathrm{d}$ est une distance sur E
2. Montrer que $\mathrm{d}_1 = \dfrac{\mathrm{d}}{1+\mathrm{d}}$ et $\mathrm{d}_2 = \mathrm{Log}(1+\mathrm{d})$ et $\mathrm{d}_3 = \inf(1, \mathrm{d})$ sont des distances sur E.

Exercice 1.4.8.

Soit (E, d) un espace métrique

1. Montrer que, pour tout $\alpha \in]0,1]$, d^α est une distance sur E
2. Montrer qu'il existe $\alpha^* = \alpha(\mathrm{d}) \in [1, +\infty]$ tel que
   - Si $0 < \alpha < \alpha^*$, alors d^α est une distance sur E
   - Si $\alpha > \alpha^*$, alors d^α n'est pas une distance sur E.
3. Déterminer α^* dans le cas où d est la distance usuelle sur $\mathbb{R}$, puis la distance discrète.

Exercice 1.4.9.

Soit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles. Pour u et v dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on pose

$$\mathrm{d}(u, v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|u_n - v_n|}{|u_n - v_n| + 1}$$

1. Montrer que d est une distance sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,
2. Montrer que $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathrm{d})$ est borné.

Exercice 1.4.10.

1. Les applications suivantes définies par

$$\mathrm{d}_1(x, y) = |\sin x - \sin y|, \qquad \mathrm{d}_2(x, y) = |x^2 - y^2|$$

   sont-elles des distances sur $\mathbb{R}$?
2. A quelle condition sur la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, l'application définie par

$$\mathrm{d}(x, y) = |f(x) - f(y)|$$

   est-elle une distance sur $\mathbb{R}$?

1.5 Correction des exercices

Exercice 1.4.1
On vérifie que, pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ et x et y dans E,

$$\|\alpha x\|_1 = |\alpha| \|x\|_1 \quad \text{et} \quad \|x + y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1$$

On vérifie aussi que $\|x\|_1 = 0$ si et seulement si $f(x) = 0$. Si bien que $\| \ \|_1$ est une norme si et seulement si l'endomorphisme f est injectif. $\square$

Exercice 1.4.2
Il est clair que, pour tout p et q dans $\mathbb{R}_n[X]$ et tout α dans $\mathbb{R}$,

$$\|\alpha p\|_k = |\alpha| \|p\|_k, \quad \|p + q\|_k \leq \|p\|_k + \|q\|_k$$

On vérifie que $\|p\|_k = 0$ si et seulement si $p(a_i) = 0$ pour $0 \leq i \leq k$, par suite :

- si $k \geq n$, cela implique $p = 0$ car un polynôme non nul de $\mathbb{R}_n[X]$ ne peut avoir plus de n racines distinctes.
- si $k < n$, $\| \ \|_k$ n'est pas une norme dans $\mathbb{R}_n[X]$ car le polynôme donné par $p(x) = (x - a_0)(x - a_1) \cdots (x - a_k)$ est non nul et $\|p\|_k = 0$.

Ainsi, $\| \ \|_k$ est une norme dans $\mathbb{R}_n[X]$ si et seulement si $k \geq n$. $\square$

Exercice 1.4.3
Pour tout $f \in E$, on a $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$. Supposons que les deux normes soient équivalentes, il existe alors $\alpha > 0$ tel que

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_\infty \leq \alpha \|f\|_1$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et f_n la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(t) = t^n$. On a $\|f_n\|_\infty = 1$ et $\|f_n\|_1 = 1/(n + 1)$ et l'inégalité

$$1 \leq \frac{\alpha}{n + 1}$$

ne peut être satisfaite pour tout $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Exercice 1.4.4
On vérifie que l'application q définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$q(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2$$

est une forme quadratique définie postitive, donc sa forme polaire associée

$$b(x, y) = x_1y_1 + (x_1y_2 + x_2y_1) + 5y_1y_2$$

définit un produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$ et par suite $N(x) = \sqrt{b(x, x)} = \sqrt{q(x)}$ définit une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 1.4.6
On pose

$$\langle f, g \rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\, dt$$

On vérifie que cela définit un produit scalaire dans E ; par suite N est une norme dans E. $\square$

Exercice 1.4.7
Posons $\delta = \phi \circ \mathrm{d}$. On a

1. a) $\delta(x,y)=0 \Longrightarrow \phi(\mathrm{d}(x,y))=0 \Longrightarrow \mathrm{d}(x,y)=0 \Longrightarrow x=y$.
   b) $\delta(x,y)=\phi(d(x,y))=\phi(\mathrm{d}(y,x))=\delta(y,x)$.
   c) Puisque $\mathrm{d}(x,y)\leq \mathrm{d}(x,z)+\mathrm{d}(z,y)$, on en déduit facilement que $\delta(x,y)\leq\delta(x,z)+\delta(z,y)$.

   Ainsi, δ est une distance sur E.
2. On a $\mathrm{d}_1=\phi_1\circ\mathrm{d}$, avec $\phi_1(t)=t/(1+t)$. On vérifie facilement que
$$\phi_1(a+b)\leq\phi_1(a)+\phi_1(b)$$
   De plus, ϕ_1 est croissante et injective. La question 1 montre alors que d_1 est une distance.
   De même, $\mathrm{d}_2=\phi_2\circ\mathrm{d}$, avec $\phi_2(t)=\mathrm{Log}(1+t)$. On vérifie facilement que ϕ_2 est croissante, injective et que
$$\phi_2(a+b)\leq\phi_2(a)+\phi_2(b)$$
   D'après la première question, d_2 est aussi une distance sur E.

Exercice 1.4.8

1. On a $\mathrm{d}^\alpha=\phi\circ\mathrm{d}$, avec $\phi(t)=t^\alpha$. Montrons que, pour tout a et b dans $\mathbb{R}_+^*$
$$(a+b)^\alpha\leq a^\alpha+b^\alpha$$
   ou encore
$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^\alpha\leq 1+\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha$$
   A cet effet, on pose $h(t)=(1+t)^\alpha-(1+t^\alpha)$, $t\geq 0$. On a
$$h'(t)=\alpha\Big[(1+t)^{\alpha-1}-t^{\alpha-1}\Big]$$
   Comme $\alpha-1<0$ et $t\leq 1+t$, $(1+t)^{\alpha-1}\leq t^{\alpha-1}$; si bien que h est décroissante. Comme $h(0)=0$, h est positive. La première question de l'exercice précédent permet de conclure que d^α est une distance sur E.
2. On pose
$$I=\{\alpha>0 \mid \mathrm{d}^\alpha \text{ est une distance dans } E\}$$
   D'après la première question, on a l'inclusion $]0,1]\subset I$.
   Montrons que I est un intervalle. Soit $\alpha\in I$ et $0<\beta<\alpha$, il s'agit de prouver que $\beta\in I$. Puisque d^α est une distance et puisque $\beta/\alpha<1$, alors $\mathrm{d}^\beta=(\mathrm{d}^\alpha)^{\beta/\alpha}$ est aussi une distance sur E. Donc I est bien un intervalle et il suffit de poser $\alpha^*=\sup I$.
3. Dans le premier cas $\alpha^*=1$, dans le deuxième cas $\alpha^*=+\infty$.

Exercice 1.4.10

1. – On a $\mathrm{d}_1(0,\pi)=0$, donc d_1 n'est pas une distance sur $\mathbb{R}$.
   – De même, d_2 n'est pas une distance sur $\mathbb{R}$, car $\mathrm{d}_2(-1,1)=0$.
   – En revanche, on peut vérifier que l'application d_3 définie par
   $$\mathrm{d}_3(x,y)=|x^3-y^3|$$
   est une distance sur $\mathbb{R}$.
2. On vérifie que l'application d définie par $\mathrm{d}(x,y)=|f(x)-f(y)|$ est une distance si et seulement si f est injective.

Chapitre 2

Topologie d'un espace métrique

2.1 Suites

Définition 2.1.1. *Soit* (E, d) *un espace métrique. On dit qu'une suite* $(x_n)_n$ *d'éléments de* E *converge dans* E *s'il existe* $\ell \in E$ *telle que*

$$\lim_{n \to +\infty} \mathrm{d}(x_n, \ell) = 0$$

On écrit alors

$$x_n \longrightarrow \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{n \to +\infty} x_n = \ell$$

Une suite (x_n) diverge si elle ne converge pas.

Proposition 2.1.2. *La limite d'une suite, si elle existe, est unique*

Démonstration. Si $x_n \longrightarrow \ell$ et $x_n \longrightarrow \ell'$, on a

$$\mathrm{d}(\ell, \ell') \leq \mathrm{d}(x_n, \ell) + \mathrm{d}(x_n, \ell')$$

En faisant tendre n vers l'infini, on en déduit que $\mathrm{d}(\ell, \ell') = 0$, c'est-à-dire $\ell = \ell'$. $\square$

Remarque 2.1.3.

Soit $E = C([a, b], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs réelles muni de la norme $\| \; \|_\infty$. Si l'on désigne par d_∞ la distance associée à cette norme, la convergence dans (E, d_∞) est la convergence uniforme.

Exemple 2.1.4.

Dans l'espace $E = C([0, 1], \mathbb{R})$, on considère la suite définie par :

$$f_n(x) = x^n$$

Cette suite ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$, donc (f_n) diverge dans (E, d_∞).
En revanche, si l'on munit E de la distance d_1 associée à la norme $\| \ \|_1$ définie par

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\, dx,$$

on a

$$\|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1}$$

donc (f_n) converge vers 0 dans (E, d_1).

Définition 2.1.5. *Soit (x_n) une suite de E. On dit qu'une suite (y_n) est une sous-suite de (x_n) s'il existe une application strictement croissante $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que*

$$y_n = x_{\phi(n)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

On notera que $\phi(n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 2.1.6. *Si (x_n) converge vers ℓ, alors toute sous-suite de (x_n) converge aussi vers ℓ.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque (x_n) converge vers ℓ, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n_0 \Longrightarrow \mathrm{d}(x_n, \ell) < \varepsilon.$$

Soit $(x_{\phi(n)})$ une sous-suite de (x_n). Puisque ϕ est strictement croissante, ce qui précède montre que

$$n \geq n_0 \Longrightarrow \phi(n) \geq \phi(n_0) \geq n_0 \Longrightarrow \mathrm{d}(x_{\phi(n)}, \ell) < \varepsilon.$$

Cela traduit la convergence de $(x_{\phi(n)})$ vers ℓ. □

Définition 2.1.7. *Soit (x_n) une suite d'un espace métrique E. On dit que ℓ est une valeur d'adhérence de (x_n) s'il existe une sous-suite de (x_n) qui converge vers ℓ.*

Exemple 2.1.8.

La suite réelle définie par $x_n = (-1)^n$ admet deux valeurs d'adhérence qui sont -1 et 1.

Proposition 2.1.9. *Soit (x_n) une suite d'un espace métrique E. Un élément $\ell \in E$ est une valeur d'adhérence de (x_n) si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in B(\ell, \varepsilon)\}$ est infini.*

Démonstration. Supposons que ℓ est une valeur d'adhérence de la suite (x_n). Il existe alors une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ qui converge vers ℓ. Soit $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que

$$n \geq n_0 \Longrightarrow x_{\phi(n)} \in B(\ell, \varepsilon)$$

On a donc l'inclusion

$$\{\phi(n) \mid n \geq n_0\} \subset \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in B(\ell, \varepsilon)\}$$

Comme l'application ϕ est strictement croissante, on en déduit que l'ensemble $\{\phi(n) \mid n \geq n_0\}$ est infini.
Inversement, supposons que pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble

$$\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in B(\ell, \varepsilon)\}$$

est infini. Pour $\varepsilon = 1$, il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_{p_0} \in B(\ell, 1)$. Pour $\varepsilon = 1/2$, il existe $p_1 > p_0$ tel que $x_{p_1} \in B(\ell, 1/2)$. Par récurrence, pour $\varepsilon = 1/(k+1)$, il existe $p_k > p_{k-1}$ tel que $x_{p_k} \in B(\ell, 1/(k+1))$. L'application $\phi : k \in \mathbb{N} \mapsto \phi(k) = p_k$ est strictement croissante et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_{\phi(k)} \in B(\ell, 1/(k+1))$. La suite $(x_{\phi(k)})$ ainsi construite est une sous-suite de (x_n) qui converge vers ℓ. □

2.2 Ensemble fermé

Définition 2.2.1. *Soit* (E, d) *un espace métrique et* F *une partie de* E. *On dit que* F *est un fermé de* E *si toute suite d'éléments de* F *qui converge dans* E*, a sa limite dans* F.

Exemples 2.2.2.

1. L'intervalle $[a, b]$ est un fermé de $\mathbb{R}$. En effet, soit (x_n) une suite dans $[a, b]$ qui converge dans $\mathbb{R}$ vers un élément $\ell \in \mathbb{R}$. On a $a \leq x_n \leq b$ pour tout n. Par passage à la limite, on obtient $a \leq \ell \leq b$.
2. L'ensemble $[a, +\infty[$ est un fermé de $\mathbb{R}$.
3. L'ensemble $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y \leq 1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$. En effet, soit (u_n) une suite d'éléments de F qui converge vers $\ell = (a, b) \in \mathbb{R}^2$. Cela veut dire, en posant $u_n = (x_n, y_n)$, que (x_n) converge vers a et (y_n) converge vers b. Comme $x_n + y_n \leq 1$ pour tout n, par passage à la limite, on aura aussi $a + b \leq 1$. Ce qui prouve que ℓ appartient à F.

Proposition 2.2.3. *Soit* (E, d) *un espace métrique.*

(1) *L'ensemble* E *et l'ensemble vide sont deux fermés de* E.

(2) *Une intersection finie ou infinie de fermés de E est un fermé de E.*

(3) *Une réunion* **finie** *de fermés de E est un fermé de E.*

Démonstration. Seule la troisième assertion nécéssite une démonstration. Pour cela, il suffit de montrer que la réunion de deux fermés de E est un fermé de E. Soient F_1 et F_2 deux fermés de E et soit (x_n) une suite de $F_1 \cup F_2$ qui converge vers $\ell \in E$. Il s'agit de montrer que ℓ appartient à $F_1 \cup F_2$. Posons, pour $i = 1, 2$,

$$P_i = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in F_i\}$$

Il est clair que l'un au moins des ensembles P_1 et P_2 est infini. On suppose par exemple que P_1 est infini. Il existe donc une application $\phi : \mathbb{N} \to P_1$ strictement croissante telle que La sous-suite $(x_{\phi(n)})$ converge vers ℓ. La suite $(x_{\phi(n)})$ est dans F_1 qui est fermé, donc sa limite ℓ appartient à F_1. Cela prouve que $\ell \in F_1 \cup F_2$. □

Remarque 2.2.4.

Une réunion infinie de fermés peut ne pas être fermée. Par exemple, dans $\mathbb{R}$

$$\bigcup_{n\geq 1} \left[\frac{1}{n}, 1\right] =]0, 1]$$

n'est pas un fermé de $\mathbb{R}$.

2.3 Ensemble ouvert

Définition 2.3.1. *Soit* O *une partie de E. On dit que* O *est un ouvert de E si son complémentaire dans E, noté $E\backslash\mathrm{O}$ ou $\complement\mathrm{O}$, est un fermé de E.*

Ainsi

$$\mathrm{O} \text{ est un ouvert de } E \Longleftrightarrow E\backslash\mathrm{O} \text{ est un fermé de } E$$

Exemples 2.3.2.

1. L'ensemble $]a, b[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, puisque

$$\mathbb{R}\backslash]a, b[=] - \infty, a] \cup [a, +\infty[$$

   est un fermé comme réunion de deux fermés.

2. L'ensemble $\mathrm{O} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y > 1\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, puisque son complémentaire $\mathbb{R}^2\backslash\mathrm{O} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Proposition 2.3.3. *Soit* (E, d) *un espace métrique*

(1) *L'ensemble vide et E sont deux ouverts de E.*

(2) *Une réunion finie ou infinie d'ouverts de E est un ouvert de E.*

(3) *Une intersection* **finie** *d'ouverts de E est un ouvert de E.*

C'est une conséquence de la proposition 2.2.3.

Remarque 2.3.4.

Une intersection infinie d'ouverts de E peut ne pas être un ouvert de E. Par exemple, dans $\mathbb{R}$

$$\bigcap_{n\geq 1} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[= \{0\}$$

n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$.

Théorème 2.3.5. *Soit (E, d) un espace métrique et O une partie de E. Les deux assertions suivantes sont équivalentes*

(1) *O est un ouvert de E*

(2) *Pour tout $a \in \mathrm{O}$, il existe $r_a > 0$ tel que $B(a, r_a) \subset \mathrm{O}$.*

Démonstration. (Laisser au lecteur). □

2.4 Voisinage

Définition 2.4.1. *On appelle voisinage d'un élément a de E toute partie V de E contenant un ouvert qui contient a.*

L'ensemble des voisinages de a sera noté $\mathcal{V}(a)$.

Exemple 2.4.2.

L'ensemble $V = [1, 5[$ est un voisinage de 3, puisque $]2, 4[$ est un ouvert contenant 3 et inclus dans V.

Exemple 2.4.3.

Tout ouvert contenant a est un voisiange de a.

Proposition 2.4.4. *Une réunion (resp. une intersection finie) de voisinages de a est un voisinage de a.*

2.5 Adhérence

Définition 2.5.1. *L'adhérence d'une partie A de E, notée $\overline{A}$, est le plus petit fermé de E contenant A.*

Proposition 2.5.2. *Soit A une partie de E.*

(1) *$\overline{A}$ est l'intersection de tous les fermés de E contenant A*

(2) *$\overline{A}$ est un fermé contenant A*

(3) *A est fermée si et seulement si $A = \overline{A}$.*

Théorème 2.5.3. *Soient (E, d) un espace métrique, A une partie de E et x un élément de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *$x \in \overline{A}$*

(2) *Pour tout voisinage V de x, $V \cap A \neq \emptyset$*

(3) *Il existe une suite (x_n) d'éléments de A qui converge vers x.*

Démonstration. (1) $\Longrightarrow$ (2) : Soit V un voisinage de x. Il existe $r > 0$ tel que la boule ouverte $B(x, r)$ soit incluse dans V. Si $A \cap B(x, r) = \emptyset$, alors $A \subset E \backslash B(x, r)$ et par suite $E \backslash B(x, r)$ est un fermé de E contenant A donc aussi $\overline{A}$. Cela implique que $x \notin \overline{A}$.
(2) $\Longrightarrow$ (3) : Par hypothèse, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A \cap B\left(x, \frac{1}{n}\right) \neq \emptyset$$

Soit $x_n \in A \cap B(x, 1/n)$; il est clair que (x_n) est une suite de A qui converge vers x.
(3) $\Longrightarrow$ (1) : Si $x \notin \overline{A}$, alors $x \in E \backslash \overline{A}$ qui est un ouvert de E. Il existe donc $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset E \backslash \overline{A}$. D'autre part, puisque $x_n \longrightarrow x$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n_0 \Longrightarrow x_n \in B(x, r)$$

Cela montre en particulier que $x_{n_0} \notin \overline{A}$ et a fortiori $x_{n_0} \notin A$. □

2.6 Intérieur

Définition 2.6.1. *L'intérieur d'une partie A de E, notée $\overset{o}{A}$, est le plus grand ouvert de E inclus dans A.*

Un point a appartenant à l'intérieur de A est dit point intérieur. On a donc

$$a \in \overset{o}{A} \Longleftrightarrow \exists r > 0 \mid B(a, r) \subset A$$

Remarque 2.6.2.

1. L'ensemble $\overset{o}{A}$ est la réunion de tous les ouverts de E inclus dans A.
2. Une partie A est un ouvert si et seulement si $\overset{o}{A} = A$.
3. Pour toute partie A de E, on a $\overset{o}{A} \subset A \subset \overline{A}$.

Définition 2.6.3. *L'ensemble $\overline{A} \backslash \overset{o}{A}$ est appelé frontière de A dans E, il est noté ∂A ou* $\mathrm{Fr}(A)$.

Exemple 2.6.4.

1. Dans $\mathbb{R}$, L'intérieur de $[a, b[$ ou de $]a, b]$ ou de $[a, b]$ est $]a, b[$.
2. L'intérieur de $\mathbb{Z}$ est l'ensemble vide. En effet, sinon il existe a et $r > 0$ tels que $]a - r, a + r[\subset \mathbb{Z}$, ce qui est impossible.

2.7 Partie dense

Définition 2.7.1. *Une partie D d'un espace métrique E est dite dense dans E si $\overline{D} = E$.*

Proposition 2.7.2. *Soit D une partie d'un espace métrique E. Les propriétés suivantes sont équivalentes*

(1) *D est dense dans E*

(2) *Pour tout $x \in E$, il existe une suite (x_n) dans D qui converge vers x*

(3) *Pour tout ouvert non vide U de E, on a $U \cap D \neq \emptyset$.*

Exemple 2.7.3.

1. $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.
2. $\mathbb{Q}^n$ est dense dans $\mathbb{R}^n$

Proposition 2.7.4. *Le groupe linéaire* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *des matrices inversibles est dense dans* $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration. Soit A une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. On doit montrer l'existence d'une suite de matrices (A_p) de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ qui converge vers A. On considère la suite définie par

$$A_p = A - \frac{1}{p} I$$

Il est clair que cette suite converge vers A, puisque

$$\|A - A_p\| = \frac{1}{p} \|I\| \longrightarrow 0, \quad (p \to +\infty)$$

La matrice $A - \frac{1}{p}I$ est inversible si,et seulement si, $1/p$ n'appartient pas au spectre de A ; comme l'ensemble

$$\left\{\frac{1}{p} \mid p \in \mathbb{N}^*\right\}$$

est infini, il existe p_0 assez grand tel que, pour $p \geq p_0$, A_p est inversible. Ainsi, la suite $(A_p)_{p \geq p_0}$, est dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et converge vers A. □

Théorème 2.7.5 (Stone-Weierstrass)**.** *Toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de fonctions polynomiales.*

Autrement dit, l'ensemble des fonctions polynomiales sur $[a, b]$ est dense dans $C([a, b], \mathbb{R})$ muni de la norme uniforme $\| \ \|_\infty$.

Démonstration. Voir l'exercice (2.9.10). □

2.8 Sous-espace métrique

Soit (E, d) un espace métrique et A une partie de E. La restriction de d à A est une distance sur A appelée distance induite par d sur A. Muni de cette distance induite, A est appelé sous-espace métrique de E.

Proposition 2.8.1. *Soit A un sous-espace métrique de (E, d) et soit X une partie de A.*

(1) *X est un ouvert de A si et seulement si il existe un ouvert O de E tel que $X = \mathrm{O} \cap A$.*

(2) *X est un fermé de A si et seulement si il existe une fermé F de E tel que $X = F \cap A$*

(3) *X est un voisinage de $a \in A$ si et seulement si il existe un voisinage V de a dans E tel que $X = V \cap A$.*

Exemple 2.8.2.

Soit $E = \mathbb{R}$ muni de la distance usuelle et soit $A = [0, 2]$. L'ensemble $X = [0, 1[$ est un ouvert de $[0, 2]$, en effet on peut écrire par exemple

$$[0, 1[=]-1, 1[\cap [0, 2]$$

2.9 Exercices

Exercice 2.9.1.

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si A est majorée, alors $\sup(A)$ appartient à $\overline{A}$.

2. Montrer que si A est minorée, alors $\inf(A)$ appartient à $\overline{A}$.

Exercice 2.9.2.

Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite d'un espace vectoriel normé E. Montrer que si (x_n) converge vers ℓ alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} = \ell.$$

Exercice 2.9.3.

Soient E et F deux espaces métriques et $E\times F$ l'espace métrique produit. Montrer que si $A\subset E$ et $B\subset F$, on a

$$\overline{A\times B} = \overline{A}\times\overline{B}, \quad (A\times B)^o = \overset{o}{A}\times\overset{o}{B}$$

$$\partial(A\times B) = (\partial A\times\overline{B})\cup(\overline{A}\times\partial B)$$

Exercice 2.9.4.

Montrer que dans un espace vectoriel normé E

$$\overline{B(a,r)} = B_f(a,r), \quad \text{et} \quad \overset{o}{B}_f(a,r) = B(a,r)$$

Ces résultats restent-ils vrais dans un espace métrique quelconque ?

Exercice 2.9.5.

Montrer que, si A est une partie convexe d'un espace vectoriel normé E, il en est de même de $\overline{A}$ et $\overset{o}{A}$.

Exercice 2.9.6.

Soit (E, d) un espace métrique, A une partie de E et x un élément de E. On pose

$$\mathrm{d}(x,A) = \inf\{\,\mathrm{d}(x,a)\mid a\in A\}$$

1. Montrer qu'il existe une suite (a_n) d'éléments de A telle que

$$\mathrm{d}(x,A) = \lim_{n\to+\infty}\mathrm{d}(x,a_n)$$

2. En déduire que x appartient à $\overline{A}$ si, et seulement si, $\mathrm{d}(x,A)=0$.

Exercice 2.9.7.

Montrer que si A est une partie d'un espace vectoriel normé E et O est un ouvert de E, alors l'ensemble $A+\mathrm{O}$ défini par

$$A+\mathrm{O} = \{a+b\mid a\in A, b\in\mathrm{O}\}$$

est un ouvert de E.

Exercice 2.9.8.

Soit E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E.

1. Déterminer $\overset{o}{F}$.
2. Montrer que $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.
3. Montrer que si F est un hyperplan de E, alors F est fermé ou bien F est dense dans E.

Exercice 2.9.9 (Les sous-groupes de $\mathbb{R}$)**.**

Soit $(G,+)$ un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ non réduit à $\{0\}$.

1. Montrer que l'ensemble $\{x \in G \mid x > 0\}$ admet une borne inférieure qu'on notera a.
2. Montrer que si $a = 0$, alors G est dense dans $\mathbb{R}$.
3. Montrer que si $a > 0$, alors $G = a\mathbb{Z}$.
4. En déduire que, pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $\alpha\mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si α/β n'appartient pas à $\mathbb{Q}$.
5. Montrer que $\{\cos n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1,1]$.
6. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\cos n)$, $n \geq 0$, est l'intervalle $[-1,1]$.
7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant 1 et $\sqrt{2}$ comme périodes. Que peut-on dire de f ?

Exercice 2.9.10.

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que l'ensemble $F = \{p(A) \mid p \in \mathbb{R}[X]\}$ est un fermé de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit (a_m) une suite réelle telle que la série $\sum a_m A^m$ converge dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On pose
$$B = \sum_{m=0}^{\infty} a_m A^m$$
Montrer qu'il existe un polynôme $p \in \mathbb{R}[X]$ tel que $B = p(A)$.

Exercice 2.9.11.

On munit l'espace $C([0,1],\mathbb{R})$ de la norme uniforme $\|\ \|_\infty$.

1. Montrer que l'ensemble L_k des fonctions k-lipschitzienne est un fermé de $C([0,1],\mathbb{R})$.
2. La fonction $f_0 : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_0(x) = \sqrt{x}$ est-elle lipschitzienne ?

3. Montrer que l'ensemble des fonctions lipschitziennes est d'intérieur vide dans $C([0,1],\mathbb{R})$.

Exercice 2.9.12.

Soit E un espace métrique, F un sous-espace métrique de E et A une partie de F. On note $\overline{A}^F$ l'adhérence de A dans F et $\overline{A}$ l'adhérence de A dans E.

1. Montrer que $\overline{A}^F = \overline{A} \cap F$
2. Montrer que si A est dense dans F et F est dense dans E, alors A est dense dans E.
3. Montrer que $\overset{o}{A} \subset \left(A^F\right)^o$. Donner un exemple montrant que cette inclusion peut être stricte.

Exercice 2.9.13 (Théorème de Stone-Weierstrass)**.**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$, avec $0 \leq k \leq n$, on note $B_{n,k}$ le polynôme de Bernstein défini par

$$B_{n,k}(x) = \binom{k}{n} x^k (1-x)^{n-k}$$

1. Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(x), \quad \sum_{k=0}^{n} kB_{n,k}(x), \quad \sum_{k=0}^{n} k(k-1)B_{n,k}(x)$$

2. En déduire la relation

$$\sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 B_{n,k}(x) = \frac{x(1-x)}{n}$$

3. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Pour $n \geq 1$, on note $B_n(f)$ le polynôme défini par

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f(k/n) B_{n,k}(x)$$

En remarquant que

$$f(x) - B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(f(x) - f(k/n)\right) B_{n,k}(x),$$

montrer que la suite de fonctions $(B_n(f))$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

4. En déduire que toute fonction f dans $C([a,b],\mathbb{C})$ est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de polynômes.

Ce dernier résultat est connu sous le nom de théorème de Stone-Weierstrass.

Exercice 2.9.14.

Soit $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\int_a^b x^n f(x)\,dx = 0$$

1. Vérifier que pour toute fonction polynomiale p, on a

$$\int_a^b p(x)f(x)\,dx = 0$$

2. En déduire, en utilisant le théorème de Stone-Weierstrass, que $f = 0$.

Exercice 2.9.15.

Soit $f \in C(\mathbb{R}_+,\mathbb{C})$ telle que $\int_0^\infty |f(t)|\,dt < \infty$. On suppose que pour $s \in \mathbb{R}_+$

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt = 0$$

On désigne par F la primitive de f qui s'annule en 0.

1. Vérifier que, pour tout $s > 0$, on a

$$\mathcal{L}(f)(s) = s\int_0^\infty F(t)e^{-st}\,dt$$

2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\int_0^1 x^{n-1}G(x)\,dx = 0$$

   où on a posé $G(x) = F(-\operatorname{Log} x)$.

3. Conclure.

Exercice 2.9.16 (Lemme de Riemann-Lebesgue)**.**

1. Montrer que si f appartient à $C^1([a,b],\mathbb{R})$, alors

$$\lim_{|\lambda|\to+\infty} \int_a^b f(t)e^{i\lambda t}\,dt = 0$$

2. En déduire que si f est dans $C([a,b],\mathbb{R})$, alors

$$\lim_{|\lambda|\to+\infty}\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}\,dt = 0$$

3. Montrer que si f est une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$, alors

$$\lim_{|\lambda|\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{i\lambda t}\,dt = 0$$

Exercice 2.9.17.

1. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Pour une matrice $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, on désigne par Δ_M le discriminant de son polynôme caractéristique.
   a) Montrer que Δ_M est une fonction continue.
   b) Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ n'est pas dense dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. On pourra montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ne peut être limite d'une suite de matrices diagonalisables de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Montrer que, pour tout $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\mathrm{Det}(e^A) = e^{\mathrm{Tr}(A)}$.

Exercice 2.9.18.

Soient a et b deux nombres réels tels que $0 < a < b < 1$. Pour tout réel c, on note f_c la fonction constante de $C([a,b],\mathbb{R})$ définie par

$$f_c(x) = c, \quad \text{pour tout } x \in [a,b]$$

L'objectif de cet exercice est de montrer que l'ensemble des fonctions polynomiales sur $[a,b]$ à coefficients entiers, $\mathbb{Z}([a,b])$ est dense dans $C([a,b],\mathbb{R})$ muni de la norme uniforme.
Soit $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tel que $0 < \varepsilon$.

1. Montrer qu'il existe un entier naturel k tel que, pour tout $x \in [a,b]$,

$$0 \leq \frac{1}{2-x^k} - \frac{1}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

2. Soit k un entier naturel fixé. Prouver qu'il existe un entier naturel m tel que si $x \in [a,b]$ alors

$$\left|\frac{1}{2-x^k} - \sum_{n=0}^{m}(x^k-1)^n\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

3. En déduire que $f_{1/2} \in \overline{\mathbb{Z}([a,b])}$.
4. Utiliser la question précédente pour montrer que si $m \in \mathbb{N}$ alors $f_{n/2^m} \in \overline{\mathbb{Z}([a,b])}$.
5. Montrer que l'ensemble
$$\left\{\frac{n}{2^m} \mid n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}\right\}$$
est dense dans $\mathbb{R}$.
6. En déduire que $f_c \in \overline{\mathbb{Z}([a,b])}$ pour tout $c \in \mathbb{R}$.
7. Justifier l'existence de $p \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\|f-p\|_\infty \leq \varepsilon/2$.
8. Conclure.

Exercice 2.9.19.

On se propose de montrer que, dans $C([0,1])$ muni de la norme uniforme, on a
$$\overline{\mathbb{Z}([0,1])} = \{f \in C([0,1]) \mid f(0), f(1) \in \mathbb{Z}\}$$

1. Montrer que si $f \in \overline{\mathbb{Z}([0,1])}$ alors $f(0)$ et $f(1)$ sont dans $\mathbb{Z}$.
Dans tout ce qui suit, n est un entier naturel non nul et $f \in C([0,1])$ tel que $f(0) = f(1) = 0$.
2. Montrer que l'application $\phi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ définie par $\phi(p) = \|p - f\|_\infty$ est continue.
3. Prouver que
$$\lim_{\|p\|_\infty \to \infty} \phi(p) = \infty$$
4. Montrer que, pour tout $r > 0$,
$$\{p \in \mathbb{R}_n[X] \mid \|p\|_\infty \leq r\}$$
est une partie compacte de $\mathbb{R}_n[X]$ muni de la norme uniforme.
5. En déduire qu'il existe $p_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que, pour tout $p \in \mathbb{R}_n[X]$,
$$\|p_n - f\|_\infty \leq \|p - f\|_\infty$$
On note désormais
$$q_n(x) = p_n(x) - xp_n(1) + (x-1)p_n(0)$$
6. Montrer que
$$\|q_n - f\|_\infty \leq 2\|p_n - f\|_\infty$$
7. Prouver que la famille $(x^k(1-x^{n-k}))_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

8. Etablir l'existence de nombres réels $a_1, \dots, a_{n-1}$ tels que

$$q_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k x^k (1-x)^{n-k}$$

9. En déduire que si

$$r_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1} E(\alpha_k) x^k (1_x)^{n-k}$$

alors $\|r_n - q_n\|_\infty \leq 1/n$.

10. Montrer que

$$\|f - r_n\| \leq \frac{1}{n} + 2\|p - f\|_\infty, \quad \forall p \in \mathbb{R}_n[X]$$

11. Conclure.

Exercice 2.9.20.

On munit $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme définie par

$$|||A||| = \sup_{X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \left(\frac{\|AX\|}{\|X\|} \right)$$

On suppose que $\|A\| < 1$.

1. Montrer que la matrice $I - A$ est inversible.
2. Soient X_0 et b deux vecteurs colonnes de $\mathbb{R}^n$. Montrer que la suite $(X_k)_{k \geq 0}$ définie par son premier terme X_0 et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, par la relation de récurrence

$$X_{k+1} = Ax_k + b$$

converge dans $\mathbb{R}^n$.

2.10 Correction des exercices

Exercice 2.9.1

1. D'après la caractérisation de la borne supérieure, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe a_ε dans A tel que

$$\sup(A) - \varepsilon < a_\varepsilon \leq \sup(A)$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $a_n \in A$ tel que

$$\sup(A) - \frac{1}{n} < a_n \leq \sup(A)$$

Ainsi, $\sup(A)$ est la limite d'une suite de A, il appartient donc à l'adhérence de A.

2. De même, on montre que $\inf(A)$ est la limite d'une suite de A et donc appartient à l'adhérence de A. $\square$

Exercice 2.9.2 On considère a suite $(y_n)_{n>0}$ définie par

$$y_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Par hypothèse, la suite (x_n) converge vers ℓ. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $\|x_n - \ell\| \leq \varepsilon/2$. On a

$$y_n - \ell = \frac{(x_1 - \ell) + \cdots + (x_{n_0-1} - \ell) + (x_{n_0} - \ell) + \cdots + (x_n - \ell)}{n}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\|y - \ell\| &\leq \frac{\|x_1 - \ell)\| + \cdots + \|x_{n_0} - \ell\|}{n} + \frac{\|x_{n_0+1} - \ell\| + \cdots + \|x_n - \ell\|}{n} \\ &\leq \frac{c}{n} + \frac{n - n_0}{n}\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

avec $c = \|x_1 - \ell\| + \cdots + \|x_{n_0} - \ell\|$. Il en résulte qu'il exite $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_1$, $\|y - n - \ell\| \leq \varepsilon$. $\square$

Exercice 2.9.3 La correction est laissée au lecteur.

Exercice 2.9.4

i) Par définition, $B(a,r) \subset B_f(a,r)$, donc $\overline{B(a,r)} \subset \overline{B_f(a,r)}$. Puisque $B_f(a,r)$ est un fermé, on a $B_f(a,r) = \overline{B_f(a,r)}$ et par suite $\overline{B(a,r)} \subset B_f(a,r)$. Soit $x \in B_f(a,r)$. Si $\|x - a\| < r$ alors x est dans $B(a,r)$ donc dans $\overline{B(a,r)}$; si $\|x-a\| = r$, alors la suite (x_n) de $B(a,r)$ définie par
$$x_n = a + (r - \frac{1}{n})\frac{x - a}{\|x - a\|}$$
converge vers x, ce qui prouve que x est dans $\overline{B(a,r)}$. On a donc l'égalité $\overline{B(a,r)} = B_f(a,r)$.

ii) L'inclusion $B(a,r) \subset B_f(a,r)$ implique que $\overset{o}{B}(a,r) \subset \overset{o}{B_f}(a,r)$. Or, $B(a,r)$ est un ouvert, $\overset{o}{B}(a,r) = B(a,r)$ et par suite $B(a,r) \subset \overset{o}{B_f}(a,r)$. Soit maintenant x dans $E\backslash B(a,r)$, c'est-à-dire $\|x - a\| \geq r$. Montrons que x ne peut pas être intérieur à $B_f(a,r)$, c'est-à-dire que pour tout $\rho > 0$, $B(x,\rho)$ n'est pas incluse dans $B_f(a,r)$. En effet, l'élément
$$y = x + \frac{\rho}{2}\frac{(x - a)}{\|x - a\|}$$

est dans $B(x,\rho)$ et
$$\|y-a\| \geq r+\frac{\rho}{2} > r$$
Ainsi, $\overset{o}{B}_f(a,r) = B(a,r)$. $\square$

Exercice 2.9.5

Soient x et y deux éléments de $\overline{A}$ et soit $\lambda \in [0,1]$. Il existe deux suites (x_n) et (y_n) de A telles que
$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y$$
Puisque A est convexe, la suite $\big((1-\lambda)x_n+\lambda y_n\big)$ est dans A et converge vers $(1-\lambda)x+\lambda y$; ce dernier est donc dans $\overline{A}$. $\square$

Exercice 2.9.6

1. D'après la caractérisation de la borne inférieure, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $a_n \in A$ tel que
$$\mathrm{d}(x,A) \leq \mathrm{d}(x,a_n) \leq \mathrm{d}(x,A)+\frac{1}{n}$$
et donc
$$\mathrm{d}(x,A) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{d}(x,a_n)$$
2. Supposons que x soit dans $\overline{A}$. Il existe une suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers x. Puisque pour tout n
$$\mathrm{d}(x,A) \leq \mathrm{d}(x,a_n)$$
par passage à la limite, on obtient $\mathrm{d}(x,A)=0$. Réciproquement, si $\mathrm{d}(x,A)=0$, la première question montre qu'il existe une suite (a_n) dans A telle que
$$0 = \mathrm{d}(x,A) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{d}(x,a_n)$$
Cela montre que (a_n) converge vers x et celui-ci est donc dans $\overline{A}$. $\square$

Exercice 2.9.7

D'une part, on a
$$A+\mathrm{O} = \bigcup_{a\in A}(a+\mathrm{O})$$
D'autre part, l'application $f : E \to E$ définie par $f(x)=x-a$ est continue et
$$f^{-1}(\mathrm{O}) = a+\mathrm{O}$$
Ainsi, $A+\mathrm{O}$ est un ouvert comme réunion d'ouverts. $\square$

Exercice 2.9.8

1. Si $F = E$, alors $\overset{o}{F} = E$. Supposons $F \neq E$ et strictement inclus dans E, nous allons montrer que l'intérieur de F est vide. Supposons le contraire et soit $a \in \overset{o}{F}$. Il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset F$. pour tout $x \in E$, l'élément $a + \frac{r}{2}\frac{x}{\|x\|}$ appartient à la boule $B(a, r)$ donc à F. Comme a est dans F et que celui-ci est un sous-espace vectoriel, on en déduit que x appartient à F cela veut dire que $F = E$; contradiction.
2. Soient x et y dans $\overline{F}$ et soient α et β deux scalaires. Il existe alors deux suites (x_n) et (y_n) de F qui convergent respectivement vers x et y. La suite $(\alpha x_n + \beta y_n)$ converge vers $\alpha x + \beta y$, ce dernier est donc dans $\overline{F}$.
3. Supposons $\overline{F} \neq F$, il existe $a \in \overline{F} \backslash F$. Comme F est un hyperplan, on a $E = \mathbb{K}a \oplus F$. Puisque $\mathbb{K}a$ et F sont inclus dans $\overline{F}$ qui, d'après la question 2, est un sous-espace vectoriel de E, on en déduit que $\mathbb{K}_a \oplus F \subset \overline{F}$ et donc $\overline{F} = E$. $\square$

Exercice 2.9.9

1. Soit x_0 un élément non nul de G, alors $-x_0$ est aussi dans G. L'ensemble G_+ défini par
$$G_+ = \{x \in G \mid x > 0\}$$
est une partie non vide de $\mathbb{R}$, minorée par 0, elle admet donc une borne inférieure a.
2. Supposons $a = 0$ et montrons que G est dense dans $\mathbb{R}$. Soient α et β deux réels avec $\alpha < \beta$; on peut supposer $0 < \alpha < \beta$. Nous allons montrer qu'il existe $g \in G$ tel que $\alpha < g < \beta$. La caractérisation de la borne inférieure permet d'affirmer l'existence d'un élément $g_0 \in G$ tel que $0 < g_0 < \beta - \alpha$, c'est-à-dire tel que
$$\frac{\beta}{g_0} - \frac{\alpha}{g_0} > 1$$
Il existe donc un entier n tel que $\alpha < ng_0 < \beta$ et l'élément $g = ng_0$ vérifie $\alpha < g < \beta$. Cela prouve que G est dense dans $\mathbb{R}$.
3. Supposons $a > 0$. On va, tout d'abord montrer que a appartient à G. Supposons que $a \notin G$, puisque $a = \inf G_+$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe g dans G_+ tel que $a < g < a + \varepsilon$. En particulier, pour $\varepsilon = a$, il existe $g_1 \in G_+$ tel que $a < g_1 < 2a$. De même, il existe $g_2 \in G_+$ tel que $a < g_2 < g_1 < 2a$. On en déduit que $g_1 - g_2$ est dans G_+ et vérifie $g_1 - g_2 < a$. Cela contredit le fait que $a = \inf G_+$.
4. $\alpha\mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z}$ est un sous-goupe de $\mathbb{R}$. Montrons qu'il est de la forme $a\mathbb{Z}$ si et seulement si α/β appartient à $\mathbb{Q}$.

Supposons qu'il existe a réel tel que $\alpha\mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z} = a\mathbb{Z}$. Il est clair que α et β sont dans $a\mathbb{Z}$, cela veut dire qu'il existe deux entiers relatifs p et q tels que $\alpha = ap$ et $\beta = aq$ et par suite

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}.$$

Réciproquement, supposons que α/β est un rationnel, il existe deux entiers relatifs p et q tels que $\alpha/\beta = p/q$. Par suite

$$\begin{aligned}\alpha\mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z} &= \{\alpha n + \beta n \mid n, m \in \mathbb{Z}\}\\ &= \left\{\frac{\beta}{q}(pn + qm) \mid n, m \in \mathbb{Z}\right\}\end{aligned}$$

Cela montre que $\alpha\mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z}$ est inclus dans $(\beta/q)\mathbb{Z}$ et par suite il n'est pas dense dans $\mathbb{R}$. On en déduit que $\alpha\mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z}$ est de la forme $a\mathbb{Z}$.

5. Soient α et β deux éléments de $[-1, 1]$ tels que $\alpha < \beta$. Il suffit de montrer qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha < \cos n < \beta$. la fonction cosinus est une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$, il existe donc a et b, dans $[0, \pi]$ tels que $a > b$ et

$$\alpha = \cos a, \quad \beta = \cos b$$

D'après la question 4, le sous-groupe $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe donc deux entiers relatifs n et m tels que

$$b < n + 2\pi m < a$$

si bien que $\cos a < \cos(n + 2\pi m) < \cos b$, c'est-à-dire $\alpha < \cos n < \beta$.

6. Soit ℓ une valeur d'adhérence de la suite $(\cos n)$. Il existe une sous-suite $(\cos(\phi(n)))$ qui converge vers ℓ. Par passage à la limite dans l'inégalité $-1 \leq \cos(\phi(n)) \leq 1$, on voit que $\ell \in [-1, 1]$.
Inversement, soit ℓ dans $[-1, 1]$. Nous allons montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\{n \in \mathbb{N} \mid \ell - \varepsilon < \cos n < \ell + \varepsilon\}$$

est infini. D'après la question 5, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\ell - \varepsilon < \cos n_1 < \ell + \varepsilon$$

Par récurrence, on montre qu'il existe une suite (n_p), $p \geq 1$, telle que

$$\ell - \varepsilon < \cos n_p < \ell + \varepsilon$$

7. Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x + 1) = f(x) \quad \text{et} \quad f(x + \sqrt{2}) = f(x)$$

Par suite, pour tout n et m dans $\mathbb{Z}$ et x dans $\mathbb{R}$,

$$f(x+n) = f(x) \quad \text{et} \quad f(x+m\sqrt{2}) = f(x)$$

On en déduit que, pour tout n et m dans $\mathbb{Z}$ et x dans $\mathbb{R}$,

$$f(x+n+m\sqrt{2}) = f(x)$$

En particulier, pour $x=0$,

$$f(n+m\sqrt{2}) = f(0), \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}$$

Le sous-groupe $\mathbb{Z}+\sqrt{2}\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ et par suite, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite (x_n) de $\mathbb{Z}+\sqrt{2}\mathbb{Z}$ qui converge vers x. Comme f est continue, par passage à la limite dans la relation $f(x_n) = f(0)$, il vient $f(x) = f(0)$. Ainsi , la fonction f est constante. $\square$

Exercice 2.9.10

1. L'ensemble F est un sous-espace vectoriel de dimension finie, il est donc complet et par suite c'est un fermé dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
2. La suite (S_m) définie par

$$S_m = \sum_{k=0}^{m} a_k A^k$$

est une suite de F qui converge vers B. Il en résulte que B est dans F et par suite il existe $p \in \mathbb{R}[X]$ tel que $B = p(A)$. $\square$

Exercice 2.9.11

1. Soit (f_n) une suite L_k qui converge dans $C([0,1],\mathbb{R})$ vers f. Il s'agit de montrer que f est dans L_k : Pour tout x, y dans $[0,1]$

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq k|x-y|$$

La suite (f_n) converge uniformément, donc simplement vers f. On fait tendre n vers l'infini dans l'inégalité ci-dessus, on en déduit que f est k-lipschitzienne.
2. Supposons que f_0 est k-lipschitzienne, cela veut dire que, pour tout x et y dans $[0,1]$

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq k|x-y|$$

En particulier, pour $y=0$ on obtient

$$1 \leq k\sqrt{x}, \quad \forall x \in [0,1]$$

Ce qui est impossible car le second membre tend vers 0 avec x.

3. Supposons que L_k est à intérieur non vide. Il existe donc $f \in L_k$ et $r > 0$ tels que $B(f,r) \subset L_k$ et ainsi, l'application $f + \frac{r}{2} f_0$ est dans $B(f,r)$. Ce qui est impossible car cette application n'est pas lipschitzienne. □

Exercice 2.9.13

1. D'après la formule du binôme

$$\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} = (x+1-x)^n = 1$$

Pour tout x et y dans $\mathbb{R}$,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} x^k y^{n-k}$$

En dérivant par rapport à x, on obtient

$$n(x+y)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{k}{n} x^{k-1} y^{n-k} \qquad (*)$$

On remplace dans cette relation y par $(1-x)$ et on multiplie par x, on obtient

$$nx = \sum_{k=0}^{n} k B_{n,k}(x)$$

On dérive membre à membre la relation $(*)$ par rapport à x puis on remplace y par $(1-x)$ et on multiplie par x^2, on obtient

$$n(n-1)x^2 = \sum_{k=0}^{n} k(k-1) B_{n,k}(x)$$

2. D'une part

$$\sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 B_{n,k}(x) = x^2 \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(x) - \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n} k B_{n,k}(x) + \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n} k^2 B_{n,k}(x)$$

D'autre part

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 B_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1) B_{n,k}(x) + \sum_{k=0}^{n} k B_{n,k}(x)$$

En utilisant la première question, il vient

$$\sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 B_{n,k}(x) = \frac{x(1-x)}{n}$$

3. Soit $\varepsilon > 0$. Il s'agit de prouver qu'il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on a

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in [0,1]$$

La fonction f étant continue sur $[0,1]$, elle y est uniformément continue, si bien qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout x et y dans $[0,1]$

$$|x-y| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Considérons les ensembles I et J définis par

$$\begin{aligned} I &= \left\{k \in \{0,1,\ldots,n\} \mid \left|x - \frac{k}{n}\right| < \alpha\right\} \\ J &= \left\{k \in \{0,1,\ldots,n\} \mid \left|x - \frac{k}{n}\right| \geq \alpha\right\}. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} |B_n(f) - f(x)| &\leq \sum_{k\in I} |f(x) - f(k/n)| B_{n,k}(x) + \sum_{k\in J} |f(x) - f(k/n)| B_{n,k}(x) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k\in I} B_{n,k}(x) + \sum_{k\in J} 2\|f\|_\infty B_{n,k}(x) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{n} B_{n,k} + 2\|f\|_\infty \sum_{k\in J} B_{n,k}(x) \end{aligned}$$

D'autre part,

$$k \in J \Longrightarrow \left|x - \frac{k}{n}\right| \geq \alpha \Longrightarrow \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \geq \alpha^2$$

si bien que

$$\sum_{k\in J} B_{n,k}(x) \leq \frac{1}{\alpha^2} \sum_{k\in J} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 B_{n,k}(x) \leq \frac{1}{\alpha^2} \frac{x(1-x)}{n}$$

et le dernier terme est majoré par $1/(\alpha^2 n)$, d'où à partir d'un certain rang n_0,

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2\|f\|_\infty}{4\alpha^2 n} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

4. Soit $\gamma : [0,1] \to [a,b]$ l'application définie par

$$\gamma(t) = (1-t)a + tb$$

L'appication γ est une bijection et $\gamma^{-1}(x) = (x-a)/(b-a)$. La fonction $f \circ \gamma$ est continue sur $[0,1]$ donc, d'après la question précédente, il existe une suite de fonctions polynomiales (p_n) qui converge uniformément vers $f \circ \gamma$. Or,

$$\sup_{t \in [0,1]} |f \circ \gamma(t) - p_n(t)| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - p_n(\gamma^{-1}(x))|$$

Ainsi, $(p_n \circ \gamma^{-1})$ est une suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément sur $[a,b]$ vers f. $\square$

Exercice 2.9.14

1. Soit $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ un polynôme,

$$\int_a^b p(x) f(x)\, dx = \sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^b x^k f(x)\, dx = 0$$

2. La fonction f étant continue sur $[a,b]$, il existe, d'après le théorème de Stone-Weierstrass, une suite de polynômes (p_n) qui converge uniformément sur $[a,b]$ vers f. Par hypothèse, on a

$$\int_a^b p_n(x) f(x)\, dx = 0, \quad \forall n.$$

La convergence uniforme sur $[a,b]$ de (p_n) vers f permet de permuter limite et intégrale dans la relation précédente, il vient alors

$$\int_a^b f^2(x)\, dx = 0$$

Cela implique que $f = 0$. $\square$

Exercice 2.9.15

1. La fonction F, primitive de f qui s'annule en 0, est une fonction bornée sur $\mathbb{R}_+$ puisque, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$|F(t)| \leq \int_0^t |f(u)|\, du \leq \int_0^{+\infty} |f(u)|\, du$$

Par intégration par parties, on en déduit

$$\int_0^{+\infty} f(s) e^{-st}\, dt = s \int_0^{+\infty} F(t) e^{-st}\, dt.$$

2. On fait le changement de variables $x = e^{-t}$, il vient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\int_0^{+\infty} F(t)e^{-nt}\,dt = \int_0^1 x^{n-1}F(-\operatorname{Log} x)\,dx = 0$$
3. La fonction G définie sur $]0,1]$ par $G(x) = F(-\operatorname{Log} x)$ est prolongeable par continuité sur $[0,1]$ car f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc, d'après l'exercice précédent, G est nulle et il s'ensuit que F est nulle et il en est de même de f. $\square$

Exercice 2.9.16

1. Puisque f est de classe C^1, une intégration par parties donne
$$\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}\,dt = \frac{1}{i\lambda}\Big[f(t)e^{i\lambda t}\Big]_{t=a}^{t=b} - \frac{1}{i\lambda}\int_a^b f'(t)e^{i\lambda t}\,dt$$
On en déduit que
$$\Big|\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}\,dt\Big| \leq \frac{1}{|\lambda|}\left(|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)|\,dt\right)$$
Le second membre tend vers 0 quand $|\lambda|$ tend vers l'infini, il en sera de même du premier membre.
2. Si f est continue sur $[a,b]$, d'après le théorème de Stone-Weierstrass, il existe une suite de fonctions polynomiales (p_n) qui converge uniformément sur $[a,b]$ vers f. Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que
$$n \geq N \Longrightarrow \|f - p_n\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$
On a
$$\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}\,dt = \int_a^b p_N(t)e^{i\lambda t}\,dt + \int_a^b (f(t) - p_N(t))e^{i\lambda t}\,dt$$
D'une part, la question 1) montre que la première intégrale du second membre tend vers 0 quand $|\lambda|$ tend vers l'infini. En particulier, il existe $A > 0$ tel que
$$|\lambda| > A \Longrightarrow \Big|\int_a^b p_N(t)e^{i\lambda t}\,dt\Big| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$
D'autre part,
$$\Big|\int_a^b f(t) - p_N(t))e^{i\lambda t}\,dt\Big| \leq (b-a)\|f - p_N\|_\infty$$
Si bien que
$$|\lambda| > A \Longrightarrow \Big|\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}\,dt\Big| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

3. Soit $\varepsilon > 0$. La fonction f étant intégrable sur $\mathbb{R}$, il existe $a > 0$ tel que
$$\int_{-\infty}^{-a} |f(t)|\,dt + \int_{a}^{+\infty} |f(t)|\,dt \le \frac{\varepsilon}{2}$$
D'après la deuxième question, il existe $A > 0$ tel que
$$|\lambda| > A \Longrightarrow \left| \int_{-a}^{a} f(t)e^{i\lambda t}\,dt \right| \le \frac{\varepsilon}{2}$$
Ainsi,
$$|\lambda| > A \Longrightarrow \left| \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{i\lambda t}\,dt \right| \le \varepsilon. \quad \square$$

Exercice 2.9.17

1. Soit $A \in \mathrm{M_n}(\mathbb{C})$. La matric A est trigonalisable dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, il existe donc $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = PTP^{-1}$ où T est une matrice triangulaire supérieure, de la forme
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \dots & * \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$
Soient $\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_n$ des réels tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$
$$\lambda_i + \frac{\alpha_i}{k} \neq \lambda_j + \frac{\alpha_j}{k} \quad \forall i \neq j$$
On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$,
$$T_p = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \frac{\alpha_1}{p} & * & \dots & * \\ 0 & \ddots & \dots & * \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \lambda_n + \frac{\alpha_n}{p} \end{pmatrix}$$
La matrice T_p admet n valeurs propres distinctes et est donc diagonalisable. De plus, il est clair que la suite (T_p) converge vers T quand p tend vers l'infini, donc la suite définie par $A_p = PT_pP^{-1}$ converge vers A quand p tend vers l'infini. Ainsi, A est limite d'une suite de matrices diagonalisables.
2. a) Notons P_M le polynôme caractéristique de M et Δ_M le discriminant de P_M. On a
$$P_M(x) = x^2 - (\mathrm{Tr}\,M)x + \mathrm{Det}\,M, \quad \Delta_M = (\mathrm{Tr}\,M)^2 - 4\,\mathrm{Det}\,M$$
L'application $M \mapsto \Delta_M$ est polynomiale par rapport aux coefficients de la matrice M, donc continue.

b) Si la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ était limite d'une suite (A_k) de matrices diagonalisables de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, d'après a), la suite des discriminants (Δ_{A_k}) convergerait vers le discriminant de A qui vaut -4. Cela est impossible car $\Delta_{A_k} \geq 0$ pour tout k.

3. Il est facile de vérifier que la relation $\mathrm{Det}(e^A) = e^{\mathrm{Tr}(A)}$ est vraie pour toute matrice diagonalisable $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Il suffit maintenant d'utiliser la question 1 et le fait que les applications $A \mapsto \mathrm{Det}(e^A)$ et $A \mapsto e^{\mathrm{Tr}(A)}$ sont continues dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. $\square$

Exercice 2.9.20

1. Si X appartient au noyau de $I - A$, alors $Ax = X$ et donc

$$\|X\| = \|AX\| \leq |||A||| \|X\|$$

Cela implique que $(1 - |||A|||)\|X\| \leq 0$ et donc $X = 0$ car $|||A||| < 1$. Ainsi, $I - A$ est inversible.

2. Puisque $I - A$ est inversible, il existe un unique $L \in \mathbb{R}^n$ tel que $L = AL + b$ et par suite

$$X_{k+1} - L = A(X_k - L)$$

. Par récurrence, il en résulte que, pour tout k, on a

$$X_k - L = A^k(X_0 - L)$$

. On en déduit alors que

$$\|X_k - L\| \leq |||A^k||| \|X_0 - L\| \leq |||A|||^k \|X_0 - L\|$$

Comme la norme de A est strictement inférieure à 1, la suite (X_k) converge vers L. $\square$

Chapitre 3

Fonctions continues

3.1 Limite d'une fonction

Soit (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques et A une partie de E. Soit $f : A \to F$ et soit $a \in \overline{A}$ et $\ell \in F$.

Définition 3.1.1. *On dit que f a pour limite ℓ au point a si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que*

$$\forall x \in A,\ \mathrm{d}(x, a) < \alpha \Longrightarrow \delta(f(x), \ell) \le \varepsilon$$

Dans ce cas, on dit aussi que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a.

Remarque 3.1.2.

(a) La limite, si elle existe, est unique. On note $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$.

(b) On peut reformuler la définition à l'aide des voisinages en disant que : f admet la limite ℓ au point a si, et seulement si, pour tout voisinage V de ℓ, il existe un voisinage U de a dans E tel que $f(U \cap A) \subset V$.

Proposition 3.1.3. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *La fonction f admet la limite ℓ au point a*

(2) *Pour toute suite (a_n) d'éléments de A convergeant vers a, la suite $(f(a_n))$ converge vers ℓ.*

Démonstration. (1) $\Longrightarrow$ (2) : Supposons que (a_n) converge vers a et soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\mathrm{d}(x, a) < \alpha \Longrightarrow \delta(f(x), \ell) \le \varepsilon$$

Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \ge n_0$, $\mathrm{d}(a_n, a) < \alpha$, et donc

$$\delta(f(a_n), \ell) \le \varepsilon$$

Ce qui traduit la convergence de la suite $(f(a_n))$ vers ℓ.
(2) $\Longrightarrow$ (1) : Par l'absurde, si $f(x)$ ne tend pas vers ℓ quand x tend vers a, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall \alpha > 0, \exists x \in A \mid \mathrm{d}(x,a) < \alpha \quad \text{et} \quad \delta(f(x),\ell) \geq \varepsilon$$

En prenant, pour chaque entier $n > 0$, $\alpha = 1/n$, on construit une suite (x_n) d'éléments de A vérifiant

$$\mathrm{d}(x_n,a) < \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \delta(f(x_n),\ell) \geq \varepsilon$$

Ce qui contredit (2). □

Exemple 3.1.4.

On prend $E = F = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{R}^*$, $a = 0$ et f la fonction définie par

$$f(x) = \cos(1/x)$$

La fonction f n'a pas de limite en 0, car la suite définie par $x_n = 1/n\pi$ converge vers 0 mais $f(x_n) = (-1)^n$ diverge.

3.2 Continuité

Définition 3.2.1. *Soient E et F deux espaces métriques. Une application $f : E \to F$ est dite continue au point $a \in E$ si*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

C'est-à-dire si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\mathrm{d}(x,a) < \alpha \Longrightarrow \delta(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

On dit que f est continue sur E si elle est continue en tout point de E.

Remarque 3.2.2.

La somme, le produit et la composée (lorsque cela a un sens) de fonctions continues sont des fonctions continues.

Exemple 3.2.3.

Soient E_1, $E_2, \ldots, E_n$ des espaces métriques et $E = E_1 \times \cdots E_n$ l'espace métrique produit.

(a) La projection d'indice i, définie pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E$ par

$$p_i(x) = x_i$$

est une application continue.

(b) Une application $f : F \to E$ qui à $x \in F$ fait correspondre

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$$

est continue si, et seulement si, pour tout i, $1 \leq i \leq n$, la fonction $p_i \circ f$ est continue.

(c) Soit $f : E = E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ une application continue et soit $a = (a_1, \ldots, a_n)$ un élément de E. Pour tout i, l'application partielle d'indice i au point a définie sur E_i par

$$f_i(t) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

est continue au point a_i.

Exemple 3.2.4. Fonctions polynomiales

On appelle fonction monôme des n variables $x_1, \ldots x_n \in \mathbb{K}$, une application f de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}$ pouvant se mettre sous la forme

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a\, x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

où a est une constante et les α_i, $1 \leq i \leq n$ sont des entiers positifs ou nuls.
On appelle fonction polynomiale des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, toute combinaison linéaire de fonctions monômes de ces variables. Ainsi, une telle fonction s'écrit

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum a_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

où la somme est finie.
L'ensemble des fonctions polynômiales des n variables x_1, $x_2, \ldots, x_n$ est noté $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.

Proposition 3.2.5. *Une fonction polynomiale de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est continue sur $\mathbb{K}^n$.*

Exemple 3.2.6.

(a) La fonction p définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$p(x_1, x_2) = x_1^3 x_2 + x_1 + 2x_2$$

est une fonction polynomiale de deux variables, donc p est continue sur $\mathbb{R}^2$.

(b) La fonction qui à une matrice $X \in \mathrm{M_n}(\mathbb{K})$ associe son déterminant est une fonction polynomiale des n^2 variables qui sont les coefficients de la matrice X. Donc, la fonction $X \mapsto \operatorname{Det} X$ est continue sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Théorème 3.2.7. *Soient E et F deux espaces métriques et $f : E \to F$ une application. Les propriétés suivantes sont équivalentes*

(1) *f est continue*

(2) *L'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert de E*

(3) *L'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé de E.*

Démonstration. (1) $\Longrightarrow$ (2) : Supposons f continue et soit Ω un ouvert de F. On doit montrer que l'ensemble

$$f^{-1}(\Omega) = \{x \in E \mid f(x) \in \Omega\}$$

est un ouvert de E. Soit $a \in f^{-1}(\Omega)$. Puisque $f(a)$ est dans l'ouvert Ω et puisque f est continue, il existe donc un ouvert U de E contenant a tel que $f(U) \subset \Omega$. Par suite

$$U \subset f^{-1}(f(U)) \subset f^{-1}(\Omega)$$

Ainsi, il existe un ouvert U contenant a tel que $U \subset f^{-1}(\Omega)$. Cela prouve que $f^{-1}(\Omega)$ est un ouvert de E.
(2) $\Longleftrightarrow$ (3) : L'équivalence résulte de la relation $f^{-1}(\complement A) = \complement\,(f^{-1}(A))$.
(2) $\Longrightarrow$ (1) : Montrons que f est continue en tout point $a \in E$. Soit V un voisinage ouvert de F contenant $f(a)$. L'ensemble $U = f^{-1}(V)$ est un ouvert contenant a et $f(U) \subset V$. □

Exemple 3.2.8.

Soit E un espace métrique, $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) L'ensemble $A = \{x \in E \mid f(x) = \alpha\}$ est une fermé de E, puisque $A = f^{-1}(\{\alpha\})$ et $\{\alpha\}$ est une fermé de E.

(b) L'ensemble $A = \{x \in E \mid f(x) > \alpha\}$ est un ouvert de E, puique $A = f^{-1}(]\alpha, +\infty[)$

(c) L'ensemble des $x \in E$ tels que $f(x) \geq \alpha$ est un fermé de E car il est égal à $f^{-1}([\alpha, +\infty[)$.

Exemple 3.2.9.

L'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ des matrices inversibles est un ouvert de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. En effet, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) = \{X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \mid \mathrm{Det}\, X \neq 0\}$, c'est donc l'image réciproque de $\mathbb{R}^*$ par l'application déterminant qui est continue et $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Remarque 3.2.10.

L'image (directe) d'un ouvert par une application continue n'est pas forcément un ouvert. Par exemple l'image de $\mathbb{R}$ par la fonction continue $x \to x^2$ est égale à $[0, +\infty[$ qui n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$.

Définition 3.2.11. *Soient E et F deux espaces métriques et $f : E \to F$.*

(1) *On dit que f est ouverte si l'image par f de tout ouvert de E est un ouvert de F.*

(2) *On dit que f est fermée si l'image de tout fermé de E est un fermé de F.*

Définition 3.2.12. *Soit $f : E \to F$.*

(1) *On dit que f est un homémorphisme si f est une bijection de E sur F et si f^{-1} est continue de F sur E.*

(2) *On dit que E et F sont homéomorphes s'il existe un homéomorphisme entre E et F.*

Exemple 3.2.13.

(a) L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$ est un homémorphisme.

(b) Plus généralement, toute fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est un homémorphisme de I sur $f(I)$.

(c) Soit E un espace vectoriel normé. Pour tout $a \in E$, l'application translation par a, notée τ_a et définie par $\tau_a(x) = x + a$ est un homémorphisme. L'homéomorphisme inverse est donné par τ_{-a}. Pour tout $\alpha \neq 0$, l'homothétie h_α définie par $h_\alpha(x) = \alpha x$ est un homémorphisme de E sur E et l'homémorphisme inverse est $h_{\alpha^{-1}}$.

Proposition 3.2.14. *Soient E et F deus espaces métriques et $f : E \to F$ une bijection continue. Les propriétés suivantes sont équivalentes*

(1) *f est ouverte*

(2) *f est fermée*

(3) *f est un homéomorphisme*

Démonstration. (1) $\Longrightarrow$ (2) : Soit A un fermé de E, alors $\complement A$ est un ouvert et (1) permet d'affirmer que $f(\complement A)$ est un ouvert. La relation $f(\complement A) = \complement\,(f(A))$ permet alors de conclure que $f(A)$ est un fermé.
(2) $\Longrightarrow$ (3) : Il s'agit de prouver que $g = f^{-1} : F \to E$ est continue. Or, si A est un fermé de E, $g^{-1}(A) = f(A)$ est un fermé de F, cela prouve bien que g est continue d'aprés le théorème (3.2.7).
(3) $\Longrightarrow$ (1) : Si A un ouvert de E, $f(A) = g^{-1}(A)$ est un ouvert de F. □

Définition 3.2.15. *Soient* (E, d) *et* (F, δ) *deux espaces métriques. Une application* $f : E \to F$ *est dite uniformément continue si, pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $\alpha > 0$ *tel que pour tout* x *et* $y \in E$

$$\mathrm{d}(x, y) < \alpha \Longrightarrow \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

On vérifie facilement que :

Proposition 3.2.16. *Toute application uniformément continue est continue.*

Définition 3.2.17. *Soient* (E, d) *et* (F, δ) *deux espaces métriques et* k *un réel positif. On dit que* $f : E \to F$ *est* k*-lipschitzienne si, pour tout* x *et tout* y *de* E

$$\delta((f(x), f(y)) \leq k\,\mathrm{d}(x, y)$$

Lorsque $k < 1$*, on dira que* f *est contractante.*

Proposition 3.2.18. *Une application* k*-lipschitzienne est uniformément continue.*

Exemple 3.2.19.

(a) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. S'il existe $k > 0$ tel que $|f'(t)| \leq k$, pour tout $t \in I$, le théorème des accroissements finis montre que

$$\forall x, y \in I, \quad |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

Cela montre que f est k-lipschitzienne.

(b) Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé. L'application $x \mapsto \|x\|$ est 1-lipschitzienne, puisque

$$\Big| \|x\| - \|y\| \Big| \leq \|x - y\|$$

(c) Soit (E, d) un espace métrique et a un élément de E. L'application $x \mapsto \mathrm{d}(x, a)$ est 1-lipschitzienne, puisque

$$|\,\mathrm{d}(x, a) - \mathrm{d}(y, a)| \leq \mathrm{d}(x, y)$$

Proposition 3.2.20. *Soit* (E, d) *un espace métrique. L'application qui à* (x, y) *associe* $\mathrm{d}(x, y)$ *est uniformément continue sur* $E \times E$*.*

Démonstration. On munit $E \times E$ de la distance définie par

$$\mathrm{d}_1((x, y), (x', y')) = \mathrm{d}(x, x') + \mathrm{d}(y, y')$$

L'inégalité triangulaire permet d'écrire

$$\begin{aligned}\Big|\,\mathrm{d}(x,y) - \mathrm{d}(x',y')\Big| &\leq |\,\mathrm{d}(x,y) - \mathrm{d}(x',y)| + |\,\mathrm{d}(x',y) - \mathrm{d}(x',y')| \\ &\leq \mathrm{d}(x,x') + \mathrm{d}(y,y') \\ &= \mathrm{d}_1((x,y),(x',y'))\end{aligned}$$

Cela prouve que $(x,y) \mapsto \mathrm{d}(x,y)$ est 1-lipschitzienne, donc uniformément continue sur $E \times E$. □

3.3 Continuité des applications linéaires

La continuité des applications linéaires fait l'objet d'une étude particulière justifiée par le théorème suivant :

Théorème 3.3.1. *Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $f : E \to F$ une application linéaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes*

(1) *f est continue*

(2) *Il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$\forall x \in E, \quad \|f(x)\| \leq c\|x\|$$

Démonstration. (1) $\Longrightarrow$ (2) : Supposons f continue sur E ; elle est en particulier continue en 0 et par suite, pour $\varepsilon = 1$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\|x\| \leq \alpha \Longrightarrow \|f(x) - f(0)\| = \|f(x)\| \leq 1$$

Soit x un élément de E, non nul. L'élément $y = \alpha x/\|x\|$ a pour norme α, donc $\|f(y)\| \leq 1$. Cela se traduit par

$$\|f(x)\| \leq \frac{1}{\alpha}\|x\|$$

Cette inégalité, évidente aussi pour $x = 0$, montre qu'on a (2) avec $c = \alpha^{-1}$.

(2) $\Longrightarrow$ (1) : La propriété (2) montre que, pour tout x et tout y dans E

$$\|f(x) - f(y)\| = \|f(x - y)\| \leq c\|x - y\|$$

Cela montre que f est c-lipschitzienne, donc continue. □

Si E et F sont deux espaces vectoriels, on désigne par $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F. Pour $f \in \mathcal{L}(E,F)$, on pose

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$$

On peut vérifier que cela définit une norme sur $\mathcal{L}(E,F)$; cette norme est dite subordonnée.
On vérifie aussi que

(a) Pour tout $f \in \mathcal{L}(E,F)$,

$$\begin{aligned}\|f\| &= \sup_{\|x\|\leq 1} \|f(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\| \\ &= \min\{c > 0 : \ \|f(x)\| \leq c\|x\|, \ \forall x \in E\}\end{aligned}$$

(b) Si E, F et G sont trois espaces vectoriels normés et si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$ et

$$\|g \circ f\| \leq \|g\| \ \|f\|$$

Théorème 3.3.2. *Si F est un espace de Banach, l'espace $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace de Banach.*

3.4 Exercices

Exercice 3.4.1.

Soient E et F deux espaces métriques et $f : E \to F$.

(a) Montrer que, si f est continue, alors son graphe

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in E\}$$

est fermé dans $E \times F$. La réciproque est-elle vraie ?

(b) Montrer que si f est continue, son garphe Γ_f est homémorphe à E. En déduire que les ensembles $G_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$, $G_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^3\}$ et $G_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sin x\}$ sont tous homéomorphes à $\mathbb{R}$

Exercice 3.4.2.

Montrer que si E_1 est homémorphe à E_1' et E_2 est homéomoprhe à E_2', alors $E_1 \times E_2$ est homémorphe à $E_1' \times E_2'$.

Exercice 3.4.3.

Soient E et F deux espaces métriques et $f : E \to F$ une application.

(a) Montrer que f est continue si et seulement si $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ pour toute partie A de E.

(b) Montrer que f est fermée si et seulement si $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$ pour toute partie A de E.

(c) Montrer que f est ouverte si et seulement si $f\big(\overset{o}{A}\big) \subset \overset{\frown}{f(A)}{}^{o}$ pour toute partie A de E.

(d) Montrer que si f est bijective, alors :

f est ouverte $\Longleftrightarrow$ f est fermée $\Longleftrightarrow$ f^{-1} est continue.

Exercice 3.4.4.

Soient E_1 et E_2 deux espaces métriques.

(a) Montrer que la projection p_1 qui à $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ fait correspondre x_1 est ouverte.

(b) Montrer que p_1 n'est pas forcément fermée. Pour cela, on peut considérer le cas $E_1 = E_2 = \mathbb{R}$ et $F = \{(x, 1/x) \mid x > 0\}$.

Exercice 3.4.5.

Soit (E, d) un espace métrique.

(a) Soit A une partie de E. Montrer que l'application f qui à $x \in E$ fait correspondre $\mathrm{d}(x, A)$ est 1-lipschitzienne.

(b) Soient A et B deux fermés disjoints de E. Montrer qu'il esiste deux ouverts U et V de E, disjoints tels que $A \subset U$ et $B \subset V$.

Exercice 3.4.6.

Soit A une partie non vide d'un espace métrique E.

(a) Montrer que $\mathrm{diam}(A) = \mathrm{diam}(\overline{A})$

(b) A-t-on toujours $\mathrm{diam}(A) = \mathrm{diam}(\overset{o}{A})$?

Exercice 3.4.7.

(a) Soit f une application continue d'un espace métrique E dans un espace métrique F. Montrer que si D est une partie dense dans E, alors $f(D)$ est une partie dense dans $f(E)$.

(b) En déduire que l'ensemble $\{\cos n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

(c) Soit a un réel tel que a/π soit irrationnel. On pose $G = \{e^{ina} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ et $S^1 = \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}$. Montrer que G est dense dans S^1 et que $G \neq S^1$.

Exercice 3.4.8.

(a) Soit f et g deux applications continues d'un espace métrique E dans un espace métrique F et soit D une partie dense dans E. Montrer que si f et g coïncident sur D, alors elles coïncident partout sur E.

(b) Déterminer les applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Exercice 3.4.9.

Montrer que, pour tout A, $B \in \mathrm{M_n}(\mathbb{R})$: $\mathrm{com}(AB) = \mathrm{com}(A)\,\mathrm{com}(B)$ où $\mathrm{com}(A)$ désigne la comatrice de A.

Exercice 3.4.10.

(a) Montrer que si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice nilpotente, alors $A^n = 0$

(b) En déduire que l'ensemble $\mathcal{N}$ des matrices nilpotentes est un fermé de $\mathrm{M_n}(\mathbb{K})$

(c) Montrer que $\mathcal{N}$ est d'intérieur vide.

Exercice 3.4.11.

Pour toute matrice $A \in \mathrm{M}_d(\mathbb{K})$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_n(A) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k$$

(a) Montrer que la suite $(S_n(A))$ converge dans $\mathrm{M}_d(\mathbb{K})$; on note e^A sa limite.

(b) Montrer qu'il existe un polynôme $p \in \mathbb{K}[X]$ tel que $e^A = p(A)$.

Exercice 3.4.12.

Soit A une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On dit qu'une matrice $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est une racine carrée de A si $X^2 = A$. On note $\mathrm{Rac}(A)$ l'ensemble des racines carrées de A :

$$\mathrm{Rac}(A) = \{X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid X^2 = A\}$$

(a) Montrer que $\mathrm{Rac}(A)$ est une partie fermée de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) L'ensemble $\mathrm{Rac}(I_n)$ est-il une partie bornée de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$?

(c) Soit $n \geq 2$. Montrer qu'il n'existe pas de norme $\|\ \|$ vérifiant

$$\|AB\| \geq \|A\|\,\|B\|, \quad \forall A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$$

On note $\mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_m]$ l'ensemble des fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}^m$. Pour p dans $\mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_m]$, non identiquement nul, on pose

$$Z(p) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \mid p(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0\}.$$

4. Soit $p \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_m]$ et $I_1, I_2, \ldots, I_m$ des parties infinies de $\mathbb{R}$. Montrer que si la fonction polynomiale p s'annule sur $I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_m$, alors p est la fonction nulle.
5. Déterminer l'intérieur de $Z(p)$.
6. En déduire l'intérieur de $\mathrm{Rac}(A)$.

Exercice 3.4.13.

Soit n un entier non nul. On note

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \mid \mathrm{Det}\, A = 1\}$$

(a) Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ est un fermé de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

(b) Montrer que, pour tout $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall t \in]0, \alpha[, \mathrm{Det}(A + tI) \neq 1$$

(c) En déduire que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ est d'intérieur vide.

Exercice 3.4.14.

Soient X et Y deux espaces métriques, soit $(A_i)_{i\in I}$ un recouvrement de X et soit $f : X \to Y$.

(a) Montrer que si les A_i sont tous ouverts et les applications $f|_{A_i}$ sont toutes continues, alors f est continue.

(b) On suppose que I est fini et que les A_i sont tous fermés. Prouver que si les $f|_{A_i}$ sont continues, alors f est continue.

Exercice 3.4.15.

Montrer que

(a) Tout fermé F d'un espace métrique E est intersection dénombrable d'ouverts.

(b) Tout ouvert U est union dénombrable de fermés.

Exercice 3.4.16.

Soit (E, d) un espace métrique. Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est dite semi-continue inférieurement (en abrégé sci) en x_0 si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de x_0 tel que

$$x \in V \Longrightarrow f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon$$

De même, f est dite semi-continue supérieurement (en abrégé scs) en x_0 si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de x_0 tel que

$$x \in V \Longrightarrow f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon$$

C'est-à-dire $(-f)$ est semi-continue inférieurement.
On désigne par $\mathcal{I}$ (resp. $\mathcal{S}$) l'ensemble des fonctions sur E à valeurs réelles qui sont sci (resp. scs).

(a) Montrer que $\mathcal{I}$ est un cône convexe réticulé, c'est-à-dire que si f et g sont dans $\mathcal{I}$ et $\lambda \geq 0$, alors $f + g$, λf et $\max(f, g)$ sont aussi dans $\mathcal{I}$.

(b) Montrer que f est continue si, et seulement si, elle est sci et scs.

(c) Montrer que f est semi-continue inférieurement si, et seulement si, l'ensemble $\{x \in E \mid f(x) > \lambda\}$ est un ouvert de E, pour tout réel λ.

(d) Montrer que la fonction indicatrice d'un ouvert (resp. d'un fermé) est sci (resp. scs).

(e) Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille de fonctions sur E à valeurs réelles continues. On suppose que $f = \sup_{i\in I} f_i$ est finie en chaque point de E. Montrer que f est sci.

(f) Soit $f : E \to]0, +\infty[$ une fonction sci. On pose que pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$f_n(x) = \inf_{a\in E} (f(a) + n\,\mathrm{d}(x, a))$$

Montrer que les f_n sont continues, à valeurs dans $]0, +\infty[$ et que f_n croit vers f.

3.5 Correction des exercices

Exercice 3.4.1

(a) Soit $(x_n, f(x_n))$ une suite de Γ_f qui converge vers (x, y). La suite (x_n) converge vers x et la suite $(f(x_n))$ converge vers y. Puisque f est continue, on a nécessairement $y = f(x)$ si bien que la limite (x, y) est dans Γ_f. Ainsi, Γ_f est fermé dans $E \times F$. La réciproque est fausse. En effet, il suffit de considérer le cas $E = F = \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0\,; \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

La fonction f n'est pas continue et son graphe

$$\Gamma_f = \{(0, 0)\} \cup \{(x, 1/x) \mid x \neq 0\}$$

est fermé comme réunion de deux fermés de $\mathbb{R}^2$.

(b) La fonction $g : x \mapsto (x, f(x))$ est continue et bijective de E sur Γ_f. Sa réciproque $g^{-1} : (x, f(x)) \mapsto x$ est continue. Ainsi, g est un homéomorphisme de E sur Γ_f.
Comme application, on en déduit que G_1, G_2 et G_3 sont homéomorphes à $\mathbb{R}$; ils sont donc deux à deux homéomorphes. $\square$

Exercice 3.4.2
Soient $f : E_1 \to E_1'$ et $g : E_2 \to E_2'$ les deux homéomorphismes et soit $h : E_1 \times E_2 \to E_1' \times E_2'$ l'application définie par

$$h(x_1, x_2) = (f(x_1), f(x_2))$$

L'application h est continue, car ses composantes le sont. De plus, h est bijective et sa réciproque $h^{-1} : E_1' \times E_2' \to E_1 \times E_2$, donnée par

$$h^{-1}(x_1', x_2') = (f^{-1}(x_1'), f^{-1}(x_2'))$$

est continue, car ses composantes le sont. Ainsi, h est un homéomorphisme de $E_1 \times E_2$ dans $E_1' \times E_2'$. $\square$

Exercice 3.4.3

(a) Supposons que f soit continue et soit $y \in f(\overline{A})$, il existe $x \in \overline{A}$ tel que $y = f(x)$. Il existe aussi une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x. Puisque f est continue, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(x) = y$, si bien que y est dans $\overline{f(A)}$. On a donc $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.
Réciproquement, supposons que pour toute partie A de E, on ait $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$. Soit Ω un fermé de F. Il s'agit de prouver que $f^{-1}(\Omega)$ est un fermé de E. Posons $A = f^{-1}(\Omega)$; on a

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \subset \overline{\Omega} = \Omega$$

Donc $\overline{A} \subset A$ et par suite A est un fermé de E. La fonction f est donc continue sur E.

(b) Supposons que f soit une application fermée l'inclusion $A \subset \overline{A}$ implique que $\overline{f(A)} \subset \overline{f(\overline{A})}$. Comme $\overline{A}$ est un fermé de E, $f(\overline{A})$ est un fermé de F, c'est-à-dire $\overline{f(\overline{A})} = f(\overline{A})$. Il en résulte que

$$\overline{f(A)} \subset f(\overline{A}).$$

Réciproquement, supposons que $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$ pour toute partie A de E et montrons que f est fermée. Soit A un fermé de E, l'hypothèse dit que $\overline{f(A)} \subset f(A)$ et par suite on a l'égalité $\overline{f(A)} = f(A)$, c'est-à-dire que $f(A)$ est un fermé.

(c) Supposons que f soit ouverte. On a $\overset{o}{A} \subset A$ donc $f\big(\overset{o}{A}\big) \subset f(A)$ et par suite l'intérieur de $f\big(\overset{o}{A}\big)$ est inclus dans l'intérieur de $f(A)$. Comme f est ouverte, l'intérieur de $f\big(\overset{o}{A}\big)$ lui est égal, ce qui implique

$$f\big(\overset{o}{A}\big) \subset \overset{o}{\overbrace{f(A)}}$$

Supposons que $f(\overset{o}{A}) \subset \overset{o}{\widehat{f(A)}}$ pour toute partie A de E. Soit A un ouvert de E. On a $\overset{o}{A} = A$ et donc $f(A) \subset \overset{o}{\widehat{f(A)}}$. On a nécessairement l'égalité $f(A) = \overset{o}{\widehat{f(A)}}$ et donc $f(A)$ est un ouvert de F.

(d) Montrons que si f est ouverte alors elle est fermée. Soit A un fermé de E. Puisque $\complement(f(A)) = f(\complement A)$ est un ouvert, il s'ensuit que $f(A)$ est un fermé.
Montrons que si f est fermée alors f^{-1} est continue. Soit A un fermé de E, $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$ est un fermé de F, donc f^{-1} est continue.
Enfin, montrons que si f^{-1} continue alors f est ouverte. Soit U un ouvert de E, l'égalité $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$ montre que $f(U)$ est un ouvert. $\square$

Exercice 3.4.4

(a) Soit U un ouvert de $E_1 \times E_2$. On doit prouver que $p_1(U)$ est un ouvert de E_1. Soit $a_1 \in p_1(U)$, il existe $a = (a_1, a_2) \in U$ tel que $p_1(a) = a_1$. Puisque U est un ouvert, il existe un ouvert U_1 de E_1 contenant a_1 et un ouvert U_2 de E_2 contenant a_2 tels que $U_1 \times U_2 \subset U$, par suite $p_1(U_1 \times U_2) = U_1 \subset p(U)$. Ainsi, U_1 est un ouvert contenant a_1 et inclus dans $p_1(U)$. Cela prouve que $p_1(U)$ est un ouvert de E_1.

(b) L'ensemble F est un fermé de $\mathbb{R}^2$, mais $p_1(F) =]0, +\infty[$ n'est pas un fermé de $\mathbb{R}$. $\square$

Exercice 3.4.5

(a) Soient x et y deux éléments de E. Pour tout a de A,

$$\mathrm{d}(x, A) \leq \mathrm{d}(x, a) \leq \mathrm{d}(x, y) + \mathrm{d}(y, a)$$

Il s'ensuit que

$$\mathrm{d}(x, A) \leq \mathrm{d}(x, y) + \mathrm{d}(y, A)$$

En échangeant les rôle de x et y, on obtient

$$\mathrm{d}(y, A) \leq \mathrm{d}(x, y) + \mathrm{d}(x, A)$$

et par suite

$$|\,\mathrm{d}(x, A) - \mathrm{d}(y, A)| \leq \mathrm{d}(x, y).$$

Cela montre que l'application $x \mapsto \mathrm{d}(x, A)$ est lipschitzienne de rapport 1.

(b) Posons

$$U = \{x \in E \mid \mathrm{d}(x, A) < \mathrm{d}(x, B)\}$$
$$V = \{x \in E \mid \mathrm{d}(x, A) > \mathrm{d}(x, B)\}$$

L'application $x \mapsto \mathrm{d}(x, B) - \mathrm{d}(x, A)$ est continue de E dans $\mathbb{R}$. U et V sont, respectivement, les images réciproques des ouverts $]0, +\infty[$ et $] - \infty, 0[$, ce sont donc des ouverts disjoints de E. De plus, $A \subset U$ et $B \subset V$. □

Exercice 3.4.6

(a) Par définition,

$$\operatorname{diam}(A) = \sup_{x,y \in A} \mathrm{d}(x, y).$$

On en déduit facilement que $\operatorname{diam}(A) \leq \operatorname{diam}(\overline{A})$. Montrons l'inégalité inverse, c'est-à-dire que, pour tout x et y dans $\overline{A}$

$$\mathrm{d}(x, y) \leq \operatorname{diam}(A)$$

Soient x et y dans $\overline{A}$. Il existe deux suites (x_n) et (y_n) dans A qui convergent, respectivement, vers x et y. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{d}(x_n, y_n) \leq \operatorname{diam}(A)$. En faisant tendre n vers l'infini et en utilisant la continuité de l'application distance, on obtient $\mathrm{d}(x, y) \leq \operatorname{diam}(A)$.

(b) Dans $\mathbb{R}$, on considère $A = [1, 2] \cup \{3\}$. On a

$$\operatorname{diam}(A) = 2 \quad \text{et} \quad \operatorname{diam}\big(\overset{o}{A}\big) = 1. \quad \square$$

Exercice 3.4.8

(a) Supposons que, pour tout $d \in D$, $f(d) = g(d)$. Soit x dans $E = \overline{D}$, il existe une suite (d_n) d'éléments de D qui converge vers x. Comme $f(d_n) = g(d_n)$ et comme f et g sont continues en x, par passage à la limite on obtient $f(x) = g(x)$. Ainsi, f et g coïncident sur E.

(b) On pose $a = f(1)$. Il est facile de voir que $f(n) = an$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $f(r) = ar$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$. Soit x un réel, puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite (r_n) de $\mathbb{Q}$ qui converge vers x. L'égalité $f(r_n) = ar_n$ pour tout n et la continuité de f impliquent $f(x) = ax$. □

Exercice 3.4.10

(a) Si p est l'indice de nilpotence de la matrice A, $A^{p-1} \neq 0$ et il existe X_0 non nul tel que $A^{p-1}X_0 \neq 0$. La famille $(X_0, AX_0, \ldots, A^{p-1}X_0)$ est libre dans $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, donc $p \leq n$ et $A^n = A^p A^{n-p} = 0$.

(b) D'après la première question,

$$\mathcal{N} = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \mid A^n = 0\}$$

$\mathcal{N}$ est l'image réciproque de $\{0\}$ par l'application $A \mapsto A^n$. Celle-ci étant continue, on en déduit que $\mathcal{N}$ est un fermé.

(c) Supposons que $\mathcal{N}$ soit d'intérieur non vide et soit N dans $\overset{o}{\mathcal{N}}$. Il existe $r > 0$ tel que

$$B(N, r) \subset \mathcal{N}$$

Par suite $N + (r/2)I$ est une matrice nilpotente ce qui est impossible car $N + (r/2)I$ est inversible et une matrice nilpotente n'est jamais inversible. □

Exercice 3.4.11

(a) On munit $\mathrm{M}_d(\mathbb{K})$ de la norme subordonnée. Puisque la dimension de $\mathrm{M}_d(\mathbb{K})$ est finie, il suffit de montrer que $S_n(A)$ est une suite de Cauchy. Soit $m > n$,

$$|||S_m(A) - S_n(A)||| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k!} |||A|||^k$$

La série de terme général $|||A|||^k/k!$ est convergente vers $e^{|||A|||}$, donc le second terme de l'inégalité précédente tend vers 0 quand n et m tendent vers l'infini. On en déduit que $(S_n(A))$ est une suite de Cauchy.

(b) Voir l'exercice 2.9.9. □

Exercice 3.4.12

(a) L'application $f : X \mapsto X^2$ est continue sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$\mathrm{Rac}(A) = f^{-1}(\{A\})$$

Il en résulte que $\mathrm{Rac}(A)$ est un fermée de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) Considérons la matrice d'ordre n suivante

$$X_p = \begin{pmatrix} S_p & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad S_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & -1 \end{pmatrix}$$

On vérifie que $X_p^2 = I$ et que $\|X_p\|$ tend vers l'infini avec p. Donc $\mathrm{Rac}(I_n)$ est non bornée.

(c) Supposons qu'une telle norme existe, alors

$$\|I\| = \|X_p^2\| \geq \|X_p\|^2$$

ce qui est impossible puisque le second membre tend vers l'infini avec p.

(d) On raisonne par récurrence sur $m \in \mathbb{N}^*$. Le résultat est vrai pour $m = 1$. Supposons qu'il est vrai pour m et soit p une fonction de $\mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}]$ qui s'annule sur $I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_{m+1}$. La fonction polynomiale $t \mapsto p(x_1, x_2, \ldots, x_m, t)$ s'annule sur l'ensemble infini I_{m+1}, donc elle est nulle. La fonction polynomiale $(x_1, \ldots, x_m) \mapsto p(x_1, x_2, \ldots, x_m, t)$ s'annule sur $I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_m$, donc elle est nulle. Cela prouve le résultat cherché.

(e) Supposons que l'intérieur de $Z(p)$ soit non vide. Le polynôme p s'annule sur $Z(p)$ donc sur son intérieur qui est un ouvert de $\mathbb{R}^m$. Il existe donc $r > 0$ tel que p s'annule sur la boule

$$B_\infty(a, r) = \prod_{i=1}^{m}]a_i - r, a_i + r[.$$

D'après la question précédente, p est nul ce qui est absurde. Donc $Z(p)$ est d'intérieur vide.

(f) On pose $A = (a_{ij})$. $\mathrm{Rac}(A)$ est l'ensemble des matrices $(x_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telles que

$$\sum_{k=1}^{n} x_{ik}x_{kj} - a_{ij} = 0, \quad \forall i, j$$

Cela montre que

$$\mathrm{Rac}(A) = \bigcap_{1 \leq i,j \leq n} Z(p_{ij}) \quad \text{avec} \quad p_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_{ik}x_{kj} - a_{ij}$$

Comme $Z(p_{ij})$ est d'intérieur vide, pour tout i, j, on en déduit que $\mathrm{Rac}(A)$ est d'intérieur vide. □

Exercice 3.4.13

(a) L'application qui à une matrice A associe son déterminant est continue. $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$, étant l'image réciproque du fermé $\{1\}$ par cette application, est donc un fermé de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

(b) L'application $t \mapsto \mathrm{Det}(A + tI)$ est polynomiale, donc l'équation

$$\mathrm{Det}(A + tI) = 1$$

admet au plus un nombre fini de solutions. Il suffit de prendre pour α la plus petite solution strictement positive si elle existe, sinon on prend $\alpha = +\infty$.

(c) Supposons que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ est d'intérieur non vide. Soit A une matrice dans l'intérieur de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$. D'après la question précédente, la boule

$$B(A,\alpha) = \{X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \mid |||X - A||| < \alpha\}$$

n'est pas incluse dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$. D'où la contradiction. $\square$

Remarque. On peut retrouver le fait que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ est d'intérieur vide en remarquant que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) = Z(p)$ où p est un polynôme de n^2 variables et utiliser l'exercice précédent.

Exercice 3.4.14

(a) Soit U un ouvert de Y. En posant $f_i = f|_{A_i}$, il vient

$$f_i^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cap A_i \quad \text{et donc} \quad f^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(U)$$

Comme $f_i : A_i \to Y$ est continue, $f_i^{-1}(U)$ est ouvert dans A_i, donc ouvert dans X, car A_i est un ouvert de X. Ainsi, $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X et par suite f est continue.

(b) Soit F un fermé de Y. On a

$$f^{-1}(F) = \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(F)$$

Les $f_i^{-1}(F)$ sont des fermés dans X, comme ils sont en nombre fini, leur réunion $f^{-1}(F)$ est fermée. La fonction f est donc continue. $\square$

Exercice 3.4.15

(a) On peut supposer que F est non vide. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$O_n = \{x \in E \mid \mathrm{d}(x,F) < 1/n\}$$

L'application $x \mapsto \mathrm{d}(x,F)$ étant continue et O_n, étant l'image réciproque par cette application de l'ouvert $]-\infty, 1/n[$, est un ouvert de E. On a

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n = \{x \in E \mid \mathrm{d}(x,F) = 0\} = \overline{F} = F$$

(b) On peut supposer $U \neq E$. On pose $F = E \backslash U$ et

$$F_n = \{x \in E \mid \mathrm{d}(x,F) \geq 1/n\}$$

Il est clair que F_n est un fermé de E et

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \{x \in E \mid \mathrm{d}(x,F) > 0\} = U \quad \square$$

Chapitre 4

Espaces métriques complets

4.1 Définition et propriétés

Définition 4.1.1. *Soit* (E, d) *un espace métrique. On dit qu'une suite* (x_n) *d'éléments de* E *est une suite de Cauchy si, pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$m, n \geq n_0 \Longrightarrow \mathrm{d}(x_m, x_n) < \varepsilon$$

Proposition 4.1.2. *Dans un espace métrique* (E, d)

(1) *Toute suite convergente est une suite de Cauchy.*

(2) *Toute suite de Cauchy est une suite bornée.*

(3) *Toute suite de Cauchy qui admet une valeur d'adhérence* ℓ*, converge vers cette valeur d'adhérence* ℓ*.*

Démonstration. Seule la troisième assertion nécéssite une démonstration. Soit (x_n) une suite de Cauchy qui admet une valeur d'adhérence ℓ et soit $(x_{\phi(n)})$ une sous-suite qui converge vers ℓ. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\begin{aligned} m, n \geq n_0 &\Longrightarrow \mathrm{d}(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} \\ n \geq n_0 &\Longrightarrow \mathrm{d}(x_{\phi(n)}, \ell) < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

On a donc

$$\mathrm{d}(x_n, \ell) \leq \mathrm{d}(x_n, x_{\phi(n)}) + \mathrm{d}(x_{\phi(n)}, \ell) < \varepsilon$$

Ce qui prouve la convergence de la suite (x_n) vers ℓ. □

Remarque 4.1.3.

Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite (r_n) dans $\mathbb{Q}$ telle que

$$\sqrt{2} < r_n < \sqrt{2} + \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Le réel $\sqrt{2}$ est limite de la suite (r_n). Ainsi, (r_n) est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$, mais ne converge pas vers un élément de $\mathbb{Q}$.

Définition 4.1.4. *Un espace métrique* (E, d) *est dit complet si toute suite de Cauchy de* E *converge dans* E.

Un espace vectoriel normé complet est appelé un espace de Banach. Un espace préhilbertien complet est appelé un espace de Hilbert.

Exemple 4.1.5.

$\mathbb{R}$ est complet mais $\mathbb{Q}$ ne l'est pas.

Proposition 4.1.6. *Soit* X *un ensemble. L'ensemble* $B(X, \mathbb{R})$ *des fonctions bornées de* X *dans* $\mathbb{R}$*, muni de la norme uniforme est un espace de Banach.*

Démonstration. Soit (f_n) une suite de Cauchy dans $(B(X, \mathbb{R}), \| \|_\infty)$. Soit $x \in X$; pour tout m et n dans $\mathbb{N}$, on a

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_m - f_n\|_\infty$$

ce qui prouve que la suite $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$, celui-ci étant complet, la suite converge vers un réel qu'on notera $f(x)$. L'application $f : X \to \mathbb{R}$, ainsi définie, vérifie :

$$\forall x \in X, \quad f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$$

D'autre part, la suite (f_n) étant de Cauchy est bornée, c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ tel que

$$\|f_n\|_\infty \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

En particulier, pour tout x dans X et tout entier n, $|f_n(x)| \leq M$. En passant à la limite quand n tend vers l'infini, on en déduit que $|f(x)| \leq M$, donc f appartient à $B(X, \mathbb{R})$. Montrons maintenant que la convergence de (f_n) vers f est uniforme . Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall m, n \geq n_0, \quad \|f_m - f_n\|_\infty \leq \varepsilon$$

En particulier, pour tout x dans X, on a

$$\forall m, n \geq n_0, \quad |f_m(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$$

En faisant tendre m vers l'infini, il vient

$$\forall n \geq n_0, \quad |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$$

Cela étant vrai pour tout $x \in X$, on en déduit que

$$n \geq n_0 \Longrightarrow \|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon$$

La suite (f_n) converge donc vers f uniformément. □

Proposition 4.1.7. *Soit* (E, d) *un espace métrique et* $F \subset E$*.*

(1) *Si le sous-espace métrique* (F, d) *est complet, alors* F *est un fermé de* E*.*

(2) *Si* E *est complet et si* F *est fermé dans* E*, alors* F *est complet.*

Démonstration. (1) : Soit (x_n) une suite d'éléments de F qui converge dans E. La suite (x_n) est donc de Cauchy dans E, donc aussi dans F. Celui-ci étant par hypothèse complet, on en déduit que (x_n) converge vers un élément de F. Ainsi F est un fermé de E.
(2) : Soit (x_n) une suite de Cauchy dans (F, d). Elle est de Cauchy dans (E, d) qui est complet, donc elle converge dans E. Mais F est, par hypothèse, un fermé de E, la limite de (x_n) est donc dans F. Ainsi, (F, d) est complet. □

Proposition 4.1.8. *Soient* d_1 *et* d_2 *deux distances équivalentes sur* E*. Alors* (E, d_1) *est complet si et seulement si* (E, d_2) *est complet.*

Proposition 4.1.9. *Soient* (E_i, d_i)*,* $1 \leq i \leq n$*, des espaces métriques. L'espace métrique produit* $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ *est complet si et seulement si pour tout* i*, l'espace* (E_i, d_i) *est complet.*

Exemple 4.1.10.

L'espace $\mathbb{R}^n$, muni de l'une des trois distances usuelles, est complet.

Proposition 4.1.11. *Soit* (E, d) *un espace métrique complet et soit* (F_n) *une suite de fermés non vides de* E *vérifiant :*

(1) *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* $F_{n+1} \subset F_n$

(2) $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{diam}(F_n) = 0$

Alors l'intersection des F_n*,* $n \in \mathbb{N}$*, est réduite à un point.*

Démonstration. Les F_n n'étant pas vides, on peut construire une suite (x_n) telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in F_n$. L'hypothèse (i) montre que $F_m \subset F_n$ pour tout $m \geq n$, si bien que pour tout $m \geq n$, x_n et x_m sont dans F_n. Par suite, pour tout $m \geq n$, on a

$$\mathrm{d}(x_n, x_m) \leq \mathrm{diam}(F_n)$$

Le second membre de cette inégalité tend vers 0 quand n tend vers l'infini et donc la suite (x_n) est de Cauchy. Soit ℓ sa limite et soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. la suite $(x_m)_{m\geq n}$ est une suite de F_n qui converge vers ℓ. Comme F_n est un fermé de E, la limite ℓ appartient à F_n et par suite ℓ appartient à l'intersection des F_n, $n \in \mathbb{N}$.
Réciproquement, soit x dans l'intersection des F_n. Puisque x et ℓ sont dans F_n pour tout n, on a

$$0 \leq \mathrm{d}(x, \ell) \leq \mathrm{diam}(F_n)$$

Le second membre tend vers 0 quand n tend vers l'infini, donc $x = \ell$. □

Remarque 4.1.12.

L'hypothèse (ii) est importante. Ainsi, dans $\mathbb{R}$, les fermés $F_n = [n, +\infty[$ vérifient (i) et pourtant leur intersection est vide.

4.2 Critère de Cauchy, prolongement

Théorème 4.2.1. *Soient* (E, d) *et* (F, δ) *deux espaces métriques où* F *est supposé complet. Soit* A *une partie de* E *et* $a \in \overline{A}$. *Une fonction* f *définie sur* A *à valeurs dans* F *admet une limite en* a *si et seulement si* f *vérifie le critère de Cauchy en* a, *à savoir : pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\alpha > 0$ *tel que, pour tous* x *et* y *dans* A

$$\mathrm{d}(x, a) < \alpha \quad et \quad \mathrm{d}(y, a) < \alpha \Longrightarrow \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Démonstration. Supposons que f vérifie le critère de Cauchy en a et montrons que f admet une limite en a. Soit (x_n) une suite d'éléments de A, admettant a pour limite, le critère de Cauchy implique que $(f(x_n))$ est une suite de Cauchy dans F. Celui-ci étant complet, la suite $(f(x_n))$ est convergente.
Inversement, supposons que f possède une limite ℓ en a. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\mathrm{d}(x, a) < \alpha \Longrightarrow \delta(f(x), \ell) < \varepsilon/2.$$

Soient x et y dans A tels que $\mathrm{d}(x, a) < \alpha$ et $\mathrm{d}(y, a) < \alpha$. L'inégalité triangulaire permet d'écrire

$$\delta(f(x), f(y)) \leq \delta(f(x), \ell) + \delta(\ell, f(y)) < \varepsilon.$$

Cela montre que f vérifie le critère de Cauchy. □

Théorème 4.2.2. *Soient* (E, d) *un espace métrique,* (F, δ) *un espace métrique complet et* D *une partie dense dans* E*. Soit* $f : D \to F$ *une fonction uniformément continue. Il existe une et une seule fonction continue* $\tilde{f} : E \to F$ *qui coïncide avec* f *sur* D*. De plus, la fonction* $\tilde{f}$ *est uniformément continue.*

Démonstration. Construisons un prolongement de f : Soit $a \in E = \overline{D}$. Puisque f est uniformément continue, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x, y \in D, \quad \mathrm{d}(x, y) < \alpha \Longrightarrow \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon \tag{4.1}$$

En particulier, si $\mathrm{d}(x, a) < \alpha/2$ et $\mathrm{d}(y, a) < \alpha/2$ alors $\delta(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Ainsi, f vérifie le critère de Cauchy en a, donc f admet une limite en a. On pose

$$\tilde{f}(a) = \lim_{x \to a} f(x)$$

La continuité de f sur D montre que pour tout $a \in D$, $f(a) = \tilde{f}(a)$ et donc $\tilde{f}$ est un prolongement de f.
Montrons que $\tilde{f}$ est uniformément continue sur E. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\alpha > 0$ associé à ε par (4.1). Soient x et y dans E tel que $\mathrm{d}(x, y) < \alpha$; x est limite d'une suite (x_n) d'éléments de D et y est limite d'une suite (y_n) d'éléments de D. La continuité de la distance fait que $\mathrm{d}(x_n, y_n) < \alpha$ à partir d'un certain rang n_0, donc $\delta(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon$ pour $n \geq n_0$. Or, par construction $f(x_n)$ et $f(y_n)$ convergent respectivement vers $\tilde{f}(x)$ et $\tilde{f}(y)$, il en résulte que $\delta(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)) \leq \varepsilon$. Cela prouve que $\tilde{f}$ est uniformément continue.
L'unicité du prolongement résulte du fait que si deux fonctions continues coïncident sur une partie dense, elles coïcident partout. □

Corollaire 4.2.3. *Soient* (E, d) *un espace normé,* D *un sous-espace dense dans* E *et* F *un espace de Banach. Alors, toute application linéaire continue* $f : D \to F$ *se prolonge de manière unique en une application linéaire continue* $\tilde{f} : E \to F$*.*

Démonstration. La linéarité jointe à la continuité implique l'uniforme continuité de f. Le théorème précédent assure l'existence d'un prolongement $\tilde{f}$ de f uniformément continue. Montrons que $\tilde{f}$ est linéaire : Soient x et y deux éléments de E, et soient α et β deux scalaires. Il existe (x_n) et (y_n) dans D qui convergent respectivement vers x et y. On a

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(\alpha x + \beta y) &= \lim_{n \to +\infty} f(\alpha x_n + \beta y_n) \\
&= \alpha \lim_{n \to +\infty} f(x_n) + \beta \lim_{n \to +\infty} f(y_n) \\
&= \alpha \tilde{f}(x) + \beta \tilde{f}(y)
\end{aligned}$$

Ce qui traduit la linéarité de $\tilde{f}$. □

APPLICATION : CONSTRUCTION DE L'INTÉGRALE DE RIEMANN

Soit $B([a,b])$ l'ensemble des fonctions bornées sur $[a,b]$ à valeurs réelles, muni de la norme uniforme. On désigne par $\mathcal{E}([a,b])$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$. Pour f dans $\mathcal{E}([a,b])$, il existe une subdivision de $[a,b]$

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

telle que, pour tout i, $1 \leq i \leq n$, f est constante dans l'intervalle $]x_{i-1}, x_i[$; soit $f(x) = c_i$. L'adhérence de $\mathcal{E}([a,b])$ dans $B([a,b])$ est le sous-espace des fonctions réglées, noté $\mathcal{R}([a,b])$.
L'intégrale d'une fonction en escalier f est donnée par

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})c_i$$

Cette expression ne dépend pas de la subdivision de $[a,b]$. L'application qui à $f \in \mathcal{E}([a,b])$ associe son intégrale $I(f)$ est linéaire et l'inégalité

$$|I(f)| \leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})|c_i| \leq (b-a)|f\|_\infty$$

vraie pour toute $f \in \mathcal{E}([a,b])$, montre qu'elle est continue. Le corollaire précédent montre qu'il existe une unique application linéaire continue $\tilde{I}$ sur $\mathcal{R}([a,b])$ qui prolonge I. C'est ainsi qu'on définit l'intégrale d'une fonction réglée et on note :

$$\tilde{I}(f) = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

où (f_n) est une suite de fonction en escalier qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

Théorème 4.2.4 (Théorème de Baire)**.** *Soit E un espace métrique complet. Toute intersection dénombrable d'ouverts denses dans E est dense dans E.*

Autrement dit, si (O_n) est une suite d'ouverts de E telle que $\overline{\mathrm{O}}_n = E$ pour tout n, alors $\overline{\bigcap_n \mathrm{O}_n} = E$.

Cela revient aussi à dire toute réunion dénombrable de fermés de E d'intérieur vide est d'intérieur vide.

Corollaire 4.2.5. *Soit E un espace métrique complet et (F_n) une suite de fermés de E dont la réunion est égale à E. Alors, la réunion $\cup_n \overset{o}{F_n}$ est un ouvert dense dans E.*

Démonstration. Soit F le fermé $E\backslash(\cup_n \overset{o}{F_n})$. Il s'agit de montrer que F est d'intérieur vide. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le fermé $F \cap F_n$ est d'intérieur vide car son intérieur est inclus dans $F \cap \overset{o}{F_n}$ qui est égal à l'ensemble vide. Donc, d'après le théorème de Baire, on a

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (F \cap F_n) = F \cap (\cup_{n\in\mathbb{N}} F_n) = F \cap E = F$$

est d'intérieur vide. □

4.3 Exercices

Exercice 4.3.1.

Soit $E =]0, +\infty[$. Pour x et y dans E, on pose

$$\delta(x, y) = |\operatorname{Log} x - \operatorname{Log} y|$$

(a) Vérifier que δ est une distance sur E.

(b) Soit d la distance usuelle sur E. Montrer que d et δ sont deux distances topologiquement équivalentes, c'est-à-dire U est un ouvert de (E, d) si et seulement si U est un ouvert de (E, δ).

(c) Montrer que (E, d) n'est pas complet.

(d) La suite $(1/n)_{n\geq 1}$, est-elle convergente dans l'espace métrique (E, δ) ? Est-elle une suite de Cauchy dans (E, δ) ?

(e) Montrer que l'espace métrique (E, δ) est complet.

(f) Soit $f\ :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ telle qu'il existe $k \in [0, 1[$ vérifiant, pour tout $x > 0$

$$x|f'(x)| \leq kf(x).$$

Montrer que f admet un unique point fixe dans $]0, +\infty[$.

(g) Soit $f\ :]0 + \infty[\to]0, +\infty[$ une fonction telle qu'il existe $k \in [0, 1[$ vérifiant pour tout $x > 0$

$$x|f'(x)| \leq k|f(x).$$

Montrer f admet un unique point fixe dans $]0, +\infty[$.

Exercice 4.3.2.

Soit $E =]0, +\infty[$. Pour tous x et y dans E, on pose

$$\delta(x, y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$$

(a) Montrer que δ est bien une distance sur $]0, +\infty[$.

(b) Montrer que δ et la distance usuelle sont topologiquement équivalentes.

(c) Montrer que (E, δ) n'est pas complet.

(d) Montrer que $(]0, 1], \delta)$ est complet.

Exercice 4.3.3.

Soit $E = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ un ensemble dénombrable. On pose, pour tout n et m dans $\mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{d}(a_n, a_n) = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{d}(a_n, a_m) = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{m}, \;\; n \neq m$$

(a) Vérifier que d est une distance sur E.

(b) Montrer que (E, d) est complet.

Exercice 4.3.4.

Soient E et F deux espaces métriques et $f : E \to F$ une application. On suppose que l'image par f de toute suite de Cauchy de E est une suite de Cauchy dans F. Montrer que f est continue.

Exercice 4.3.5.

Soit A une partie dense d'un espace métrique.
Montrer que si toute suite de Cauchy de A converge dans E, alors E est complet.

Exercice 4.3.6.

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que f' soit bornée sur $]a, b[$. Montrer que f admet un prolongement continue en a et b.

Exercice 4.3.7.

(a) Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'une fonction u de classe $C^2([0, 1])$ est solution de

$$\begin{cases} -u''(t) = f(t), & \text{pour } 0 \leq t \leq 1 \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

si et seulement si u est continue sur $[0, 1]$ et

$$u(x) = \int_0^1 G(x, t) f(t)\, dt$$

où $G : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$G(x,t) = \begin{cases} t(1-x), & \text{si } 0 \leq t \leq x \leq 1 \\ x(1-t), & \text{si } 0 \leq x \leq t \leq 1 \end{cases} \tag{2}$$

La fonction G est appelée fonction de Green associée au problème (1).

(b) Montrer qu'il existe une unique fonction u de $C^2([0,1])$ telle que

$$\begin{cases} -u''(t) = \cos(u(t)), \ t \in [0,1] \\ \quad u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

(c) Plus généralement, soit $h : [0,1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une dérivée partielle par rapport à la deuxième variable vérifiant

$$\left|\frac{\partial h}{\partial \xi}(t,\xi)\right| \leq L, \quad \forall (t,\xi) \in [0,1] \times \mathbb{R}$$

où L est une constante telle que $0 \leq L < 8$.
Montrer qu'il existe une unique fonction de $C^2([0,1])$ solution de

$$\begin{cases} -u''(t) = h(t,(u(t)), & \text{pour } 0 \leq t \leq 1 \\ \quad u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

(d) Soient g et $a : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Montrer que si $\|a\|_\infty < 8$, le problème

$$\begin{cases} u''(t) + a(t)u(t) = g(t), & \text{sur } [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

admet une unique solution.

(e) Soit m une constante non nulle. Montrer que le problème

$$\begin{cases} u''(t) + \pi^2 u(t) = m \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

n'admet aucune solution de classe $C^2([0,1])$.

Exercice 4.3.8.

(a) Montrer, en utilisant le théorème de Baire, qu'un espace vectoriel normé E admettant une base dénombrable n'est jamais complet.

(b) Montrer qu'on ne peut pas munir $\mathbb{R}[X]$ d'une structure d'espace de Banach.

Exercice 4.3.9.

(a) Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques. On suppose que (E, d) est complet. On considère une suite (f_n) de fonctions continues de E dans F.

  i) Pour $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$F_{n,\varepsilon} = \{x \in E \mid \delta(f_n(x), f_m(x)) \leq \varepsilon, \quad \text{pour tout } m \geq n\}$$
  Montrer que $\Omega_\varepsilon = \cup_{n\in\mathbb{N}} \overset{o}{F}_{n,\varepsilon}$ est un ouvert dense dans E et que, pour tout $x_0 \in \Omega_\varepsilon$, il existe un voisinage V de x_0, tel que pour tout $x \in V : \delta(f(x), f(x_0)) \leq 3\varepsilon$

  ii) En déduire que l'ensemble des points de continuité de f est dense dans E.

(b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que l'ensemble des points de continuité de f' est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 4.3.10.

On désigne par I un intervalle de $\mathbb{R}$ et par J un intervalle inclus dans I. L'espace $\mathbb{R}^d$ sera identifié à l'espace $\mathrm{M}_{d,1}(\mathbb{R})$ des matrices réelles à d lignes et une colonne. On notera $\| \ \|$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^d$.
Soit $t_0 \in I$, $\xi \in \mathbb{R}^d$ et soient $A : I \to \mathrm{M}_d(\mathbb{R})$ et $b : I \to \mathbb{R}^d$ deux applications continues sur I.
On considère la suite (X_n) de fonctions sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ définies par
$$X_0 = 0, \quad X_{n+1}(t) = \xi + \int_{t_0}^{t} (A(s)X_n(s) + b(s))\, ds$$

(a) Montrer que les applications X_n sont continues sur I.

(b) Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in J$,
$$\|X_{n+1}(t) - X_n(t)\| \leq c^n \frac{|t - t_0|^n}{n!} \sup\{\|X_1(t) - X_0(t)\|,\ t \in J\}.$$

(c) En déduire que la suite (X_n) converge uniformément sur tout segment inclus dans I. On désigne par X l'applicaton limite de (X_n).

(d) Prouver que l'application X est de classe C^1 sur I et qu'elle vérifie
$$X(t_0) = \xi, \quad X'(t) = A(t)X(t) + b(t), \quad t \in I.$$

Exercice 4.3.11.

Soit $E = C([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme uniforme. On pose, pour u dans E et $\in [0,1]$,

$$T(u)(x) = 1 + \int_0^x u(\sin t)\,dt$$

(a) Montrer que l'application $T \circ T : E \to E$ est contractante.

(b) En déduire qu'il existe une unique fonction $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que

$$(1) \quad u'(x) = u(\sin x), \quad x \in [0,1] \text{ et } \ u'(0) = 1$$

4.4 Correction des exercices

Exercice 4.3.1

i. Il est facile de voir que δ est une distance.

ii. Cela revient à montrer que l'application identité de (E, d) dans (E,δ) est un homéomorphisme. Soit $\varepsilon > 0$, la continuité de la fonction logarithme montre qu'il existe $\alpha > 0$ tel que
$$|x - x_0| < \alpha \Longrightarrow |\operatorname{Log} x - \operatorname{Log} x_0| < \varepsilon$$
c'est-à-dire tel que
$$\mathrm{d}(x, x_0) < \alpha \Longrightarrow \delta(x, x_0) < \varepsilon$$
Inversement, $\varepsilon > 0$ étant donné, la continuité de la fonction exponentielle montre qu'il existe $\alpha > 0$ tel que
$$|\operatorname{Log} x - \operatorname{Log} x_0| < \alpha \Longrightarrow \mathrm{d}(x, x_0) < \varepsilon$$
Ainsi, l'application identité est un homéomorphisme de (E, d) dans (E,δ)

iii. La suite $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans (E, d) mais ne converge pas dans (E, d), cet espace n'est donc pas complet.

iv. Supposons que la suite $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ converge dans (E,δ). Il existerait $\ell \in E$ tel que
$$\left|\operatorname{Log}(\frac{1}{n}) - \operatorname{Log}\ell\right| = |\operatorname{Log} n + \operatorname{Log}\ell| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
Ce qui est impossible. La suite $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ diverge donc dans (E,δ).

Supposons que $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ soit une suite de Cauchy dans (E,δ), il vient

$$\left|\operatorname{Log}\frac{1}{m}-\operatorname{Log}\frac{1}{n}\right| = |\operatorname{Log} m-\operatorname{Log} n| \xrightarrow[n,m\to+\infty]{} 0$$

Cela veut dire que la suite $(\operatorname{Log} n)$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et donc converge, ce qui est absurde.

v. Soit (x_n) une suite de Cauchy de (E,δ). On a

$$|\operatorname{Log} x_m-\operatorname{Log} x_n| \xrightarrow[n,m\to+\infty]{} 0$$

Cela montre que la suite $(\operatorname{Log} x_n)$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Soit ℓ sa limie, alors

$$|\operatorname{Log} x_n-\ell| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

c'est-à-dire (x_n) converge vers e^{ℓ} dans (E,δ).

vi. On a pour $0<x<y$,

$$\begin{aligned}
\delta(f(x),f(y)) &= |\operatorname{Log} f(x)-\operatorname{Log} f(y)|\\
&= \left|\int_x^y \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt \leq \int_x^y \left|\frac{f't)}{f(t)}\right| dt\right.\\
&\leq \int_x^y \frac{k}{t}\,dt = k|\operatorname{Log} y-\operatorname{Log} x| = k\delta(x,y)
\end{aligned}$$

si bien que f est une application contractante de E dans E. Elle admet donc un unique point fixe dans E. $\square$

Exercice 4.3.2

Suivre le même raisonnement que dans l'exercice précédent.

Exercice 4.3.3

Il est facile de voir que d est une distance. Montrons que $(E,\,\mathrm{d})$ est complet. Soit (x_k) une suite de Cauchy dans E, il existe $n_0\in\mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall m\geq n\geq n_0,\quad \mathrm{d}(x_m,x_n)<1$$

si bien que $x_m=x_n$ pour $m\geq n\geq n_0$.
Ainsi, la suite (x_n) est donc stationnaire et par suite convergente dans E. $\square$

Exercice 4.3.4

Soit $a \in E$ et (x_n) une suite de E qui converge vers a. Il s'agit de montrer que la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$. On définit la suite (y_n) par

$$y_{2n} = x_n \quad \text{et } y_{2n+1} = a$$

La suite (y_n) converge vers a, c'est donc une suite de Cauchy dans E et $(f(y_n))$ est de Cauchy dans F. Par ailleurs, $f(a)$ est une valeur d'adhérence de la suite $(f(y_n))$, puisque $f(y_{2n+1}) = f(a)$, donc $f(y_n)$ converge vers $f(a)$. En particulier $f(y_{2n}) = f(x_n)$ converge vers $f(a)$. Ainsi, f est continue au point a. □

Exercice 4.3.6
Il existe une constante $k > 0$ telle que $|f'(t)| \leq k$ pour tout $t \in]a, b[$, par suite, d'après le théorème des accroissement finis,

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

pour tout x et y dans $]a, b[$. Ainsi, f vérifie le critère de Cauchy en a et b ; elle est donc prolongeable par continuité en a et b. □

Exercice 4.3.7

i. Supposons que

$$u(x) = \int_0^1 G(x,t)f(t)\,dt$$

c'est-à-dire

$$u(x) = (1-x)\int_0^x tf(t)\,dt + x\int_x^1 (1-t)f(t)\,dt \qquad (*)$$

Cela montre que u est da classe C^1 sur $[0, 1]$ et que

$$\begin{aligned} u'(x) &= -\int_0^x tf(t)\,dt + (1-x)xf(x) + \int_x^1 (1-t)f(t)\,dt + x(x-1)f(x) \\ &= -\int_0^x tf(t)\,dt + \int_x^1 (1-t)f(t)\,dt \end{aligned}$$

Cette expression prouve que u' est aussi de classe C^1 sur $[0, 1]$ et vérifie que

$$u''(x) = -f(x)$$

D'autre part, en faisant dans la relation $(*)$ $x = 0$ puis $x = 1$, on trouve $u(0) = u(1) = 0$. En résumé, u est de

classe C^2 et est solution de (1).
Réciproquement, si u est solution de (1), la formule de Taylor avec reste intégral donne

$$u(x) = u(0) + u'(0)x + \int_0^x (x-t)u''(t)\,dt$$

Comme $u(0) = 0$ et $u'' = -f$,

$$u(x) = u'(0)x - \int_0^x (x-t)f(t)\,dt$$

Comme $u(1) = 0$, en faisant $x = 1$ dans ce qui précède, il vient

$$u'(0) = \int_0^1 (1-t)f(t)\,dt$$

Finalement

$$u(x) = \int_0^1 x(1-t)f(t)\,dt - \int_0^x (x-t)f(t)\,dt = \int_0^1 G(x,t)f(t)\,dt$$

où G est donnée par (2).

ii. D'après la première question, le problème (3) est équivalent à :

$$u \text{ est continue et } \; u(x) = \int_0^1 G(x,t)\cos(u(t))\,dt$$

Autrement dit, u est un point fixe pour l'application $F : E \to E$ définie par

$$F(u)(x) = \int_0^x G(x,t)\cos(u(t))\,dt$$

où $E = C([0,1])$. L'espace E muni de la norme uniforme est complet ; nous allons prouver que F est contractante. D'après le théorème des accroissements finis, on a $|\cos a - \cos b| \leq |a-b|$ pour tout a et b dans $\mathbb{R}$, donc

$$\begin{aligned} |F(u)(x) - F(u)(y)| &= \int_0^1 G(x,t)|\cos(u(t)) - \cos(v(t))|\,dt \\ &\leq \left(\int_0^1 G(x,t)\,dt\right) \|u-v\|_\infty \end{aligned}$$

On vérifie que

$$\sup_{0\leq x\leq 1} \int_0^1 G(x,t)\,dt = \frac{1}{8}$$

et il s'ensuit que f est $\frac{1}{8}$-lipschitzienne. D'après le théorème du point fixe, il existe un unique u dans E tel que $F(u) = u$. L'application u est ainsi l'unique solution de (3).

iii. Il suffit de montrer que l'application $F : E \to E$ définie par

$$F(u)(x) = \int_0^1 G(x,t)h(t,u(t))\,dt$$

est contractante. Le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $\xi \mapsto h(t,\xi)$ montre qu'il existe c compris entre ξ_1 et ξ_2 tel que

$$h(t,\xi_1) - h(t,\xi_2) = (\xi_1 - \xi_2)\frac{\partial h}{\partial \xi}(t,c)$$

et donc, pour tous ξ_1 et ξ_2 dans $\mathbb{R}$ et tout t dans $[0,1]$

$$|h(t,\xi_1) - h(t,\xi_2) \le L|\xi_1 - \xi_2|$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} |F(u)(x) - F(v)(x)| &\le \int_0^1 G(x,t)|h(t,u(t)) - h(t,v(t))|\,dt \\ &\le L\int_0^1 G(x,t)|u(t) - v(t)|\,dt \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\|F(u) - F(v)\|_\infty \le \frac{L}{8}\|u - v\|_\infty$$

iv. Il suffit d'utiliser la question précédente avec la fonction h définie par

$$h(t,\xi) = a(t)\xi - g(t)$$

v. Les fonctions u qui vérifient $u'' + \pi^2 u = m$ sont de la forme

$$u(t) = A\cos\pi t + B\sin\pi t + \frac{m}{\pi^2}$$

où A et B sont des constantes réelles. Les conditions $u(0 = u(1) = 0$ impliquent

$$m\pi^{-2} + A = 0 \quad \text{et} \quad m\pi^{-2} - A = 0$$

Cela n'est possible que si $m = 0$. $\square$

Exercice 4.3.8

i. Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots)$ une base dénombrable de E. On pose

$$F_n = \text{Vect}((e_1, e_2, \ldots, e_n)$$

F_n est un sous-espace vectoriel de dimension finie, c'est donc un fermé de E. De plus, il est strictement inclus dans E, donc $\overset{o}{F_n} = \emptyset$ et la réunion des F_n est égale à E. Si E était complet, le théorème de Baire implique que $\overset{o}{E} = \emptyset$ ce qui est absurde. Ainsi, E ne peut être complet.

ii. La famille $(1, X, \ldots, X^n, \ldots)$ est une base dénombrable de $\mathbb{R}[X]$. D'après la question précédente, il n'existe pas de norme $\| \ \|$ sur $\mathbb{R}[X]$ qui en fait un espace de Banach. $\square$

Exercice 4.3.11

i. On a, pour tout u_1 et u_2 dans E

$$\begin{aligned}|T(u_1)(x) - T(u_2)(x)| &\leq \int_0^x |u_1(\sin t) - u_2(\sin t)|\, dt \\ &\leq x\|u_1 - u_2\|_\infty\end{aligned}$$

Par suite, il vient

$$\begin{aligned}|T^2(u_1)(x) - T^2(u_2)(x)| &\leq \int_0^x |Tu_1(\sin t) - Tu_2(\sin t)|\, dt \\ &\leq \int_0^x (\sin t)\|u_1 - u_2\|_\infty\, dt \\ &\leq k\|u_1 - u_2\|_\infty\end{aligned}$$

avec $k = \int_0^1 \sin t\, dt < 1$. Si bien que T^2 est contractante.

ii. L'zapplication $T : E \to E$ admet une itérée contractante et E est complet, donc T admet un unique point fixe $u \in E$. En dérivant l relation $u = T(u)$, on obtient $u'(x) = u(\sin x)$, pour tout $x \in [0, 1]$. Comme $u(0) = T(u)(0) = 1$, on déduit que u est l'unique solution de problème (1). $\square$

Chapitre 5

Espaces métriques compacts

5.1 Définition et premières propriétés

Définition 5.1.1. *Un espace métrique* (E, d) *est dit compact si de toute suite de* E *on peut extraire une suite convergente dans* E.

Un partie K de E est un compact de E si le sous-espace métrique (K, d) est compact.

Exemple 5.1.2.

i. Tout intervalle de la forme $[a, b]$ est un compact de $\mathbb{R}$. Cela résulte du théorème de Bolzano-Weierstrass qui dit : "De toute suite rélle bornée, on peut extraire une sous-suite convergente".

ii. L'espace métrique $\mathbb{R}$ n'est pas compact. Par exemple, la suite définie par $x_n = n$ n'admet pas de sous-suite convergente dans $\mathbb{R}$.

Proposition 5.1.3. *Si* $K_1, K_2, \ldots, K_p$ *sont des espaces métriques compacts, il en est de même de l'espace métrique produit* $K_1 \times K_2 \times \cdots \times K_p$.

Démonstration. Il suffit de regarder le cas $p = 2$. Soit (x_n, y_n) une suite de $K_1 \times K_2$. Comme K_1 est compact, on peut extraire de (x_n) une suite $(x_{\phi_1(n)})$ qui converge vers un élément x dans K_1. La suite $(y_{\phi_1(n)})$ est une suite d'éléments de K_2 qui est compact, on peut donc en extraire une sous-suite $(y_{\phi_1(\phi_2(n))})$ qui converge vers un élément y dans K_2. Ainsi, la suite $(x_{\phi_1 \circ \phi_2(n)}, y_{\phi_1 \circ \phi_2(n)})$ extraite de (x_n, y_n), converge vers (x, y). □

Proposition 5.1.4. *Si* K *est un compact d'un espace métrique* E*, alors* K *est un fermé borné de* E.

Démonstration. Soit K un compact de E. Montrons que K est borné, c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ tel que $\mathrm{d}(x,y) \leq M$ pour tout x et y dans K. Sinon, il existe, pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n et y_n dans K tels que $\mathrm{d}(x_n, y_n) > n$. La suite (x_n, y_n) est une suite de $K \times K$ qui est compact, elle admet donc une sous-suite $(x_{\phi(n)}, y_{\phi(n)})$ qui converge vers un élément (x, y) de $K \times K$ et on a

$$\mathrm{d}(x_{\phi(n)}, y_{\phi(n)}) > \phi(n) \geq n.$$

Comme l'application $(x, y) \mapsto \mathrm{d}(x, y)$ est continue, par passage à la limite dans l'inégalité ci-dessus, on obtient $\mathrm{d}(x, y) = +\infty$, ce qui est absurde.
Montrons que K est un fermé de E. Soit (x_n) une suite de K qui converge vers $x \in E$. On doit prouver que x est dans K. Puisque K est compact, on sait qu'on peut extraire de (x_n) une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ qui converge vers un élément y de K. Mais puisque (x_n) converge vers x, la sous-suite $(x_{\phi(n)})$ doit converger vers x, c'est-à-dire $x = y \in K$. □

Proposition 5.1.5. *Si K est un fermé d'un espace métrique compact de E. Alors K est un compact.*

Démonstration. Soit (x_n) une suite d'éléments de K. Comme E est compact, (x_n) admet une sous-suite qui converge vers $x \in E$. Mais K est fermé dans E, donc x appartient à K. □

Proposition 5.1.6. *Dans un espace métrique E, l'intersection finie ou infinie de parties compactes est un compact.*

Démonstration. Soit (K_i), $i \in I$, une famille de compacts de E et soit $i_0 \in I$. L'intersection des K_i est un fermé du compact K_{i_0}, c'est donc un compact. □

Théorème 5.1.7. *Une partie de l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}^n, \| \|_\infty)$ est compacte si, et seulement si, elle est fermée et bornée dans $\mathbb{R}^n$.*

Démonstration. On sait que si K est compact, alors K est fermé et borné dans $\mathbb{R}^n$.
Réciproquement, supposons que K est fermé et borné dans $\mathbb{R}^n$. Puisque K est borné, il existe $R > 0$ tel que

$$K \subset B_f(0, R) = [-R, R] \times \cdots \times [-R, R] \quad (n \text{ facteurs})$$

Comme $B_f(0, R)$ est un compact et K est un fermé de $B_f(0, R)$ (puisque $K = K \cap B_f(0, R)$), il s'ensuit que K est compact. □

Remarque 5.1.8.
De même, on montre qu'une partie de $(\mathbb{C}^n, \| \|_\infty)$ est un compact si et seulement si est un fermé borné dans $\mathbb{C}^n$.

5.2 Théorème de Heine

Théorème 5.2.1 (Théorème de Heine)**.** *Toute fonction continue sur un compact est uniformément continue.*

Autrement dit, soit (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques,on suppose que E compact. Si $f : E \to F$ est continue, alors f est uniformément continue.

Démonstration. Il s'agit de montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x, y \in E;\ \ \mathrm{d}(x, y) < \alpha \Longrightarrow \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Supposons le contraire, c'est-à-dire il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\alpha > 0$, il existe x et y dans E vérifiant $\mathrm{d}(x, y) < \alpha$ et $\delta(f(x), f(y)) \geq \varepsilon$. On choisit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha = 1/n$, il existe alors x_n et y_n dans E tels que

$$\mathrm{d}(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \delta(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon.$$

La suite (x_n) admet une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ qui converge vers un élément x de E. Comme

$$\mathrm{d}(y_{\phi(n)}, x) \leq \ \mathrm{d}(y_{\phi(n)}, x_{\phi(n)}) + \mathrm{d}(x_{\phi(n)}, x)$$

et par construction

$$\mathrm{d}(y_{\phi(n)}, x_{\phi(n)}) < \frac{1}{\phi(n)},$$

on en déduit que la suite $(y_{\phi(n)})$ converge aussi vers x. Puisque f est continue en x, on a

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_{\phi(n)}) = \lim_{n \to +\infty} f(y_{\phi(n)}) = f(x)$$

Cela contredit le fait que $\delta(f(x_{\phi(n)}), f(y_{\phi(n)}) \geq \varepsilon$. □

Proposition 5.2.2. *Soient E et F deux espaces métriques et $f : E \to F$ une fonction continue. Pour toute partie compacte K de E, l'image $f(K)$ est une partie compacte de F.*

Démonstration. Soit $(y_n = f(x_n))_n$, $x_n \in K$, une suite de $f(K)$. Puisque K est un compact, il existe une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ qui converge vers un élément x de K. Comme f est continue, la suite $(y_{\phi(n)})$ converge et sa limie est $y = f(x) \in f(K)$. $\square$

Proposition 5.2.3. *Soient E et F deux espaces métriques, où E est un compact, et soit $f : E \to F$ une application continue.*

(1) *f est une application fermée.*

(2) *Si f est bijective, alors sa réciproque $f^{-1} : F \to E$ est continue.*

Démonstration. (1) : Soit A un fermé de E. Comme E est compact, A est compact. Par suite, $f(A)$ est compact, donc un fermé de F.
(2) : Si A est un fermé de E, alors d'après (1), $\left(f^{-1}\right)^{-1}(A) = f(A)$ est un fermé de F. Cela prouve que l'image réciproque par f^{-1} de tout fermé de E est un fermé de F. $\square$

Théorème 5.2.4. *Soit K un compact et $f : K \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, il existe a et b dans K tels que*

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b) \quad , \forall x \in K$$

Démonstration. Puisque f est continue et K est un compact, alors $f(K)$ est un compact (et donc borné) de $\mathbb{R}$. Sa borne inférieure α et sa borne supérieure β appartiennent à $\overline{f(K)}$ qui est égale à $f(K)$. Par suite, il existe a et b dans K tels que $\alpha = f(a)$ et $\beta = f(b)$. Il en résulte que, pour tout $x \in K$, $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$. $\square$

5.3 Topologie d'un espace métrique compact

Définition 5.3.1. *Un recouvrement ouvert d'un espace métrique E est une famille d'ouverts O_i de E, $i \in I$, dont la réunion est E. Le recouvrement est dit fini (resp. dénombrable) lorsque l'ensemble I est fini (resp. dénombrable).*

Lemme 5.3.2. *Soit E un espace métrique compact. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre fini de points $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de E tels que*

$$E = B(a_1, \varepsilon) \cup B(a_2, \varepsilon) \cup \cdots \cup B(a_n, \varepsilon)$$

Démonstration. On raisonne par l'absurde : Soit $a_1 \in E$. La boule $B(a_1, \varepsilon)$ est distincte de E. Il existe a_2 dans $E \backslash B(a_1, \varepsilon)$ et en particulier

$$\mathrm{d}(a_1, a_2) > \varepsilon$$

La réunion $B(a_1, \varepsilon) \cup B(a_2, \varepsilon)$ est distincte de E, il existe alors a_3 dans $E \backslash B(a_1, \varepsilon) \cup B(a_2, \varepsilon)$ et en particulier

$$\mathrm{d}(a_3, a_1) > \varepsilon \quad \text{et} \quad \mathrm{d}(a_3, a_2) > \varepsilon.$$

On peut ainsi construire une suite (a_n) dans E telle que

$$\forall i \neq j, \quad \mathrm{d}(a_i, a_j) > \varepsilon.$$

Cela montre que la suite (a_n) n'admet aucune sous-suite convergente ce qui est en contradiction avec la compacité de E. □

Théorème 5.3.3. *Soit E un espace mérique. Les assertions suivantes sont équivalentes*

(1) *E est compact*

(2) *De tout recouvrement ouvert de E, on peut extraire un recouvrement fini*

(3) *Pour toute famille (F_i), $i \in I$, de fermés de E dont l'intersection est vide, on peut en extraire un nombre fini dont l'intersection est vide.*

Démonstration. (laissée au lecteur). □

Corollaire 5.3.4. *Soit E un espace métrique compact.*

(i) *Si (F_i), $i \in I$, est une famille de fermés dont toute intersection finie est vide alors l'intersection de la famille (F_i) est vide.*

(ii) *Si (F_n) est une suite décroissante de fermés non vides, alors leur intersection est non vide.*

Proposition 5.3.5. *Une partie K d'un espace métrique E est compacte si et seulement si, pour toute famille (O_i) d'ouverts de E dont la réunion contient K, il existe un nombre fini parmis ces ouverts dont la réunion contient K.*

Proposition 5.3.6. *Dans un espace métrique E, toute réunion finie de compacts est un compact de E.*

Démonstration. Il suffit de montrer que la réunion de deux compacts K_1 et K_2 est un compact. Soit $(\mathrm{O}_{i \in I}$, une famille d'ouverts de E dont la réunion contient $K_1 \cup K_2$. Puisque K_1 et K_2 sont des compacts, chacun inclus dans cette réunion, il existe $I_1 \subset I$ et $I_2 \subset I$, I_1 et I_2 finis tels que

$$K_1 \subset \bigcup_{i \in I_1} \mathrm{O}_i \quad \text{et} \quad K_2 \subset \bigcup_{i \in I_2} \mathrm{O}_i$$

L'ensemble $J = I_1 \cup I_2 \subset I$ est fini et $K_1 \cup K_2 \subset \bigcup_{i \in J} \mathrm{O}_i$. □

Remarque 5.3.7.

Evidemment, la réunion d'une famille infinie de compacts n'est pas en général un compact. Par exemple, la réunion des compacts $[-n, n]$, $n \in \mathbb{Z}$, est égale à $\mathbb{R}$ qui n'est pas compact.

Théorème 5.3.8 (Théorème de Dini)**.** *Soit E un espace métrique compact et $f_n : E \to \mathbb{R}$ une suite décroissante de fonctions continues qui converge simplement sur E vers une application $f : E \to \mathbb{R}$ continue. Alors la convergence de (f_n) est uniforme sur E.*

Démonstration. Voir l'exercice 5.4.16 □

Application : *Soit (u_n) une sute de fonctions continues de E dans $\mathbb{R}$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$ et que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur E et que sa somme est continue. Alors la converge est de la série est uniforme.*
Pour démontrer ce résultat, il suffit d'appliquer le théorème de Dini à la suite (f_n) définie par $f_n = u_0 + \cdots + u_n$.

Théorème 5.3.9 (Théorème de Riesz)**.** *Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors E est de dimension finie si et seulement si sa boule unitée fermée est compacte.*

Démonstration. Voir l'exercice 5.4.17 □

5.4 Exercices

Exercice 5.4.1.

Soient A et B deux parties non vides d'un espace vectoriel normé E. On désigne par $A + B$ l'ensemble des éléments de la forme $a + b$, où a est dans A et b est dans B.

i. Montrer que si A est un ouvert, alors $A + B$ est un ouvert.
ii. Montrer que si A est compact et B est un fermé, alors $A + B$ est un fermé.
iii. Donner un exemple où A et B sont fermés, mais pas $A + B$.

iv. Montrer que si A et B sont compacts, alors $A+B$ est compact.

Exercice 5.4.2.

On munit l'espace $E = C([0,1], \mathbb{R})$ des fonctions continues de la norme uniforme. Montrer que

$$S = \{u \in E \mid \|u\|_\infty = 1\}$$

est un fermé borné de E et que S n'est pas compact.

Exercice 5.4.3.

Soit E un espace métrique et (x_n), $n \in \mathbb{N}$, une suite de E qui converge vers ℓ.
Montrer que l'ensemble $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$ est un compact.

Exercice 5.4.4.

Soit E un espace métrique et $f : [a,b] \times E \to \mathbb{R}$ une application continue. Montrer que l'application F définie pour $x \in E$ par

$$F(x) = \int_a^b f(t,x)\,dt$$

est continue sur E.

Exercice 5.4.5.

Soit E un espace métrique et soit (K_n) une suite décroissante de compacts non vides de E.

i. Montrer que l'intersection K des K_n est un compact non vide de E

ii. Soit U un ouvert de E contenant K. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $K_n \subset U$ pour tout $n \geq n_0$.

Exercice 5.4.6.

Soit (x_n), $n \in \mathbb{N}$, une suite d'un compact E, soit H l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (x_n) et soit U un ouvert contenant H.

i. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $x_n \in U$.

ii. On suppose que $H \subset \{\ell\}$. Montrer que (x_n) converge vers ℓ.

iii. Application : Soit E un espace métrique, S^1 l'ensemble des nombres complexes de module 1 et soit $f : E \to S^1$ une application continue non surjective.
Montrer qu'il existe une fonction $\phi : E \to \mathbb{R}$ continue telle que
$$f(x) = e^{i\phi(x)}, \quad \forall x \in E.$$

Exercice 5.4.7.

Soit (x_n) une suite dans un espace métrique compact E et H l'ensemble de ses valeurs d'adhérence. Montrer que $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} \cup H$ est un compact.

Exercice 5.4.8.

Soit (K_n) une suite décroissante de compacts non vides d'un espace topologique E et f une application continue sur E à valeurs dans espace métrique F.

i. Montrer que
$$f\Big(\bigcap_{n\geq 0} K_n\Big) = \bigcap_{n\geq 0} f(K_n)$$

ii. Montrer par un exemple que ce résultat peut être faux si l'on ne suppose pas les K_n compacts.

iii. Soit (x_n) une suite de E. On désigne par H et K, respectivement, l'ensemble des valeurs d'adhérence de (x_n) et de $(f(x_n))$. Montrer que si E est compact, alors $f(H) = K$.

iv. Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (y_n) définie par $y_n = \sin(\cos n)$.

Exercice 5.4.9.

Soit un entier $n \geq 2$. On note :
S_n^+ l'ensemble des matrices $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont symétriques et positives, c'est-à-dire symétriques et vérifiant pour tout vecteur colonne $X \in \mathbb{R}^n$, ${}^tXAX \geq 0$.
Soit $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont orthogonales.

i. Montrer que
   a) S_n^+ est un fermé de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
   b) $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un compact de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

ii. On admet que pour toute $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathrm{S}_n^+$ tels que $A = PS$ (décomposition polaire). Montrer que la décomposition polaire précédente est encore vraie pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 5.4.10.

Soit (E, d) un espace métrique compact (non vide) et $f : E \to E$ telle que, pour tout x et y dans E, on ait
$$x \neq y \Longrightarrow \mathrm{d}(f(x), f(y)) < \mathrm{d}(x, y)$$

i. Montrer que f admet un unique point fixe ℓ.

ii. Soit (x_n) la suite définie par

$$x_0 \in E, \quad \text{et} \quad x_{n+1} = f(x_n), \quad \forall n \geq 1.$$

On se propose de montrer que la suite (x_n) converge vers ℓ.

a) Soit $\varepsilon > 0$ et soit K_ε l'ensemble défini par

$$K_\varepsilon = \{(x, y) \in E^2 \mid \mathrm{d}(x, y) \geq \varepsilon\}.$$

Montrer que K_ε est un compact.

b) En déduire qu'il existe $k < 1$ tel que

$$\forall x, y \in K_\varepsilon, \quad \mathrm{d}(f(x), f(y)) \leq k\,\mathrm{d}(x, y).$$

c) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que x_{n_0} soit dans $B(\ell, \varepsilon)$.

d) Conclure.

Exercice 5.4.11.

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie.

i. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ un fonction continue qui tend vers l'infini avec $\|x\|$. Montrer qu'il existe $a \in E$ tel que

$$f(a) \leq f(x), \quad \forall x \in E.$$

ii. Soit $x_0 \in E$ et soit F un fermé de E. Montrer qu'il existe $a \in F$ tel que

$$\mathrm{d}(x_0, F) = \|x_0 - a\|.$$

Exercice 5.4.12.

Soit E un espace compact. Montrer que si $\mathcal{I}$ est un idéal de l'anneau $C(E, \mathbb{R})$ tel que $\mathcal{I} \neq C(E, \mathbb{R})$, alors il existe $a \in E$ tel que pour tout élément $f \in \mathcal{I}$, $f(a) = 0$.

Exercice 5.4.13.

Soient E et F deux espaces métriques et $f : E \to F$ une application. Montrer que si F est compact et le graphe de f est fermé dans $E \times F$, alors f est continue.

Exercice 5.4.14.

Parmi les ensembles suivants, reconnaître ceux qui sont compacts

$$C_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 = 1\}$$
$$C_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

Exercice 5.4.15.

i. Soient $\lambda_1, \lambda_2 \dots, \lambda_n$ des réels. On suppose que l'ensemble suivant est non vide

$$C = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2 = 1\}$$

Montrer que C est compact si et seulement si $\lambda_i > 0$, pour $i = 1, 2, \dots n$.

ii. Soit $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une forme quadratique et $C_q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid q(x) = 1\}$. On suppose que C_q est non vide. Montrer que C_q est compact si et seulement si q est définie positive.

Exercice 5.4.16 (Théorème de Dini)**.**

Soit E un espace métrique compact et $f_n : E \to \mathbb{R}$ une suite décroissante de fonctions continues qui converge simplement sur X vers une fonction continue f. Pour $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$F_n = \{x \in E \mid f_n(x) - f(x) \geq \varepsilon\}$$

i. Montrer que l'intersection des F_n est vide.
ii. Comparer F_n et F_{n+1}.
iii. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $F_n = \emptyset$ pour tout $n \geq n_0$.
iv. En déduire que la suite (f_n) converge uniformément
v. Soit (u_n) une suite de fonctions continues de E danx $\mathbb{R}$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$ et que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur E et que sa somme est continue. Montrer que la convergence de la série est en fait uniforme sur E.

Ce dernier résultat est connu sous le nom de théorème de Dini.

Exercice 5.4.17 (Théorème de Riesz)**.**

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

i. Soit F un sous-espave vectoriel fermé de E avec $F \neq E$.
   a) Soit $a \notin F$ et $d = \mathrm{d}(a, F)$. Montrer qu'il existe $b \in F$ tel que
   $$d \leq \|a - b\| \leq 2d$$
   b) On pose $x = (a-b)/\|a-b\|$. Montrer que $\mathrm{d}(x, F) \geq 1/2$.
ii. En déduire que si E est de dimension infinie, on peut construire une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de E telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|x_n\| = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \neq m, \; \|x_m - x_n\| \geq \frac{1}{2}.$$

iii. Montrer que E est de dimension finie si et seulement si sa boule unité fermée est compacte.

iv. Montrer que $B_f(0,1)$ est compacte si et seulement si la sphère $S(0,1)$ est compacte.

v. Que peut-on dire de l'intérieur d'un compact d'un espace vectoriel normé de dimension infinie ?

Exercice 5.4.18.

Soit E un espace vectoriel normé et K un compact convexe non vide de E.

i. Soit f un endomorphisme continu de E tel que $f(K) \subset K$.

a) Soit (x_n) la suite définie par

$$x_n = \frac{1}{1+n}(x + f(x) + f^2(x) + \cdots + f^n(x))$$

où x est un vecteur fixé de K. Vérifier que

$$f(x_n) - x_n = \frac{1}{1+n}(f^{n+1}(x) - x)$$

b) En déduire que f admet au moins un point fixe dans K.

ii. Soit un entier $n \geq 2$ et $f_1, f_2, \ldots f_n$ des endomorphismes continus qui commutent deux à deux et tel que, pour tout i, $f_i(K) \subset K$. Montrer par récurrence que les f_i admettent un point fixe commun dans K.

iii. Soit $(f_{i \in I}$, une famille d'endomorphismes continus de E qui commutent deux à deux et laissant K stable. Montrer que ces endomorphismes admettent un point fixe commun dans K.

Exercice 5.4.19.

Soit K un convexe compact d'un espace vectoriel E et soit f un endomorphisme de E tel que $f(K) \subset K$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n = \frac{1}{n}(\mathrm{id} + f + f^2 + \cdots + f^{n-1})$$

i. Montrer que, pour tout n et m dans $\mathbb{N}^*$, $f_n \circ f_m = f_m \circ f_n$.

ii. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(K) \subset K$.

iii. Montrer que, pour tout n et m dans $\mathbb{N}^*$,

$$f_n \circ f_m(K) \subset f_n(K) \cap f_m(K)$$

iv. En déduire que l'intersection des $f_n(K)$ est non vide et qu'ellle est égale à l'ensemble des points fixes de la restriction $f|_K$ de f à K.

Exercice 5.4.20.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes

1. L'image réciproque par f de tout compact est un compact
2. $\lim_{|x| \to +\infty} |f(x)| = +\infty$

5.5 Correction des exercices

Exercice 5.4.1

i. Soit (x_n) une suite de $A+B$ qui converge vers x. Il existe une suite (a_n) de A et une suite (b_n) de B telles que $x_n = a_n + b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble A étant compact, il existe une sous-suite $(a_{\phi(n)})$ qui converge vers a dans A. La sous-suite de (b_n) définie par $b_{\phi(n)} = x_{\phi(n)} - a_{\phi(n)}$ converge vers $b \in B$, car B est un fermé. Il s'ensuit que $x = a + b$ est dans $A + B$.

ii. Soient $A = \mathbb{Z}$ et $B = \sqrt{2}\mathbb{Z}$. Ce sont deux fermés de $\mathbb{R}$ car

$$\complement A = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]-n, n+1[\quad \text{et} \quad \complement B = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n\sqrt{2}, (n+1)\sqrt{2}[$$

Cependant, $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ n'est pas un fermé de $\mathbb{R}$ car c'est un sous-groupe dense dans $\mathbb{R}$ et différent de $\mathbb{R}$.

iii. Soit (x_n) une suite de $A + B$. Il existe une suite (a_n) de A et une suite (b_n) de B telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $x_n = a_n + b_n$. L'ensemble A étant compact, il existe une sous-suite $a_{\phi(n)}$ qui converge vers a dans A. L'ensemble B étant compact, la suite $(b_{\phi(n)})$ admet une sous-suite $(b_{\phi\circ\rho(n)})$ qui converge vers b dans B. Il est alors clair que la suite définie par

$$x_{\phi\circ\rho(n)} = a_{\phi\circ\rho(n)} + b_{\phi\circ\rho(n)}$$

converge vers $a + b$ dans $A + B$. $\square$

Exercice 5.4.2

L'application $u \mapsto \|u\|_\infty$ est continue de E dans $\mathbb{R}$. L'ensemble S est l'image réciproque de $\{1\}$ par cette application, il est donc fermé dans E.
Soit (f_n) la suite de S définie par

$$f_n(x) = x^n, \ x \in [0, 1]$$

Supposons que (f_n) contient une sous-suite $(f_{\phi(n)})$ qui converge uniformément vers un élément f de E. Cette sous-suite converge donc simplement vers la fonction f. Mais la fonction f donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \le x < 1\,; \\ 1, & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Cela est impossible car f est continue sur $[0, 1]$. Ainsi, la suite (f_n) n'admet pas de sous-suite convergente dans S. Donc, S n'est pas compact. $\square$

Exercice 5.4.3
Soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts tels que

$$K = \{x_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\} \subset \bigcup_{i\in I} O_i$$

Il existe $p \in I$ tel que ℓ soit dans O_p. Comme (x_n) converge vers ℓ, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $x_n \in O_p$. Pour chaque $n < n_0$, $x_n \in K$ donc il existe $i_n \in I$ tel que $x_n \in O_{i_n}$. La sous-famille finie formée par les O_{i_n}, $0 \leq n < n_0$ et par O_p recouvre K. Il en résulte que K est un compact. $\square$

Exercice 5.4.4
Soit $\ell \in E$. Montrons que F est continue en ℓ. Soit (x_n) une suite de E qui converge vers ℓ. On pose

$$K = \{x_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$$

L'ensemble $[a, b] \times K$ étant compact, d'après le théorème de Heine, f est uniformément continue sur cet ensemble. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout (t, u) et (s, v) dans $[a, b] \times K$

$$\delta((t, u), (s, v)) < \alpha \Longrightarrow |f(t, u) - f(s, v)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq n_0$,

$$\delta(t, x_n), (t, \ell)) = \mathrm{d}(x_n, \ell) < \alpha$$

et par suite, pour tout $n \geq n_0$,

$$|F(x_n) - F(\ell)| \leq \int_a^b |f(t, x_n) - f(t, \ell)|\, dt < \varepsilon \quad \square$$

Exercice 5.4.5

i. $K = \cap_{n\geq 0} K_n$ est un fermé inclus dans le compact K_0, c'est donc un compact. Il est de plus non vide d'après le corollaire (5.3.4).

ii. Supposons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, K_n n'est pas inclus dans U. Alors $K_n \cap \complement U \neq \emptyset$. On pose $F_n = K_n \cap \complement U$. (F_n) est une suite décroissante de fermés non vides inclus dans le compact K_0, il en résulte que

$$\bigcap_{n\geq 0} F_n = \Big(\bigcap_{n\geq 0} K_n\Big) \cap \complement U = K \cap \complement U \neq \emptyset$$

et donc K n'est pas inclus dans U, ce qui est une contradiction. En conclusion, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $K_{n_0} \subset U$. Comme la suite (K_n) est décroissante, on en déduit que pour tout $n \geq n_0$, $K_n \subset K_{n_0} \subset U$. $\square$

Exercice 5.4.6

i. On a $H = \cap_{n\geq 0}\overline{X_n}$ avec $X_n = \{x_p \mid p \geq n\}$. Comme $(\overline{X_n})$ est une suite décroissante de compacts non vide, d'après l'exercice précédent il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\overline{X_n} \subset U$ pour tout $n \geq n_0$, si bien que $x_n \in U$ pour tout $n \geq n_0$.

ii. Soit U un ouvert de E contenant ℓ. Comme $H \subset \{\ell\} \subset U$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $x_n \in U$. Ce qui montre que la suite (x_n) converge vers ℓ.

iii. Puisque f est non surjective, il existe $z_0 = e^{i\theta_0}$ dans S^1 tel que z_0 ne soit pas dans $f(E)$. Pour tout x de E, il existe un unique $\Phi(x)$ dans $]\theta_0, \theta_0+2\pi[$ tel que $f(x) = e^{i\Phi(x)}$. Il reste à prouver que l'application Φ, ainsi définie, est continue. Soit (x_n) une suite de E qui converge vers x. Puisque $[\theta_0, \theta_0+2\pi]$ est un compact, pour montrer $\Phi(x_n) \to \Phi(x)$ il suffit de montrer que l'ensemble H des valeurs d'adhérence de la suite $(\Phi(x_n))$ est inclus dans $\{\Phi(x)\}$. Soit $y \in H$, il existe une sous-suite $\Phi(x_{\rho(n)})$ qui converge vers y. L'application f étant continue, $f(x_{\rho(n)})$ converge vers $f(x)$, ce qui implique que $e^{iy} = e^{i\Phi(x)}$. Comme $\Phi(x)$ appartient à $]\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$ et y est dans $[\theta_0, \theta_0 + 2\pi]$, on en déduit que $y = \Phi(x)$. $\square$

Exercice 5.4.8

i. On a $\cap_{p\geq 0}K_p \subset K_n$, donc $f(\cap_{p\geq 0}K_p) \subset f(K_n)$ pour tout $n \geq 0$. Ainsi,

$$f(\bigcap_{n\geq 0} K_n) \subset \bigcap_{n\geq 0} f(K_n)$$

Réciproquement, soit y dans l'intersection des $f(K_n)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, y est dans $f(K_n)$ si bien que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe x_n dans K_n tel que $y = f(x_n)$. Cela veut dire que $x_n \in f^{-1}(\{y\})$ pour tout n et donc $K'_n = f^{-1}(\{y\}) \cap K_n$ est une suite décroissante de compacts non vides. Leur intersection est donc non vide, c'est-à-dire

$$f^{-1}(\{y\}) \cap \Big(\bigcap_{n\geq 0} K_n\Big) \neq \emptyset$$

Il existe alors x dans l'intersection des K_n tel que $f(x) = y$.

ii. Soit $E = \mathbb{R}$, $K_n = [n, +\infty[$ et soit f l'application nulle. dans ce cas, l'intersection des K_n est vide, $f(K_n) = \{0\}$ donc $\cap_{n\geq 0}f(K_n) = \{0\}$ et $f(\cap_{n\geq 0}K_n) = \emptyset$.

iii. on a $H = \cap_{n\geq 0}\overline{X_n}$ avec $X_n = \{x_p \mid p \geq n\}$. D'après la deuxième question

$$f(H) = f\Big(\bigcap_{n\geq 0}\overline{X_n}\Big) = \bigcap_{n\geq 0} f(\overline{X_n})$$

L'application f est fermée car si A est un fermé du compact E, alors A est compact et $f(A)$ l'est aussi. Donc $f(A)$ est un fermé de F. Par suite $f(\overline{X_n}) = \overline{f(X_n)}$ si bien que $f(H) = K$.

iv. On considère l'ensemble $E = [-1,1]$, la fonction définie sur E par $f(x) = \sin x$ et la suite (x_n) définie par $x_n = \cos n$. L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (x_n) est l'intervalle $[-1,1]$ (voir exercice (2.9.9)). Donc l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (y_n) est

$$f([-1,1]) = [f(-1), f(1)] = [-\sin 1, \sin 1].$$

Exercice 5.4.9

i. On a

$$\mathrm{S}_n^+ = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA = A \quad \text{et} \quad {}^tXAX \geq 0,\ \forall X \in \mathbb{R}^n\}$$

Soit (A_p) une suite de S_n^+ qui converge vers A. On a

$${}^tA_p = A_p \quad \text{et} \quad {}^tXA_pX \geq 0 \ \ \forall X \in \mathbb{R}^n$$

Par passage à la limite, en utilisant la continuité des applications linéaires $A \mapsto {}^tA$ et $A \mapsto {}^tXAX$, on obtient

$${}^tA = A \quad \text{et} \quad {}^tXAX \geq 0,\ \forall X \in \mathbb{R}^n.$$

Ainsi, A est dans S_n^+.
Par définition,

$$\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = I\}$$

L'application $(A,B) \mapsto \langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, donc

$$A \mapsto \|A\| = \sqrt{\mathrm{Tr}({}^tAA)}$$

est une norme sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Il est clair que, pour toute A dans $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\|A\| = \sqrt{n}$, si bien que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie bornée de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. D'autre part, $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est l'image réciproque de $\{I\}$ par l'application continue $A \mapsto {}^tAA$. Par suite, $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Celui-ci étant de dimension finie, on en déduit que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un compact.

ii. Soit A une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On sait que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, il existe donc une suite (A_k) de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ qui converge vers A. Par hypothèse, il existe une suite (P_k) de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et une suite (S_k) de S_n^+ telles que

$$A_k = P_k S_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est compact, il existe une sous-suite $(P_{\phi(k)})$ qui converge vers P dans $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Puisque $A_{\phi(k)} = P_{\phi(k)} S_{\phi(k)}$, il vient

$$S_{\phi(k)} = {}^t P_{\phi(k)} A_{\phi(k)}$$

Si bien que $S_{\phi(k)}$ converge vers la matrice $S = {}^t PA$, et comme S_n^+ est fermé, la matrice S appartient à S_n^+ et $A = PS$. □

Exercice 5.4.10

i. L'application $\phi : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\phi(x) = \mathrm{d}(x, f(x)), \quad x \in E$$

est continue comme composée de deux applications continues. Comme E est compact, ϕ est bornée et atteint ses bornes, en particulier sa borne inférieure. Il existe donc $\ell \in E$ tel que

$$\phi(\ell) \leq \phi(x), \quad \forall x \in E$$

Si ℓ n'est pas un point fixe de f, alors $f(\ell) \neq \ell$ et par suite

$$\mathrm{d}(f(f(\ell)), f(\ell)) < \mathrm{d}(f(\ell), \ell)$$

c'est-à-dire

$$\phi(f(\ell)) < \phi(\ell)$$

Ce qui est absurde puisque ℓ est un point de minimum pour ϕ. Donc, nécéssairement ℓ est un point fixe de f. Ce point fixe est unique. En effet, supposons qu'il existe $\ell' \neq \ell$ tel que $f(\ell') = \ell'$, alors

$$\mathrm{d}(\ell, \ell') = \mathrm{d}(f(\ell), f(\ell')) < \mathrm{d}(\ell, \ell')$$

Ce qui est impossible.

ii. a) L'ensemble K_ε est un fermé de $E \times E$ comme image réciproque du fermé $[\varepsilon, , +\infty[$ par l'application continue qui à (x, y) associe $\mathrm{d}(x, y)$. Comme $E \times E$ est compact, on en déduit que K_ε est aussi compact.

b) L'application $\psi : K_\varepsilon \to \mathbb{R}$ définie par

$$\psi(x,y) = \frac{\mathrm{d}(f(x), f(y))}{\mathrm{d}(x,y)}$$

est continue sur le compact K_ε, donc elle est bornée et atteint ses bornes ; en particulier sa borne supérieure. Il existe donc (x_0, y_0) dans K_ε tel que

$$\forall (x,y) \in K_\varepsilon, \quad \psi(x,y) \leq \psi(x_0, y_0)$$

Il suffit alors de prendre $k = \psi(x_0, y_0)$ qui est strictement inférieur à 1 car $x_0 \neq y_0$.

c) Supposons par l'absurde que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n n'appartient pas à $B(\ell, \varepsilon)$ c'est-à-dire $(x_n, \ell) \in K_\varepsilon$. Il en résulte que

$$\mathrm{d}(f(x_n), f(\ell)) \leq k\, \mathrm{d}(x_n, \ell)$$

Par itération, il vient pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{d}(x_n, \ell) \leq k^n\, \mathrm{d}(x_0, \ell)$$

Cela implique que $\mathrm{d}(x_n, \ell)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, ce qui contredit le fait $x_n \notin B(\ell, \varepsilon)$. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_{n_0} \in B(\ell, \varepsilon)$.

d) On a pour tout x et y dans E,

$$\mathrm{d}(f(x), f(y)) \leq \mathrm{d}(x,y)$$

donc

$$\mathrm{d}(f(x_n), f(\ell)) \leq \mathrm{d}(x_n, \ell)$$

par suite

$$\mathrm{d}(x_{n+1}, \ell) \leq \mathrm{d}(x_n, \ell), \quad \forall n \geq 0$$

et enfin

$$\mathrm{d}(x_n, \ell) \leq \mathrm{d}(x_{n_0}, \ell) < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0$$

Ce qui prouve que la suite (x_n) converge vers ℓ. $\square$

Exercice 5.4.11

i. Puisque $f(x)$ tend vers l'infini avec $\|x\|$, il existe $R > 0$ tel que
$$\inf_{x\in E} f(x) = \inf_{x\in B_f(0,R)} f(x)$$
Comme $B_f(0,R)$ est un compact, car c'est un fermé borné de E qui est de dimension finie, f est bornée et atteint ses bornes. En particulier, f atteint sa borne inférieure, c'est-à-dire qu'il existe $a \in B_f(0,R)$ tel que
$$\inf_{x\in E} f(x) = \inf_{x\in B_f(0,R)} f(x) = f(a),$$
si bien que $f(a) \leq f(x)$ pour tout x dans E.

ii. On a
$$\mathrm{d}(x_0, F) = \inf_{x\in F} \|x - x_0\|$$
La fonction f définie sur F par $f(x) = \|x - x_0\|$ est continue. On a deux cas :
Premier cas : F est borné, alors f est continue sur le compact F et atteint sa borne inférieure en un point a ; cela veut dire que
$$\mathrm{d}(x_0, F) = \inf_{x\in F} \|x - x_0\| = \|x_0 - a\|$$
Deuxième cas : Si F est non borné, comme $\|x - x_0\| \geq \|x\| - \|x_0\|$, on en déduit que $f(x)$ tend vers l'infini avec $\|x\|$. D'après la première question, il existe $a \in F$ tel que $\mathrm{d}(x_0, F) = \|x_0 - a\|$. □

Exercice 5.4.12

On raisonne par l'absurde en supposant que, pour chaque $a \in E$, il existe une fonction f_a dans $\mathcal{I}$ telle que $f_a(a) \neq 0$. La continuité de f_a fait qu'il existe un ouvert U_a contenant a sur lequel f_a ne s'annule pas. La famille $(U_a)_{a\in E}$ est un recouvrement ouvert de E duquel on peut extraire un sous-recouvrement fini (U_{a_i}), $1 \leq i \leq n$. La fonction $f = f_{a_1}^2 + f_{a_2}^2 + \cdots + f_{a_n}^2$ est alors strictement positive sur tous les ouverts U_{a_i} (car $f \geq f_{a_i}^2$) donc sur E. Puisque $\mathcal{I}$ est un idéal, alors f est dans $\mathcal{I}$ et par suite la fonction $1 = f \times \frac{1}{f}$ est dans $\mathcal{I}$, si bien que $I = C(E, \mathbb{R})$ (on rappelle que si $\mathcal{I}$ est un idéal d'un anneau unitaire A, alors $\mathcal{I} = A$ si et seulement si $\mathbf{1}_A \in \mathcal{I}$). □

Exercice 5.4.14

D'une part C_1 est un fermé de $\mathbb{R}^3$, comme image réciproque de $\{1\}$ par l'application continue $(x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. D'autre part, C_1 est borné puisque, pour tout $x = (x_1, x_2, x_3)$ dans C_1, on a $x_1^2 \leq 1$, $x_2^2 \leq 1$ et $3x_3^2 \leq 1$ et donc

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + |x_3| \leq 1 + 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Ainsi C_1 est un compact.
Cependant, l'ensemble C_2 n'est pas compact car il n'est pas borné du fait que $x_n = (n, n, 1)$ appartient à C_2 et $\|x_n\| = 2n+1$ tend vers l'infini avec n. □

Exercice 5.4.16

i. Supposons que l'intersection des F_n est non vide et soit x un élément dans cette intersection. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x) - f_n(x) \geq \varepsilon$. En faisant tendre n vers l'infini, il vient $0 \geq \varepsilon$, ce qui est absurde.

ii. Soit x dans F_{n+1}, alors $f_{n+1}(x) - f(x) \geq \varepsilon$ et comme $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$, il vient $f_n(x) - f(x) \geq \varepsilon$; si bien que F_{n+1} est inclus dans F_n.

iii. L'ensemble F_n est un fermé de E, comme image réciproque du fermé $[\varepsilon, +\infty[$ par l'application continue $f_n - f$. La suite $(F_n)_{n\geq 0}$ est donc une suite décroissante de compacts d'intersection vide et d'après l'assertion (ii) du corollaire (5.3.4), il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $F_{n_0} = \emptyset$ et par suite $F_n = \emptyset$ pour tout $n \geq n_0$ car (F_n) est décroissante.

iv. On vient de montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, F_n est vide, c'est-à-dire pour tout $x \in E$, $f_n(x) - f(x) < \varepsilon$. D'autre part, $f(x) \leq f_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in E$ car la suite $(f_n(x))$ est décroissante et converge vers $f(x)$. En conclusion, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in E.$$

Cela prouve la convergence uniforme sur E de la suite (f_n) vers f.

v. Il suffit d'appliquer le théorème de Dini à la suite (f_n) définie par $f_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. □

Exercice 5.4.18

1-a) C'est clair

1-b) Puisque K est convexe la suite (x_n) appartient à K, celui-ci étant compact, on peut extraire une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ qui converge vers un élément $\ell \in K$. On a

$$f(x_{\phi(n)}) - x_{\phi(n)} = \frac{1}{\phi(n)+1}(f^{\phi(n)+1}(x) - x)$$

L'ensemble K étant borné, il existe $M > 0$ tel que $\|y\| \leq M$, pour tout y dans K et en particulier on a

$$\|f^n(x)\| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ce qui donne

$$\|f(x_{\phi(n)}) - x_{\phi(n)}\| \leq \frac{1}{\phi(n)+1}(M + \|x\|)$$

Par passage à la limite quand n tend vers l'infini, on obtient $f(\ell) = \ell$.

2. D'après la première question, la propriété est vraie pour $n = 1$. Supposons qu'elle est vraie pour un entier n et soient f_i, $1 \leq i \leq n+1$, des endomorphismes continus, qui commutent deux à deux et tels que $f_i(K) \subset K$ pour tout $i \leq n+1$. L'ensemble non vide $L = \{x \in K \mid f_i(x) = x,\ i = 1, \ldots n\}$ est un convexe fermé dans le compact K, c'est donc un compact convexe. De plus, L est stable par f_{n+1}, la première question montre alors que f_{n+1} admet au moins un point fixe x_0 dans L. Il s'ensuit que x_0 est un point fixe commun à tous les f_i, $1 \leq i \leq n+1$.
3. $\square$.

Exercice 5.4.19

i. Les applications f_n sont des polynômes en f donc commutent entre elles.

ii. En utilisant la convexité de K, on montre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(K)$ est inclus dans K.

iii. On a : $f_n \circ f_m(K) = f_n(f_m(K)) \subset f_n(K)$, de même on a l'inclusion $f_n \circ f_m(K) = f_m(f_n(K)) \subset f_m(K)$. Ainsi,

$$f_n \circ f_m(K) \subset f_n(K) \cap f_m(K).$$

iv. On montre de même que

$$f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n(K) \subset \bigcap_{1 \leq p \leq n} f_p(K)$$

Ainsi, $(f_n(K))$ est une suite de compacts de K dont aucune sous-suite finie a une intersection vide ; l'intersection des $f_n(K)$ est donc non vide.
Montrons maintenant que l'ensemble des points fixes de $f|_K$ est l'intersection des $(f_n(K))$. Soit x un point fixe de $f|_K$; pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$f_n(x) = \frac{1}{n}(x + f(x) + \cdots + f^{n-1}(x)) = \frac{1}{n}(nx) = x$$

si bien que x est dans $f_n(K)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc dans l'intersection des $f_n(K)$.
Inversement, soit x un élément de l'intersection des $f_n(K)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $a_n \in K$ tel que $x = f_n(a_n)$, c'est-à-dire

$$x = \frac{1}{n}(a_n + f(a_n) + \cdots + f^{n-1}(a_n))$$

On en déduit que

$$f(x) - x = \frac{1}{n}(f^n(a_n) - a_n)$$

et par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\|f(x) - x\| \leq \frac{2M}{n}$$

où $M = \sup_{y \in K} \|y\|$. Par passage à la limie, on obtient $f(x) - x = 0$. L'élément x est donc un point fixe de la restriction $f|_K$. $\square$

Exercice 5.4.20

1. La première assertion implique la deuxième : soit $A > 0$. Puisque $[-A, A]$ est un compact de $\mathbb{R}$, $f^{-1}([-A, A])$ est un copact de $\mathbb{R}$, par suite il est borné. Il existe donc $B > 0$ tel que $f^{-1}([-A, A]) \subset [-B, B]$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$|x| > B \Longrightarrow x \notin [-B, B] \Longrightarrow x \notin f^{-1}([-A, A])$$

Finalement

$$|x| > B \Longrightarrow |f(x)| > A$$

Si bien que $|f(x)|$ tend vers l'infini avec $|x|$.

2. La deuxième assertion implique la première : Soit K un compact de $\mathbb{R}$. Alors K est borné et il existe $A > 0$ tel que $K \subset [-A, A]$. D'après l'hypothèse, il existe $B > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$|x| > B \Longrightarrow |f(x)| > A$$

et donc

$$x \in f^{-1}(K) \Longrightarrow f(x) \in K \Longrightarrow |f(x)| \leq A \Longrightarrow |x| \leq B$$

Cela prouve que $f^{-1}(K) \subset [-B, B]$. Ainsi, $f^{-1}(K)$ est borné. Comme $f^{-1}(K)$ est aussi fermé, en tant qu'image réciproque d'un fermé par une fonction continue, il est donc compact. $\square$

Chapitre 6

Espaces connexes

Il s'agit dans ce chapitre de donner une signification mathématique à la question suivante : un espace donné est-il formé d'un ou plusieurs morceaux ?

6.1 Théorème et Définition

Un espace métrique E est dit connexe s'il vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :

(1) Toute application continue $f : E \to \{0, 1\}$ est constante.

(2) Il n'existe pas de partition de E en deux ouverts non vides de E.

(3) Il n'existe pas de partition de E en deux fermés non vides de E.

(4) Les seules parties de E à la fois ouvertes et fermées sont E et $\emptyset$.

Exemple 6.1.1.

i. Un espace réduit à un point est connexe.

ii. Le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est non connexe. En effet, il existe une partition de $\mathbb{Q}$ en deux ouverts non vides :

$$\mathbb{Q} = \Big(\mathbb{Q} \cap]-\infty, \sqrt{2}[\Big) \cup \Big(\mathbb{Q} \cap]\sqrt{2}, +\infty[\Big)$$

iii. $\mathbb{Z}$ est non connexe, puisque par exemple $\{1\}$ est à la fois un ouvert et un fermé de $\mathbb{Z}$.

iv. Tout espace discret ayant au moins deux éléments n'est pas connexe.

Théorème 6.1.2. *Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.*

Démonstration. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \{0, 1\}$ une fonction continue. Montrons par l'absurde qu'elle est constante. Supposons qu'il existe a et b dans I tels que $f(a) = 0$ et $f(b) = 1$. Quitte à remplacer f par $1 - f$, on peut supposer que $a < b$. L'ensemble

$$A = \{t \in [a, b] \mid f(t) = 0\}$$

est un fermé non vide de $\mathbb{R}$ majoré, donc il admet une borne supérieure t_0 qui appartient à A, c'est-à-dire $f(t_0) = 0$. Puisque f est continue et à valeurs dans $\{0, 1\}$, l'ensemble A est aussi un ouvert de $[a, b]$. Il existe alors $t_1 \in A$ tel que $t_0 < t_1 < b$. Cela contredit le fait que t_0 est la borne supérieure de A.
Réciproquement, soit I un connexe non vide de $\mathbb{R}$. Montrons que I est un intervalle. Soient a et b, $a < b$, deux points de I et $c \in]a, b[$. On doit montrer que c appartient à I. Supposons le contraire et posons

$$I_1 = I \cap] - \infty, c[\quad \text{et} \quad I_2 = I \cap]c, +\infty[$$

Il est clair que I_1 et I_2 constituent une partition de I en deux ouverts de I. Cela contredit le fait que I est connexe. $\square$

Théorème 6.1.3. *Soient E et F deux espaces métriques et $f : E \to F$ une application continue. Alors pour toute partie connexe A de E, l'image $f(A)$ est une partie connexe de F.*

Démonstration. Soit $g : f(A) \to \{0, 1\}$ une application continue. On doit montrer qu'elle est constante. L'application $g \circ f : A \to \{0, 1\}$ est continue sur le connexe A, donc elle est constante sur A. Cela implique que g est constante sur $f(A)$. $\square$

Exemple 6.1.4.

Le cercle $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ est connexe. En effet, l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(t) = (\cos t, \sin t)$$

est continue et $\mathbb{R}$ étant connexe, on en déduit que $f(\mathbb{R}) = S^1$ est connexe.

Théorème 6.1.5 (des valeurs intermédiares)**.** *Soient E un espace connexe et $f : E \to \mathbb{R}$ une application continue. S'il existe a et b dans E tels que $f(a)f(b) \leq 0$, alors il existe $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = 0$.*

Démonstration. D'après le théorème précédent, $f(E)$ est un connexe de $\mathbb{R}$, c'est donc un intervalle de $\mathbb{R}$. Comme $f(a)$ et $f(b)$ sont dans $f(E)$, alors $[f(a), f(b)] \subset f(E)$ (on a supposé à titre d'exemple que $f(a) \leq f(b)$). Par suite, comme $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés, 0 appartient à $f(E)$. Cela veut dire qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = 0$. □

Proposition 6.1.6. *Soit A une partie connexe d'un espace métrique E. Si B est une partie de E telle que $A \subset B \subset \overline{A}$, alors B est connexe. En particulier, l'adhérence d'une partie connexe est connexe.*

Démonstration. Soit $f : B \to \{0, 1\}$ une application continue, on doit montrer qu'elle est constante. La restriction de f à A est continue sur le connexe A, donc elle est constante. Il existe alors $c \in \{0, 1\}$ tel que, pour tout $x \in A$, $f(x) = c$. Soit $x \in B$, x appartient à $\overline{A}$; il existe alors une suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers x. Puisque f est continue sur B et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(a_n) = c$, on en déduit que $f(x) = c$. Cela prouve que f est constante sur B. □

Proposition 6.1.7. *Soit (A_i), $i \in I$, une famille de parties connexes d'un espace métrique E. On suppose qu'il existe $i_0 \in I$ tel que pour tout $i \in I$ on ait $A_{i_0} \cap A_i \neq \emptyset$. Alors la réunion des A_i, $i \in I$, est une partie connexe de E.*

Démonstration. Soit $f : \cup A_i \to \{0, 1\}$ une application continue. Montrons qu'elle est constante. La restriction de f à A_i est continue sur le connexe A_i, donc elle est constante. Il existe alors $c_i \in A_i$ tel que pour tout $x \in A_i$, on ait $f(x) = c_i$. Soit $a \in A_{i_0} \cap A_i$, on a $f(a) = c_{i_0}$, $f(a) = c_i$ et donc $c_i = c_{i_0}$ pour tout $i \in I$. Par suite $f(x) = c_{i_0}$ pour tout $x \in \cup A_i$. □

Corollaire 6.1.8. *Soit (A_i), $i \in I$, une famille de parties connexes d'un espace métrique E telle que $\cap A_i \neq \emptyset$. Alors $\cup A_i$ est connexe.*

Démonstration. Soit a dans l'intersection des A_i. L'ensemble $A = \{a\}$ est un connexe de E, de plus, pour tout $i \in I$, on a $A_i \cap A \neq \emptyset$. D'après la proposition précédente la réunion $A \cup (\cup A_i)$ est connexe. Il en résulte que la réunion des A_i est connexe. □

6.2 Composantes connexes

Définition 6.2.1. *Soit E un espace métrique et x dans E. On appelle composante connexe de x dans E, et on note C_x, la réunion de toutes les parties connexes de E contenant x.*

Ainsi, C_x est la plus grande partie connexe de E contenant x.

Proposition 6.2.2. *La composante connexe C_x de tout élément x de E est un fermé de E.*

Démonstration. C_x étant connexe, son adhérence $\overline{C_x}$ l'est aussi, c'est donc une partie connexe de E contenant x. Comme C_x est la plus grande partie connexe contenant x, on a $\overline{C_x} \subset C_x$. □

Définition 6.2.3. *Une partie A de E est appelée composante connexe de E s'il existe $x \in E$ tel que $A = C_x$.*

Proposition 6.2.4. *Soit E un espace métrique et soient C_x et C_y deux composantes connexes de E. Alors, ou bien $C_x = C_y$ ou bien $C_x \cap C_y = \emptyset$.*

Démonstration. Supposons que $C_x \cap C_y \neq \emptyset$. D'après la proposition (6.1.7), $C_x \cup C_y$ est une partie connexe ; elle contient de plus x. Comme C_x est la plus grande partie connexe contenant x, il vient $C_x = C_x \cup C_y$. Cela montre que $C_y \subset C_x$. Par symétrie, on a $C_x \subset C_y$ et par suite on a l'égalité $C_x = C_y$. □

Proposition 6.2.5. *La relation définie sur E par*

$$x \mathcal{R} y \quad \textit{si} \quad C_x = C_y$$

est une relation d'équivalence sur E.

L'ensemble des composantes connexes de E forme une partition de E en parties fermées connexes.

Proposition 6.2.6. *Soient $E_1, E_2, \ldots, E_n$ des espaces métriques. L'espace métrique produit $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ est connexe si et seulement si E_i est connexe pour $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Démonstration. Supposons que l'espace produit est connexe. Pour tout i, l'application qui à un élément $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ de l'espace produit fait correspondre x_i est continue et son image est E_i. Il en résulte que E_i est connexe pour tout i, $1 \leq i \leq n$.
Pour la réciproque, il suffit de montrer que le produit de deux espaces métriques connexes et un espace connexe. Soit alors E_1 et E_2 deux espaces métriques connexes. Il s'agit de montrer que $E_1 \times E_2$ n'admet qu'une seule composante connexe.

Soient $a = (a_1, a_2)$ et $b = (b_1, b_2)$ deux éléments de $E_1 \times E_2$. On doit montrer que $C_a = C_b$. Soit C la composante connexe de $(b_1, a_2) \in E_1 \times E_2$. L'espace métrique $\{b_1\} \times E_2$ est homéomorphe à E_2, c'est donc un connexe qui contient (b_1, a_2) et par suite $\{b_1\} \times E_2 \subset C$. Cela implique que $b = (b_1, b_2)$ appartient à C, donc $C = C_b$. On montre de même que $C = C_a$, d'où l'égalité $C_a = C_b$. $\square$

6.3 Connexité par arcs

Définition 6.3.1. *Un espace métrique E est dit connexe par arcs si, pour tous a et b dans E, il existe une application continue $\gamma : [0,1] \to E$ telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$. On dit alors que γ est un chemin continu joignant a et b.*

Proposition 6.3.2. *Tout espace E connexe par arcs est connexe.*

Démonstration. Soit $f : E \to \{0,1\}$ une application continue. On doit montrer qu'elle est constante. Soient a et b dans E et soit γ un chemin joignant a et b. L'application $f \circ \gamma : [0,1] \to \{0,1\}$ est continue sur le connexe $[0,1]$, donc elle est constante. On a donc $f \circ \gamma(0) = f \circ \gamma(1)$ et par suite $f(a) = f(b)$. $\square$

Remarque 6.3.3.

La réciproque de cette proposition est fausse. Toutefois, on peut montrer le résultat suivant :
Soit U un ouvert d'un espace vectoriel normé E. Alors U est connexe si et seulement si il est connexe par arcs.

Définition 6.3.4. *Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. On dit que A est convexe si, pour tous a et b dans A, le segment*

$$[a,b] := \{(1-t)a + tb \mid t \in [0,1]\}$$

est inclus dans A.

Proposition 6.3.5. *Toute partie A convexe est connexe par arcs.*

Démonstration. Soient a et b deux éléments de A. L'application γ définie sur $[0,1]$ à valeurs dans A par

$$\gamma(t) = (1-t)a + tb$$

est continue et vérifie $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$. $\square$

Définition 6.3.6. *Un sous-ensemble A d'un espace vectoriel normé E est dit étoilé par rapport à un point $a \in A$ si, pour tout $x \in A$, le segment $[a, x]$ est inclus dans A.*

Proposition 6.3.7. *Soit E un espace vectoriel normé. Un sous-ensemble A de E étoilé est connexe.*

Démonstration. Supposons que A est étoilé par rapport à un point $a \in A$. D'une part, A est égal à la réunion des intervalles $[a, x]$, pour x variant dans A, et d'autre part le segment $[a, x]$ est convexe donc connexe. Le corollaire 6.1.8 montre alors que A est connexe. □

6.4 Exercices

Exercice 6.4.1.

i. Montrer que le groupe $\mathrm{O}(3)$ formé des matrices orthogonales d'ordre 3 n'est pas connexe.
ii. Montrer que, pour tout $M \in \mathrm{O}(3)$, il existe $P \in \mathrm{O}(3)$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \{-1, 1\}$ tels que $M = PR_\lambda(\theta)P^{-1}$ avec

$$R_\lambda(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

iii. En déduire que $\mathrm{SO}(3) := \{M \in \mathrm{O}(3) \mid \operatorname{Det} M = 1\}$ est connexe par arcs.
iv. Montrer que $\mathrm{SO}^-(3) := \{M \in \mathrm{O}(3) \mid \operatorname{Det} M = -1\}$ est connexe par arcs.
v. Déterminer les composantes connexes de $\mathrm{O}(3)$.

Exercice 6.4.2.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et injective.

i. Montrer que $A = \{(x, y) \in I \times I \mid x < y\}$ est connexe dans $\mathbb{R}^2$.
ii. En déduire que f est strictement monotone.

Exercice 6.4.3.

i. Montrer que $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ est une partie connexe de $\mathbb{R}^2$.
ii. Montrer que si $f : S^1 \to \mathbb{R}$ est une application continue, alors il existe $z_0 \in S^1$ tel que $f(z_0) = f(-z_0)$.

iii. Montrer qu'il n'existe pas d'application continue injective de S^1 dans $\mathbb{R}$.

iv. Montrer que S^1 n'est homéomorphe à aucune partie de $\mathbb{R}$.

v. Montrer que $\mathbb{R}^2$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}$.

Exercice 6.4.4.

Soit $f : S^1 \to S^1$ une fonction continue telle que $f \circ f = \mathrm{id}$.

i. Montrer que l'application définie sur S^1 par

$$g(x) = \mathrm{Det}(x, f(x))$$

est continue sur S^1.

ii. Que vaut $g(f(x))$?

iii. Montrer qu'il existe $a \in S^1$ tel que $g(a) = 0$.

iv. Montrer qu'il existe $a \in S^1$ tel que $f(a) = \pm a$.

Exercice 6.4.5.

Soit E un espace métrique séparé et (K_n), $n \geq 0$, une suite décroissante de compacts connexes non vides de E. Montrer que l'intersection des K_n, $n \geq 0$, est un connexe.

Exercice 6.4.6.

Soit $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Det}\, A > 0\},$$
$$\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Det}\, A < 0\}.$$

i. Montrer que $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$ sont deux ouverts de $M_n(\mathbb{R})$ homéomorphes.

ii. Soit S une matrice symétrique, définie positive et I la matrice identité de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer qu'il existe un chemin joignant I à S dans $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$.

iii. Soit U une matrice orthogonale de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Det}\, U = 1$. Montrer qu'il existe un chemin joignant I à U dans $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$.

iv. En déduire que $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

v. Déterminer les composantes connexes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 6.4.7. (Théorème de Darboux)

Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable sur I.

i. Montrer que l'ensemble

$$\Gamma = \left\{ \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \mid x, y \in I \text{et } x < y \right\}$$

est connexe.

ii. Montrer que $\Gamma \subset f'(I) \subset \overline{\Gamma}$.

iii. Montrer que $f'(I)$ est un intervalle.

Exercice 6.4.8.

Montrer que si E est un espace métrique connexe non borné, aucune sphère de E n'est vide.

Exercice 6.4.9.

Soit $f : E \to F$ une application entre deux espaces métriques. On dit que f est localement constante si tout $x \in E$ admet un voisinage dans lequel f est constante.

i. Montrer que si E est connexe, alors il y a équivalence entre f est localement constante et f est constante.

ii. Donner un exemple d'application localement constante qui n'est pas constante.

Exercice 6.4.10.

Soient E un espace de Banach et $f : E \to E$ une application continue. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout x et y dans E,

$$\|f(x) - f(y)\| \geq \alpha \|x - y\|.$$

i. Montrer que l'application f est fermée.

ii. On suppose de plus que f est ouverte.

a) Montrer que f est un homéomorphisme.

b) Montrer que si $\alpha > 1$, alors f admet un unique point fixe dans E.

6.5 Correction des exercices

Exercice 6.4.1

i. L'application $\mathrm{Det} : \mathrm{O}(3) \to \{-1, 1\}$ est continue et non constante, puisque, par exemple, le déterminant de la matrice identité vaut 1 alors que celui de la matrice diagonale D dont la diagonale est $(-1, 1, 1)$ vaut -1. Il en résulte que $\mathrm{O}(3)$ n'est pas connexe.

ii. Soit f un endomorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^3$ et M sa matrice représentative dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Le polynôme caractéristique de f est de degré 3, donc admet au moins une racine réelle λ. Celle-ci est une valeur propre de f et il existe un vecteur $e_3 \in \mathbb{R}^3$, de norme 1 tel que $f(e_3) = \lambda e_3$. Comme f est orthogonale alors $\lambda \in \{-1, 1\}$. Le sous-espace E orthogonal à $\mathrm{Vect}(e_3)$ est stable par f. Soit $\tilde{f}$ l'endomorphisme de E induit par f. L'application $\tilde{f}$ est un endomorphisme orthogonal de E, sa matrice représentative dans une base orthonormée est de la forme

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Dans le deuxième cas, $\tilde{f}$ est symétrique et a pour déterminant -1, donc il existe une base orthonormée (e_1, e_2) dans laquelle la matrice de $\tilde{f}$ est $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice de f dans la base (e_1, e_2, e_3) est alors

$$M(f, (e_1, e_2, e_3)) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Donc si $\lambda = 1$, on a

$$M(f, (e_3, e_2, e_1)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

Si $\lambda = -1$, alors

$$M(f, (e_1, e_3, e_2)) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, dans tous les cas il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice représentative de f est

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

avec $\lambda \in \{-1, 1\}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

iii. Soit $M \in \mathrm{SO}(3)$, $M = PR_\lambda(\theta)P^{-1}$. Comme le déterminant de M vaut 1, on a $\mathrm{Det}\, R_\lambda(\theta) = \lambda = 1$ et $M = PR_1(\theta)P^{-1}$. L'application $\gamma : [0,1] \to \mathrm{SO}(3)$ définie par

$$\gamma(t) = PR_1(t\theta)P^{-1}$$

est un chemin continue joignant l'identité à la matrice M. Par suite, $\mathrm{SO}(3)$ est connexe par arcs.

iv. Soit D la matrice diagonale telle que $\mathrm{diag}(D) = (-1, 1, 1)$. L'application $f : \mathrm{SO}^+(3) \to \mathrm{SO}^-(3)$ définie par $f(A) = DA$ est un homéomorphisme. Il en résulte que $\mathrm{SO}^-(3)$ est connexe par arcs.

v. Les composantes connexes de $\mathrm{O}(3)$ sont $\mathrm{SO}^+(3)$ et $\mathrm{SO}^-(3)$.

Exercice 6.4.2

i. Montrons que A est convexe. Soient (x, y) et (x', y') dans A et soit $\lambda \in]0, 1[$. L'élément

$$(1-\lambda)(x, y) + \lambda(x', y') = ((1-\lambda)x + \lambda x', (1-\lambda)y + \lambda y')$$

est dans A car $(1-\lambda)x + \lambda x' < (1-\lambda)y + \lambda y'$. Ainsi, A est convexe donc il est connexe.

ii. Puisque f est injective sur l'intervalle I, l'application g définie par $g(x, y) = f(x) - f(y)$ ne s'annule pas sur A et elle est continue sur A avec $g(A) \subset]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. Comme A est connexe, $g(A)$ est un intervalle et est donc inclus soit dans $]-\infty, 0[$ soit dans $]0, +\infty[$. Dans le premier cas f est strictement décroissante et dans le deuxième cas f est strictement croissante.

Exercice 6.4.3

1. Voir l'exemple 6.1.4.
2. L'application $g : S^1 \to \mathbb{R}$ définie par $g(z) = f(z) - f(-z)$ est continue sur le connexe S^1 et $g(z)g(-z) \leq 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $z_0 \in S^1$ tel que $g(z_0) = 0$.
3. S'il existe une application $f : S^1 \to \mathbb{R}$ continue, alors il existerait $z_0 \in S^1$ tel que $f(z_0) = f(-z_0)$ et par suite f ne serait pas injective.
4. Supposons que S^1 soit homéomorphe à une partie A de $\mathbb{R}$ et soit $f : S^1 \to A$ cet homéomorphisme. L'application $\tilde{f} : S^1 \to \mathbb{R}$ définie par $\tilde{f}(z) = f(z)$ est continue et injective, ce qui contredit le résultat de la question précédente.
5. Supposons qu'il existe un homéomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. L'application $f|_{S^1} : S^1 \to \mathbb{R}$ est donc continue et injective, ce qui contredit une fois encore le résultat de la question 3. On peut faire aussi le raisonnement suivant : s'il existe un homéomorphisme $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, alors $f : \mathbb{R}^2\backslash\{0\} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ serait continue et bijective. Or, $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ est connexe par arcs, donc connexe ; mais $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ n'est pas un intervalle, donc n'est pas connexe.

Exercice 6.4.4

i. L'application g est la composée des deux applications continues
$F : S^1 \to S^1 \times S^1$ et $G : S^1 \times S^1 \to \mathbb{R}$ définies par

$$F(x) = (x, f(x)), \quad G(x, y) = \mathrm{Det}(x, y),$$

elle est donc continue.

ii. On a

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= \mathrm{Det}(f(x), f(f(x))) = \mathrm{Det}(f(x), x) \\ &= -\det(x, f(x)) = -g(x). \end{aligned}$$

iii. L'application g est continue sur le connexe S^1 et

$$g(x)g(f(x)) = -(g(x))^2 \leq 0,$$

donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $a \in S^1$ tel que $g(a) = 0$.

iv. On a $g(a) = 0$, donc $\mathrm{Det}(a, f(a)) = 0$, si bien que la famille $(a, f(a))$ est liée dans $\mathbb{R}^2$. Il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = \alpha a$. Ce qui implique que $|f(a)| = |\alpha||a|$ et donc $\alpha = \pm 1$, car a et $f(a)$ sont dans S^1. $\square$

Exercice 6.4.5 La correction est laissée au lecteur.

Exercice 6.4.6

i. L'application Det est continue sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert. Comme

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) &= \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \cap (\mathrm{Det})^{-1}(]0, +\infty[) \\ \mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R}) &= \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \cap (\mathrm{Det})^{-1}(]-\infty, 0[) \end{aligned}$$

On en déduit que $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$ sont deux ouverts de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. De plus, l'application $A \mapsto DA$, où D est la matrice diagonale dont la diagonale principale est $(-1, 1, \ldots, 1)$, est un homéomorphisme de $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$.

ii. La matrice S étant symétrique et définie positive, elle est semblable à la matrice diagonale dont la diagonale est $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ où les $\lambda_i > 0$ sont les valeurs propres de S et il existe une matrice orthogonale P telle $S = PDP^{-1}$. On pose, pour t dans $[0, 1]$, $\lambda_i(t) = (1-t)1 + t\lambda_i$ et $S(t) = PD(t)P^{-1}$ où $D(t)$ désigne la matrice diagonale, dont les éléments de la diagonale principale sont les $\lambda_i(t)$, $1 \leq i \leq n$. Il est clair que $\lambda_i(t) > 0$ pour tout i, donc $S(t)$ est dans $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$, avec $S(0) = I$ et $S(1) = S$. Ainsi, l'application $t \mapsto S(t)$ est un chemin joignant l'identité I à la matrice S dans $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$.

iii. La matrice U est orthogonale et $\operatorname{Det} U = 1$, donc il existe une matrice orthogonale P de $\mathrm{M_n}(\mathbb{R})$ et une matrice Δ diagonale par bloc de la forme $\Delta = \operatorname{diag}(B_1, B_2, \ldots, B_p)$ telles que $U = P\Delta P^{-1}$, avec

$$B_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad B_i = 1.$$

Pour $t \in [0,1]$, on pose $U(t) = P\Delta(t)P^{-1}$ avec

$$\Delta(t) = \operatorname{diag}(B_1(t), B_2(t), \ldots, B_p(t))$$

$$B_i(t) = \begin{pmatrix} \cos t\theta_i & -\sin t\theta_i \\ \sin t\theta_i & \cos t\theta_i \end{pmatrix}, \quad \text{ou} \quad B_i = 1$$

La matrice $U(t)$ appartient à $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$, $U(0) = I$, $U(1) = U$ et l'application $t \mapsto U(t)$ est un chemin joignant I à U dans $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$.

iv. Soit A la matrice de $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$. D'après la décomposition polaire, il existe un couple unique (U, S), où U est orthogonle, S est symétrique définie positive, tel que $A = US$. On pose $A(t) = U(t)S(t)$, où $U(t)$ et $S(t)$ sont comme dans les questions 2) et 3). L'application $t \mapsto A(t)$ est un chemin joignant I à A dans $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$. Cela montre que $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

v. $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$ étant homéomorphe à $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ est lui-même connexe par arcs. Comme $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) \cup \mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$, on en déduit que les composantes connexes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sont $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$. $\square$

Exercice 6.4.7

i. On pose $A = \{(x,y) \in I \times I \mid x < y\}$ et

$$g((x,y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

On a $\Gamma = g(A)$, comme A est connexe et g est continue, on en déduit que Γ est connexe.

ii. Soit $z \in \Gamma$. Il existe (x,y) dans A tel que $z = g(x,y)$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe c compris entre x et y tel que

$$g(x,y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(c)$$

si bien que z est dans $f'(I)$. Cela montre que $\Gamma \subset f'(I)$. Soit y dans $f'(I)$ il existe alors $a \in I$ tel que $y = f'(a)$.

Pour $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $(a, a+1/n_0)$ soit dans A, on définit la suite $(y_n)_{n\geq n_0}$ par

$$y_n = \frac{f(a+\frac{1}{n}) - f(a)}{1/n}$$

La suite $(y_n)_{n\geq n_0}$ est dans Γ, converge et a pour limite $f'(a)$; si bien que y est dans $\overline{\Gamma}$. D'où l'iclusion $f'(I) \subset \overline{\Gamma}$.

iii. La proposition (6.1.6) montre que $f'(I)$ est un connexe de $\mathbb{R}$, c'est donc un intervalle de $\mathbb{R}$. □

Exercice 6.4.8
Supposons qu'il existe une sphère de centre a et de rayon $r > 0$ qui soit vide. On a alors

$$E = \{x \in E \mid \mathrm{d}(x, a) < r\} \cup \{x \in E \mid \mathrm{d}(x, a) > r\}$$

L'ensemble E est ainsi la réunion de deux ouverts disjoints, le premier a et le second est non vide puisque E est non borné. Cela est en contradiction avec la connexité de E. □

Exercice 6.4.9 La correction est laissée au lecteur.

Exercice 6.4.10

i. Soit A un fermé de E et montrons que $f(A)$ est encore un fermé de E. Soit (y_n) une suite de $f(A)$ qui converge vers $y \in E$. Il s'agit de prouver que y est dans $f(A)$. Il existe une suite (a_n) de A telle que $y_n = f(a_n)$, pour tout n. Pour n et m dans $\mathbb{N}$, on a

$$\alpha\|a_m - a_n\| \leq \|f(a_m) - f(a_n)\| = \|y_m - y_n\|$$

La suite (y_n) étant convergente est de Cauchy et l'inégalité ci-dessus montre qu'il en ait de même de la suite (a_n). Comme E est complet, la suite (a_n) converge vers un élément a qui est forcément dans A, car celui-ci est un fermé de E. Par continuité de f, la suite (y_n) converge vers $f(a)$ et par suite $y = f(a)$ appartient bien à $f(A)$.

ii. a) L'application f est injective. En effet, si $f(x) = f(y)$, on aura $0 \geq \alpha\|x - y\|$ et par suite $x = y$.
Montrons que f est surjective, ou encore que $f(E) = E$. L'application f étant à la fois ouverte et fermée, $f(E)$ est à la fois un ouvert et un fermé non vide du connexe E. Il en résulte que $f(E) = E$. Ainsi, f est une bijection de E sur E. Montrons que f^{-1} est continue. Soit A un fermé de E. On a

$$\left(f^{-1}\right)^{-1}(A) = f(A)$$

est un fermé de E, il s'ensuit que f^{-1} est continue.

b) On a pour tous a et b dans E,

$$\|f^{-1}(a) - f^{-1}(b)\| \leq \frac{1}{\alpha}\|a - b\|$$

si bien que, si $\alpha > 1$, alors f^{-1} est une application contractante de l'espace de Banach E dans lui-même. Donc f^{-1} admet un unique point fixe dans E. Celui-ci est encore l'unique point fixe de f. $\square$

Bibliographie

1) Bourbaki N. (1990) Topologie Générale, Masson.

2) Choquet G. (1992) Cours de Topologie, Masson.

3) Dixmier J. (1981) Topologie Générale, Presse Université de France.

4) Schwartz L. (1980) Topologie Générale et Analyse Fonctionnelle, Hermann.

5) Berger C. (2004) Topologie pour la licence , cours et exercices.Université de Nice-Sophia Antipolis.

6) Mohsen J. P. Cours de Topologie (en ligne)