

Géométrie dans l'espace

Mabrouk Brahim

Université Virtuelle de Tunis

2007

Ce cours a pour objet la présentation des différents concepts de la géométrie de l'espace comme une continuation de ceux vus en géométrie élémentaire du plan.

Certains théorèmes fondamentaux , comme le théorème d'Euclide ou le théorème de Thalès, peuvent être présentés dans le plan comme des postulats, alors que dans l'espace, ils font l'objet de démonstrations simples et élégantes.

La perpendicularité dans le plan prend dans l'espace deux formes proches mais bien distinctes : la perpendicularité suppose l'existence d'une intersection non vide, alors que l'orthogonalité de deux droites suppose qu'elles ne sont pas coplanaires.

Une place importante est réservée dans ce cours à plusieurs transformations de l'espace, l'approche choisie étant la généralisation des définitions et des propriétés des transformations du plan.

De nombreux exercices sont proposés à la fin de chaque chapitre. Ils visent à aider l'étudiant à raisonner dans l'espace, contrôler sa connaissance du cours et à résoudre des problèmes.

Chapitre 1 : Axiomes d'incidences et d'ordre

1. Axiomes d'incidence et d'ordre

1-1- Introduction

L'espace ξ_3 est un ensemble non vide dont les éléments sont appelés points. Parmi les sous-ensembles non vides de ξ_3 on distingue la famille Δ dont les éléments sont appelés **droites** et la famille Π dont les éléments sont appelés **plans**. Afin que le contenu de ce paragraphe ne soit pas en quelque sorte vide, nous allons admettre le pseudo-axiome suivant qui sera une conséquence des axiomes.

A_0 : Toute droite de ξ_3 contient au moins trois points distincts et tout plan de ξ_3 contient au moins deux droites distinctes.

1-2- Axiome A_1

A_1 : Par deux points distincts, il passe une droite et une seule.

Notation : soit A et B deux points distincts de ξ_3 , la notation (AB) désignera la droite contenant ces deux points.

1-3- Axiome A_2

A_2 : Si un plan Π contient deux points distincts A et B, alors Π contient la droite (AB).

1-4- Axiome A_3

A_3 : Pour trois points de ξ_3 il passe au moins un plan.

1-5- Définition

Soit deux droites Δ et Δ' . Ces deux droites sont dites **parallèles** si et seulement Δ et Δ' sont confondues ou si Δ et Δ' sont coplanaires avec $\Delta \cap \Delta' = \emptyset$.

On écrira $\Delta // \Delta'$ pour indiquer que Δ et Δ' sont parallèles.

Nota bene : Des points de ξ_3 sont dits coplanaires lorsque ces points appartiennent à un même plan.

1-6- Axiome A_4 (Postulat d'Euclide)

A_4 : Pour tout plan Π , toute droite $\Delta \subset \Pi$ et tout point M de Π tel que $M \notin \Delta$, il existe une droite unique Δ' passant par M et parallèle à Δ .

1-7- Remarques

- Si $M \in \Delta$, il est évident que Δ est la seule parallèle issue de M à Δ .
- Il découle immédiatement de l'axiome A_4 que dans tout plan Π la relation de parallélisme est une relation d'équivalence et que deux droites de Π qui ne sont pas parallèles sont sécantes.

1-8- Axiome A_5

A_5 : Toute droite est munie de deux structures d'ordre total opposées.

Commentaire :

- 1) Rappelons qu'une relation binaire P définie sur un ensemble E est une relation d'ordre total si P est réflexive, transitive, antisymétrique et vérifie en plus :

$$\forall (a,b) \in E^2, a P b \text{ ou } b P a.$$

- 2) L'axiome A_5 exprime l'idée intuitive suivante : sur toute droite il existe 2 sens de « parcours »

- 3) Soit Δ une droite ; désignons par P_Δ et $\overline{P_\Delta}$ les deux relations d'ordre total sur Δ ; P_Δ et $\overline{P_\Delta}$ sont opposées signifie :

$$\forall (A,B) \in \Delta^2 \quad A \overline{P_\Delta} B \Leftrightarrow B \overline{P_\Delta} A$$

1-9- Définitions et notations

Soit A et B deux points d'une droite Δ . Désignons pour simplifier par \leq la relation d'ordre sur Δ telle que $A \leq B$. On définit alors d'une façon naturelle les **intervalles** $[AB]$, $]AB]$, $[AB[$, $]AB[$ d'extrémités A et B. De même on définit les **demi-droites** $] \leftarrow A$, $] \leftarrow A[$, $[A \rightarrow [$, $]A \rightarrow [$ comme dans **R**.

Il est évident qu'en tant que sous-ensembles les intervalles et les demi-droites sont indépendants de la relation d'ordre total choisie sur Δ .

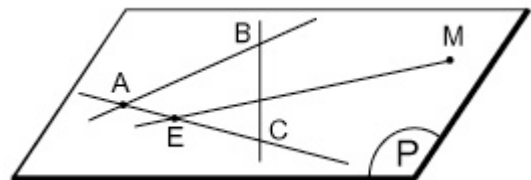
2. Conséquences rapides des axiomes d'incidence et d'ordre

2-1- Théorème

Trois points distincts A, B et C non alignés déterminent un plan.

Démonstration :

1- D'après l'axiome A_3 , il existe un plan P passant par A, B et C. Supposons qu'il existe un autre plan Q contenant A, B et C. Ce plan contient alors les droites (AB), (BC) et (CA).



(Figure 2)

Soit M un point de P.

Il découle de l'axiome A_2 que si M appartient à l'une des droites (AB), (BC), (AC), M appartient alors à Q. Supposons M extérieur à ces trois droites et soit $E \in]AC[$. D'après le postulat d'Euclide (Axiome A_4) appliqué dans le plan P, la droite (ME) ne peut être parallèle à la fois à (AB) et à (BC). Il s'ensuit que (ME) coupe l'une de ces droites, (BC) par exemple en un point que l'on note F. Mais les droites (AB) et (BC) sont aussi contenues dans le plan Q, alors F et E appartiennent au plan Q; il s'ensuit que la droite (FE) est contenue dans Q et que M appartient à Q, et par suite $P \subset Q$. Un raisonnement identique montre que $Q \subset P$.

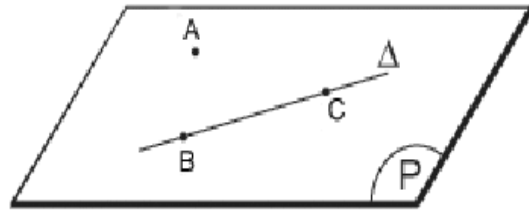
D'où $P \equiv Q$.

2-2- Théorème

Une droite Δ et un point A extérieur à Δ déterminent un plan.

Démonstration :

Soit deux points distincts B et C de Δ .
Soit P le plan contenant A, B et C (l'unicité de P découle du théorème 2.1) ; tout plan Q contenant A et Δ contient A, B et C, il coïncide donc avec P d'après le théorème 2.1.



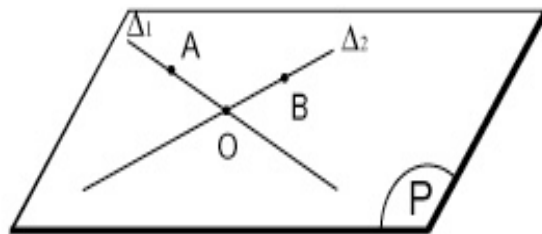
(Figure 3)

2-3- Théorème

Deux droites concourantes déterminent un plan.

Démonstration :

Soit Δ_1 et Δ_2 deux droites concourantes en O. Soit A et B deux points de Δ_1 et Δ_2 autre que O. Soit P le plan passant par O, A et B. Le raisonnement précédent montre que P est le seul plan contenant Δ_1 et Δ_2 .



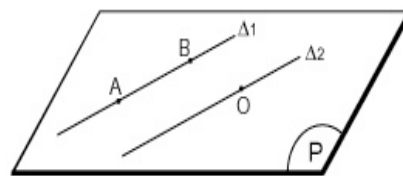
(Figure 4)

2-4- Théorème

Deux droites strictement parallèles déterminent un plan

Démonstration :

Soit Δ_1 et Δ_2 deux droites strictement parallèles, A et B deux points distincts de Δ_1 et $O \in \Delta_2$. Il en résulte que O est distinct de A et de B. Soit P le plan (OAB). Tout plan Q contenant Δ_1 et Δ_2 contient O, A et B; il coïncide donc avec P.



(Figure 5)

Exercices

Exercice 1

Soit, P un plan, (ABC) un triangle de P et O un point non situé dans ce plan.

Soit $M \in (AB)$ et $N \in (AC)$. Préciser l'intersection du plan (OMN) et de la droite (BC).

Exercice 2

Soit (ABC) un triangle d'un plan P et S un point non situé dans ce plan. Soit α, β, γ les milieux respectifs de [SA], [SB] et de [SC].

- 1- Montrer que les plans (ABC) et $(\alpha\beta\gamma)$ n'ont aucun point commun.
- 2- Soit G le centre de gravité du triangle ABC. SG coupe le plan $(\alpha\beta\gamma)$ en un point G'.
Montrer que G' est le centre de gravité du triangle $(\alpha\beta\gamma)$.

Exercice 3

Soit P, Q et R trois plans passant par une même droite Δ . Etudier les positions des intersections de ces trois plans avec un quatrième plan Q.

Exercice 4

On mène par un point O trois demi-droites Ox, Oy et Oz non situées dans un même plan ; deux plans P et Q parallèles coupe Ox, Oy, Oz en A, B, C et en A', B', C' respectivement.

Montrer que les centres de gravité de ces deux triangles sont alignés avec O.

Exercice 5

Soit P un plan et S un point. On appellera perspective d'un point M le point d'intersection de (SM) avec P et perspective d'une figure F la figure f obtenue en prenant les perspectives de ses différents points.

- 1- A quelle condition un point M a-t-il une perspective ?
- 2- Démontrer que la perspective d'une droite Δ non parallèle à P est une droite d qui passe par le point d'intersection de la parallèle à Δ menée de S avec P .
- 3- Quelle particularité présentent les perspectives de deux droites parallèles ?
- 4- Quelle particularité présentent les perspectives de deux droites concourantes ? En déduire la condition nécessaire et suffisante pour que les perspectives de deux droites concourantes soient parallèles.
- 5- On considère un quadrilatère plan $ABCD$. Ce quadrilatère et le plan P étant donnés, où doit-on prendre le point S pour que la perspective de ce quadrilatère soit un trapèze ? cette perspective peut-elle être un parallélogramme ?

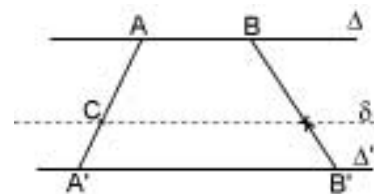
Chapitre 2 : Convexité.

Postulat d'Euclide dans l'espace

1. Convexité

1-1- Axiome A_6

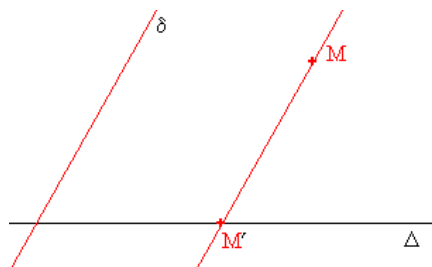
A_6 : Soit Δ et Δ' deux droites strictement parallèles, A, B deux points distincts de Δ , A', B' deux points distincts de Δ' et $C \in]AA'[,$ Alors la droite δ passant par C et parallèle à Δ coupe $]BB'[,$



(Figure 1)

1-2- Définition

Soit Δ une droite d'un plan P et δ une droite de P sécante avec Δ . Soit M un point de P; la parallèle à δ passant par M coupe Δ en M' . L'application p, qui au point M associe le point M' , est appelée projection sur Δ parallèlement à δ .



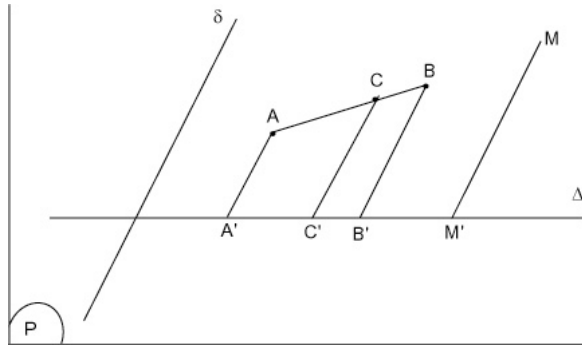
1-3- Théorème

Soit Δ une droite d'un plan P et δ une droite de P sécante avec Δ . Désignons par p la projection sur Δ parallèlement à δ . Alors, pour tout couple (A,B) de points de P,

$$p([AB])=[p(A) p(B)].$$

Soit $M \in P$, alors $p(M)$ est le point M' de Δ tel que $(MM') \parallel \delta$.

Soit A et B deux points de P et $C \in [AB]$ il découle immédiatement de l'axiome A_6 que $p([AP]) = [A'B']$ où $A' = p(A)$ et $B' = p(B)$.



(Figure 7)

1-4- Définition (convexité)

Soit A une partie non vide de E_3 . On dit que A est **convexe** si chaque fois que A contient deux points A et B , elle contient le segment $[AB]$.

Il est clair que l'espace ξ_3 , toute droite de ξ_3 , toute demi-droite de ξ_3 , et tout plan de ξ_3 , est convexe, ainsi que tout intervalle.

On appelle **composante convexe** de A toute partie convexe non vide B de A telle que toute partie X de A contenant strictement B n'est pas convexe.

Il est évident que si A est une partie convexe, A possède alors une seule composante convexe qui est A elle-même.

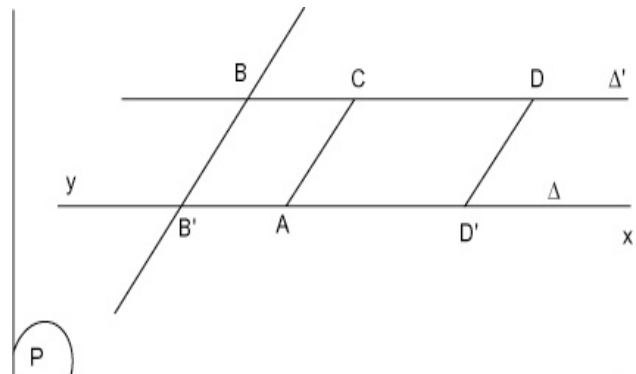
1-5- Corollaire

Soit Δ une droite et $A \in \Delta$. Alors $\Delta - \{A\}$ admet exactement deux composantes convexes.

Soit Δ' une droite strictement parallèle à Δ et P le plan déterminé par Δ et Δ' .

$\Delta - \{A\}$ détermine deux demi-droites $]Ax)$ et $]Ay)$ qui sont convexes. De plus, $\Delta - \{A\} =]Ax) \cup]Ay)$.

Il suffit alors de démontrer que chacune de ces deux demi-droites est non vide.



(Figure 8)

Δ' contient d'après A_0 au moins 3 points distincts B, C et D

Supposons que $C \in]BD[$ et soit p la projection sur Δ parallèlement à (AC) . D'après le théorème 2-6, A appartient à $[B'D'] = [p(B) p(D)]$. De plus, pour des raisons évidentes, $A \in]B'D'[$. Par suite, l'un des deux points B' ou D' appartient à $]Ax[$ et l'autre à $]Ay[$.

1-6- Axiome A_7

A_7 : Soit P un plan de l'espace ξ_3 ; alors $\xi_3 - P$ admet exactement deux composantes convexes Σ_1, Σ_2 . De plus si $A \in \Sigma_1$ et $B \in \Sigma_2$ alors $]AB[\cap P \neq \emptyset$.

Remarque : On reformule parfois A_7 en disant qu'un plan partage l'espace en deux demi-espaces.

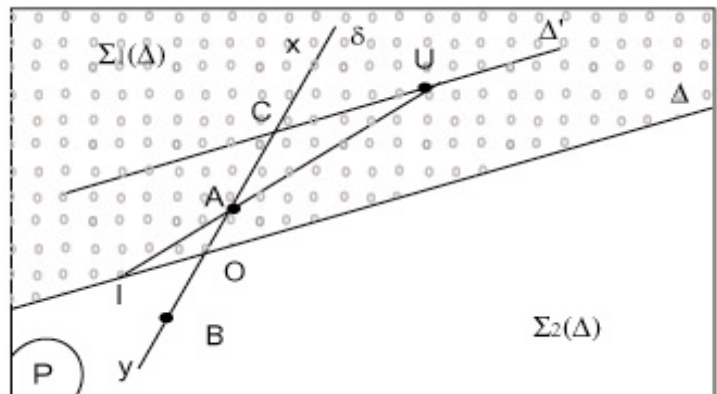
1-7- Théorème

Soit P un plan de Δ une droite de P . Alors $P-\Delta$ possède exactement deux composantes convexes $\Sigma_1(\Delta)$ et $\Sigma_2(\Delta)$. De plus $A \in \Sigma_1(\Delta)$, $B \in \Sigma_2(\Delta)$ et $]AB[\cap \Delta \neq \emptyset$.

Démonstration :

Soit δ une droite coupant Δ en O . La partie $\delta - \{O\}$ de P est composée, d'après le corollaire 2-7, de deux demi-droites $]Ox[$ et $]Oy[$ convexes et de plus chacune de ces deux demi-droites est non vide.

Soit $A \in]Ox[$ et $B \in]Oy[$.



(Figure 9)

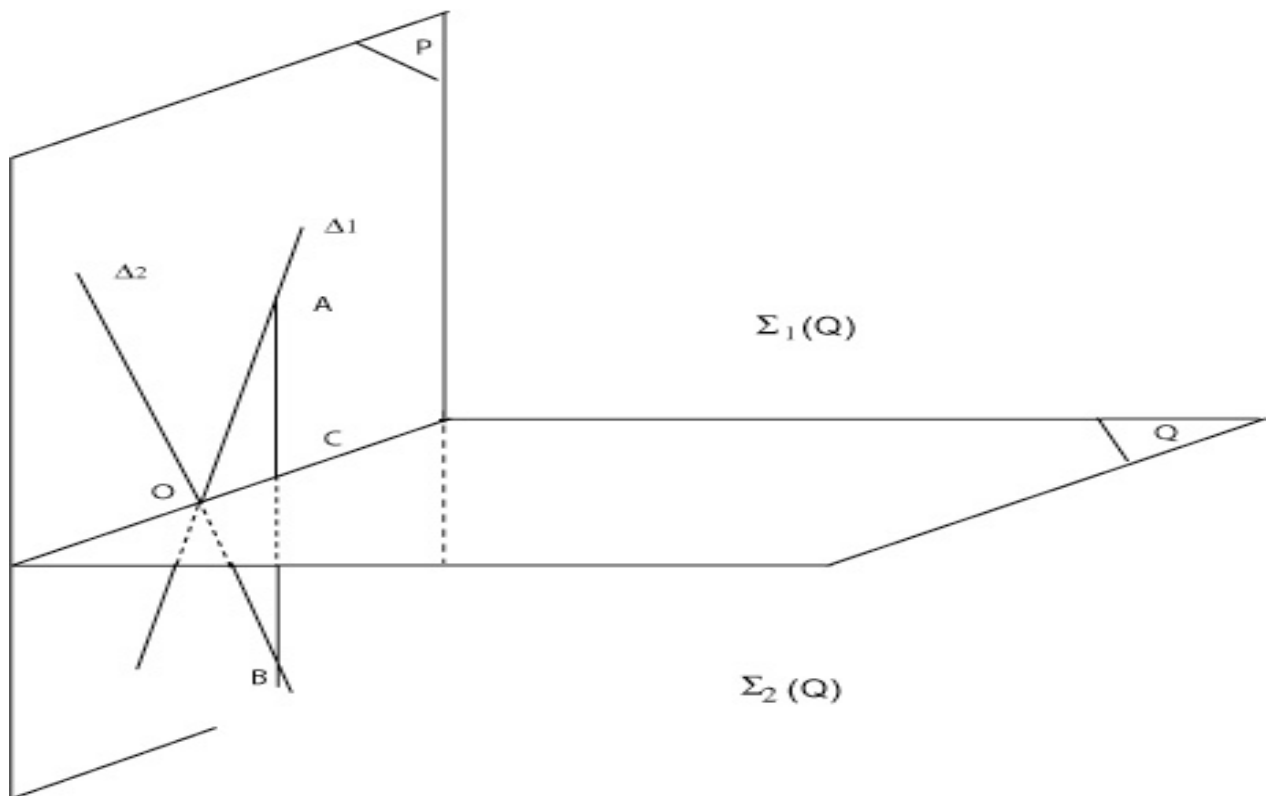
Désignons par $\Sigma_1(\Delta)$ la composante convexe de $P-\Delta$ contenant A et par $\Sigma_2(\Delta)$ la composante convexe de $P-\Delta$ contenant B . Montrons que $\{\Sigma_1(\Delta), \Sigma_2(\Delta)\}$ est une partition de $P-\Delta$. En effet, soit $U \in P-\Delta$; la parallèle Δ' à Δ , issue de U , coupe δ en un point $C \in \delta - \{O\}$.

Supposons que $C \in]Ox[$; comme $[AC]$ est convexe et que $\Sigma_1(\Delta)$ est la plus grande partie convexe de $P-\Delta$ contenant A , $[AC] \subset \Sigma_1(\Delta)$. Montrons $[AU] \subset \Sigma_1(\Delta)$, ce qui prouvera que $U \in \Sigma_1(\Delta)$.

Si $A \equiv C$, c'est évident. Supposons $A \neq C$. Soit I le point d'intersection de (AU) avec Δ ; $I \notin [AU]$, sinon, d'après l'axiome A_6 , la parallèle (IO) couperait (AC) en un point appartenant à $]AC[$; or $O \notin [AC]$, car $[AC] \subset]Ox)$. Donc $[AU] \subset P - \Delta$, et par suite, puisque $[AU]$ est convexe, $[AU]$ est contenue dans $\Sigma_1(\Delta)$; de même si $C \in]Oy)$, $U \in \Sigma_2(B)$. Autrement dit, $P - \Delta \subset \Sigma_1(\Delta) \cup \Sigma_2(\Delta)$; et comme $\Sigma_1(\Delta) \cup \Sigma_2(\Delta) \subset P - \Delta$ par définition, il en résulte que $P - \Delta = \Sigma_1(\Delta) \cup \Sigma_2(\Delta)$. Le fait que $\Sigma_1(\Delta) \cap \Sigma_2(\Delta)$ est vide et que $]AB[\cap \Delta \neq \emptyset$ découle immédiatement de ce qui précède.

1-8- Théorème

Soit P et Q deux plans distincts contenant chacun le point O . Alors, l'intersection de P et Q est une droite contenant O .



(Figure 10)

Démonstration (voir figure 10)

Soit Δ_1 et Δ_2 deux droites distinctes passant par O et contenues dans P . Si l'une de ces droites est contenue dans Q , cette droite est l'intersection de P et Q . Supposons

qu'aucune des droites Δ_1 , Δ_2 ne soit contenue dans Q . Soit $\Sigma_1(Q)$ et $\Sigma_2(Q)$ les composantes convexes de $\xi_3 - Q$. (axiome A_7). Soit $A \in \Delta_1 \cap \Sigma_1(Q)$ et $B \in \Delta_2 \cap \Sigma_2(Q)$. D'après l'axiome A_7 , $[AB]$ coupe Q en un point C . Il est clair que C est distinct de O et que $C \in P \cap Q$. Donc $P \cap Q = (OC)$.

Remarque

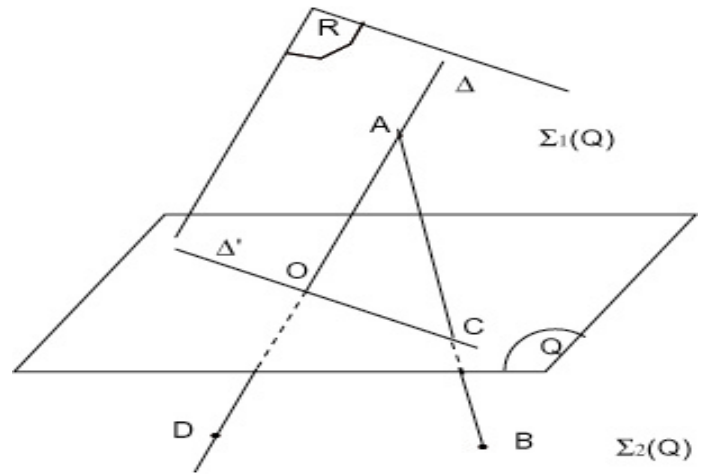
Dans la démonstration précédente nous avons pris un point A de $\Delta_1 \cap \Sigma_1(Q)$ et un point B de $\Delta_2 \cap \Sigma_2(Q)$. Cela suppose que $\Sigma_1(Q) \cap \Delta_1 \neq \emptyset$ et $\Sigma_2(Q) \cap \Delta_2 \neq \emptyset$. Démontrons ce fait qui sera une conséquence du lemme suivant.

1-9- Lemme

Soit Q un plan de ξ_3 et Δ une droite qui coupe Q en O .
 Soit $\Sigma_1(Q)$ et $\Sigma_2(Q)$ les deux composantes convexes de $\xi_3 - Q$. Alors $\Sigma_1(Q) \cap \Delta \neq \emptyset$ et $\Sigma_2(Q) \cap \Delta \neq \emptyset$

Soit A un point de Δ autre que O .
 Supposons que $A \in \Sigma_1(Q)$ et soit $B \in \Sigma_2(Q)$
 (d'après l'axiome A_7 , $\Sigma_1(Q)$ et $\Sigma_2(Q)$
 forment une partition de $\xi_3 - Q$).

Si $B \notin \Delta$. D'après l'axiome A_7 , $[AB]$
 coupe Q . Notons C le point d'intersection
 de $[AB]$ avec Q . Il est alors distinct de O .



(Figure 11)

Désignons par R le plan déterminé par Δ et C . Le plan R et le plan Q se coupent suivant la droite Δ' ($O \in R \cap Q$ et $C \in \cap Q$).

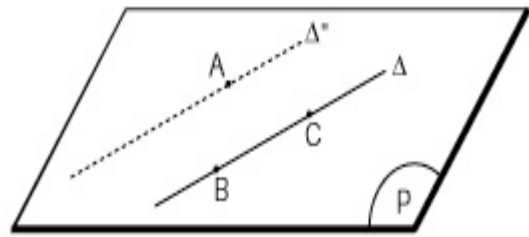
D'après le théorème 2-9, $R - \Delta'$ admet deux composantes convexes $\Sigma_1(\Delta')$ et $\Sigma_2(\Delta')$, $\Sigma_1(\Delta')$ contenant A et $\Sigma_2(\Delta')$ contenant B . (on peut affirmer que $B \notin \Sigma_1(\Delta')$ puisque $C \in [AB]$ et $C \notin R - \Delta'$). Soit D un point de Δ appartenant à $\Sigma_2(\Delta')$, alors $[DB] \subset \Sigma_2(Q)$. Donc $D \in \Sigma_2(Q) \cap \Delta$.

2. Le Postulat d'Euclide dans l'espace

2-1- Théorème d'Euclide

Soit Δ une droite et A un point de l'espace ξ_3 , non situé sur Δ . Il existe alors une unique droite Δ' passant par A et parallèle à Δ .

En effet soit P le plan déterminé par Δ et A (d'après le théorème 2-2 du chapitre 1). D'après le Postulat d'Euclide, il existe **dans P** une droite unique Δ' passant par A et parallèle à Δ , mais cet axiome n'écarte pas l'éventualité que cette droite ne soit pas contenue dans P.



(Figure 6)

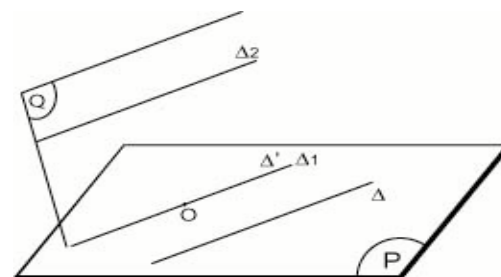
Il n'écarte pas en effet l'existence d'une deuxième droite de l'espace ξ_3 , parallèle à Δ , passant par A, mais non contenue dans le plan P. Supposons qu'une telle droite existe et notons-la Δ'' . Les deux droites Δ'' et Δ sont distinctes, elles déterminent un plan Q, contenant à la fois A et Δ , il est, d'après le théorème 2-2 du chapitre 1, confondu avec le plan P et Δ'' est nécessairement contenue dans P.

2-2- Théorème

Dans ξ_3 la relation de parallélisme des droites de l'espace est une relation d'équivalence.

Démonstration (figure 12)

Nous savons que dans tout plan la relation de parallélisme est une relation d'équivalence; nous allons généraliser ce résultat dans l'espace ξ_3 .



(Figure 12)

La seule propriété non évidente est la transitivité. Soit Δ_1 , Δ_2 et Δ trois droites vérifiant $\Delta_1 // \Delta$ et $\Delta // \Delta_2$ et montrons que $\Delta_1 // \Delta_2$. Si deux de ces droites sont confondues, c'est évident.

Supposons donc que ces droites sont distinctes 2 à 2. Désignons par P le plan déterminé par Δ et Δ_1 . Notons O un point de Δ_1 .

Si $\Delta_2 \subset P$, alors $\Delta_1 // \Delta_2$ d'après la transitivité de la relation $//$ dans un plan. Supposons $\Delta_2 \not\subset P$ et désignons par Q le plan contenant Δ_2 et O . P et Q sont distincts et $O \in P \cap Q$, donc ces deux plans se coupent suivant une droite Δ' passant par O . Pour démontrer que $\Delta_2 // \Delta_1$, il suffit de prouver que $\Delta_1 \equiv \Delta'$.

La droite Δ_2 n'a aucun point appartenant à P . En effet si $I \in \Delta_2 \cap P$, alors le parallèle issue de I à Δ , qui est Δ_2 , serait contenue dans P , or nous avons supposé $\Delta_2 \not\subset P$. Donc Δ_2 est strictement parallèle à Δ' . D'autre part, $\Delta' // \Delta$, sinon, par leur point commun (n'oublions pas que Δ et Δ' sont coplanaires), il passerait deux droites distinctes (à savoir Δ et Δ') parallèles à Δ_2 , ce qui est contraire au théorème d'Euclide. En définitive, nous avons $\Delta_1 // \Delta$ et $\Delta' // \Delta$, donc $\Delta_1 \equiv \Delta'$, puisque Δ' et Δ_1 ont le point O en commun.

Exercices

Exercice 1

On désigne par D l'ensemble des droites de ξ_3 et par Π l'ensemble des plans de ξ_3 . On pose $B = D \cup \Pi$. La relation de parallélisme dans B est-elle une relation d'équivalence ?

Exercice 2

On donne un trapèze $ABCD$ ($AB // CD$) d'un plan P et $O \notin P$.

Déterminer les intersections des plans (OAD) et (OBC) , (OAB) et (OCD) .

Exercice 3

Déterminer une droite parallèle à deux plans donnés et passant par un point donné.

Exercice 4

Soit quatre droites $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ telle que $\Delta_1 // \Delta_2, \Delta_3 // \Delta_4$, et Δ_1, Δ_3 non parallèles. Déterminer une droite rencontrant $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ et Δ_4 .

Exercice 5

On considère dans un plan P un quadrilatère convexe $ABCD$ dont les côtés (AB) et (CD) se coupent en D , et les côtés (AD) et (BC) se coupent en F . Soit S un point extérieur à P . Les droites (SA) , (SB) , (SC) et (SD) coupent respectivement un plan Q en A' , B' , C' , D' .

- 1- Déterminer la nature du quadrilatère $A'B'C'D'$ dans le cas où Q est parallèle à la droite SE .
- 2- Comment choisir Q pour que le quadrilatère $A'B'C'D'$ soit un parallélogramme ?

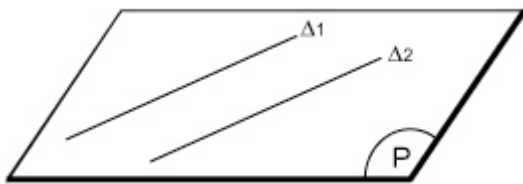
Chapitre 3 : Positions relatives de droites et de plans

1. Positions relatives de deux droites

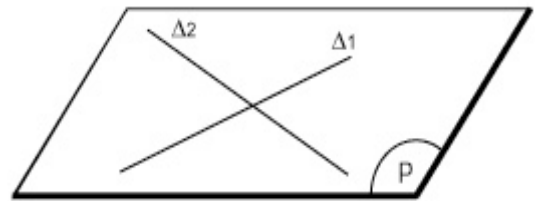
Soit Δ_1 et Δ_2 deux droites de ξ_3 .

1^{er} cas : Δ_1 et Δ_2 sont coplanaires

Ou bien Δ_1 et Δ_2 sont concourantes, ou bien elles sont strictement parallèles. Dans ces deux cas, il existe un plan et un seul contenant Δ_1 et Δ_2 . (d'après les théorèmes 2.3 et 2.4)



(Figure 13)



(Figure 14)

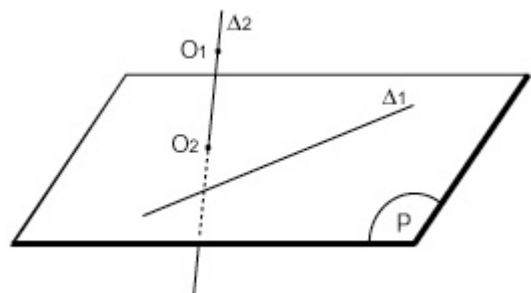
2^{ème} cas : Δ_1 et Δ_2 ne sont pas coplanaires

Dans ce cas, l'intersection $\Delta_1 \cap \Delta_2$ est vide; tout plan P, contenant l'une d'elle, ne peut alors contenir l'autre.

Exemple

Soit Δ_1 une droite arbitraire contenue dans un plan P et soit $O_1 \notin P$.

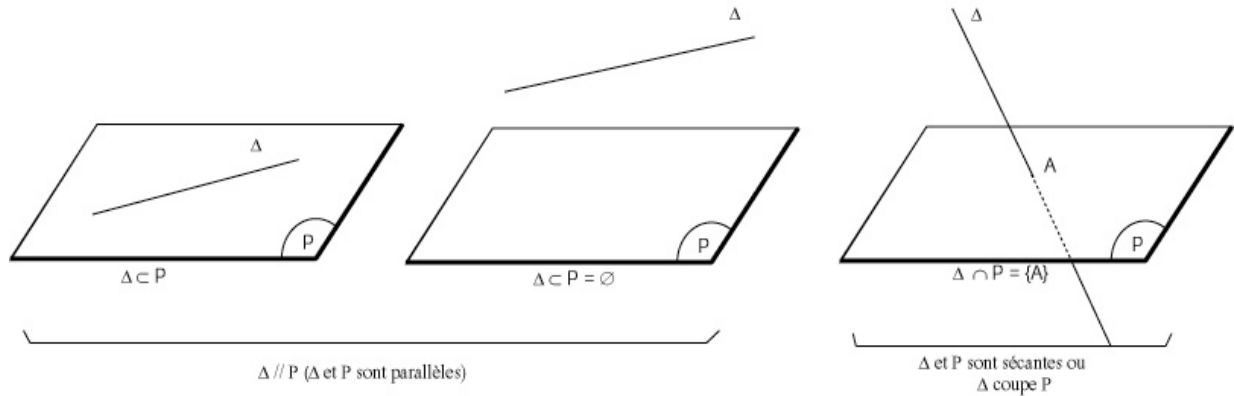
Soit O_2 un point arbitraire du plan P n'appartenant pas à Δ_1 . Alors les 2 droites $\Delta_2 = (O_1O_2)$ et Δ_1 ne sont pas coplanaires ; en effet un plan qui les contiendrait toutes deux ne peut être que P, or $\Delta_2 \not\subset P$.



(Figure 15)

2. Positions relatives d'une droite et d'un plan

Soit P un plan et Δ une droite. On dira que Δ et P sont **parallèles** si, ou bien $\Delta \subset P$, ou bien $\Delta \cap P = \emptyset$; et on écrira $\Delta // P$. Supposons Δ et P non parallèles alors $\Delta \cap P = \emptyset$ d'après l'axiome A_2 , la droite Δ et le plan P ont alors un seul point commun (on dit alors que Δ et P sont **sécants**).



(Figure 16)

2-1- Théorème

Soit Δ une droite, P un plan, O un point de P n'appartenant pas à Δ , et δ une droite passant par O et parallèle à Δ . Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

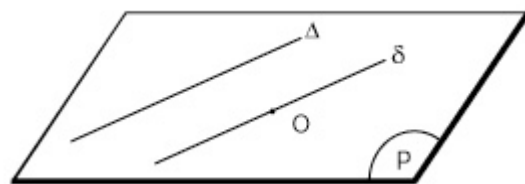
- i- $\Delta // P$.
- ii- La droite δ est contenue dans P .

Démonstration

(i) \Rightarrow (ii)

1^{er} cas $\Delta \subset P$.

Le résultat découle immédiatement de l'axiome A_4 et du théorème 2-5.

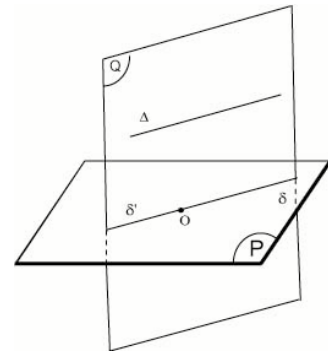


(Figure 17)

2^{ème} cas $\Delta \cap P = \emptyset$.

Soit Q le plan déterminé par Δ et O. Les plans Q et P sont distincts et $O \in P \cap Q$. Ils se coupent, suivant une droite δ' nécessairement parallèle à Δ ,

car $\Delta \cap P = \emptyset$. Par suite $\delta' \equiv \delta$ et $\delta \subset P$.



(Figure 18)

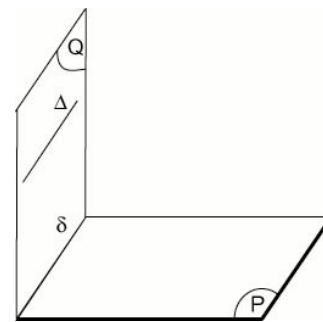
(ii) \Rightarrow (i)

Si δ est contenue dans P, alors $\Delta // P$. En effet supposons que Δ coupe P en I. Comme $\delta // P$ et $I \in P$, la parallèle à δ , qui est Δ , et issue de I serait contenue dans P, d'après la première partie de la démonstration.

Les résultats suivants découlent immédiatement du théorème 3-2.

2-2- Corollaire 1

Soit P un plan et Δ une droite parallèle à P. Alors tout plan Q contenant Δ et sécant avec P coupe P suivant une droite parallèle à Δ .



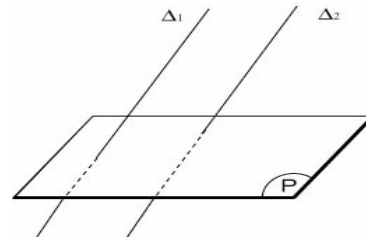
(Figure 19)

2-3- Corollaire 2

Soit P un plan et Δ une droite. Alors Δ est parallèle à P si et seulement si P contient une droite δ parallèle à Δ .

2-4- Corollaire 3

Soit Δ_1 et Δ_2 deux droites parallèles, alors si un plan P coupe l'une il coupe l'autre.



(figure 20)

2-5- Corollaire 4

Soit P un plan et Δ_1 une droite parallèle à P. Alors toute droite Δ_2 parallèle à Δ_1 est parallèle au plan P.

2-6- Corollaire 5

Soit P et Q deux plans sécants et Δ une droite parallèle à la fois aux plans P et Q ; alors Δ est parallèle à leur intersection.

3. Positions relatives de deux plans

Soit P et Q deux plans de l'espace ξ_3 ; trois cas et trois seulement sont possibles :

- $P \equiv Q$
- $P \cap Q = \emptyset$
- Les deux plans P et Q sont **sécants** et ont pour intersection une droite ; ce cas se présente lorsque P et Q sont distincts et ont un point commun.

Dans les cas a) et b), P et Q sont dits **parallèles** et on notera $P // Q$.

3-1- Proposition

Soit P et Q deux plans parallèles et distincts et δ une droite du plan P. Alors δ est parallèle au plan Q.

Démonstration

Si δ n'était pas parallèle au plan Q , elle aurait au moins un point commun avec Q . mais ce point appartiendrait à la fois au plan P et au plan Q ; ce qui est contraire à la définition de plans distincts parallèles.

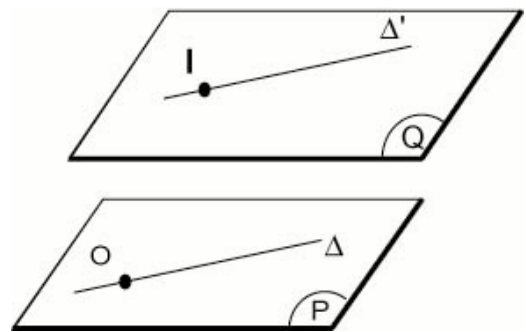
3-2- Théorème

Soit P et Q deux plans parallèles et $O \in P$. Alors toute droite contenant O et parallèle à Q est contenue dans P .

Démonstration

Soit Δ une droite passant par $O \in P$ et parallèle au plan Q . Comme $P \parallel Q$, la droite Δ est aussi parallèle à P (d'après la proposition 3.3).

Mais, d'après le théorème 3.2, la droite Δ est contenue dans P .



(Figure 23)

3-3- Corollaire

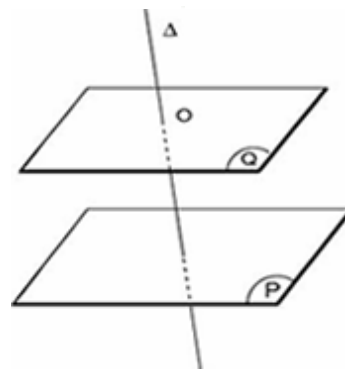
Soit P et Q deux plans parallèles, alors toute droite Δ qui coupe l'un de ces plans, coupe l'autre plan.

Démonstration

En effet si Δ coupe O , la droite Δ ne peut être parallèle à Q , sinon, d'après 3-3, la droite Δ serait contenue dans P .

Remarque

Si $P \parallel Q$, toute droite Δ parallèle à l'un est parallèle à l'autre. Ce résultat est équivalent à celui du corollaire précédent.



(Figure 24)

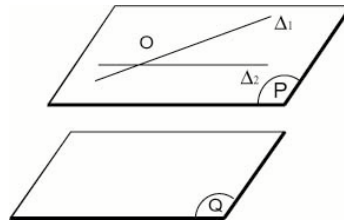
3-4- Théorème

Soit P et Q deux plans distincts. Pour qu'ils soient parallèles, il faut et il suffit que l'un d'eux contienne deux droites concourantes, parallèles à l'autre.

Démonstration

Supposons P et Q distincts et $P \parallel Q$. Soit Δ_1 et Δ_2 deux droites concourantes de P.

Comme $P \cap Q = \emptyset$, alors $\Delta_1 \cap Q = \emptyset$ et $\Delta_2 \cap Q = \emptyset$ donc $\Delta_1 \parallel Q$ et $\Delta_2 \parallel Q$.



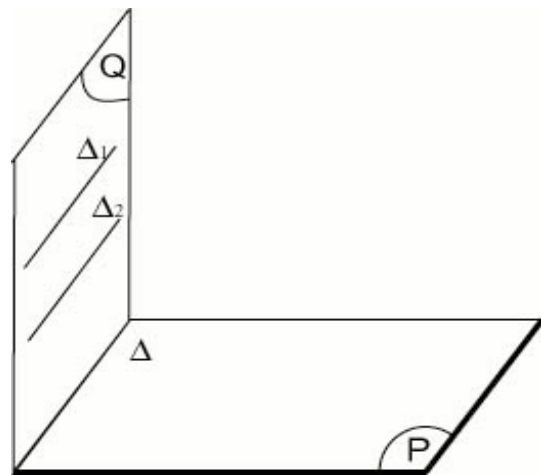
(Figure 25)

Réciproquement, supposons que P contienne deux droites concourantes Δ_1 et Δ_2 parallèles à Q (les plans P et Q étant distincts). Si P et Q avaient un point commun I, la droite d'intersection Δ de ces deux plans couperait au moins l'une des droites Δ_1 ou Δ_2 ce qui contredirait le fait que : $\Delta_1 \cap Q = \emptyset$ et $\Delta_2 \cap Q = \emptyset$.

Remarque

Soit P et Q deux plans sécants et Δ la droite l'intersection. Construisons dans le plan Q deux droites distinctes strictement parallèles à Δ . Le plan Q contient alors deux droites distinctes parallèles au plan P, bien que P et Q ne soient pas parallèles.

Ceci montre que la partie soulignée dans l'énoncé du théorème 3-3-1 précédent ne peut être remplacée par l'expression « deux droites distinctes ».



(Figure 26)

3-5- Théorème

Soit P un plan et O un point. Il existe alors un plan unique Q passant par O et parallèle à P .

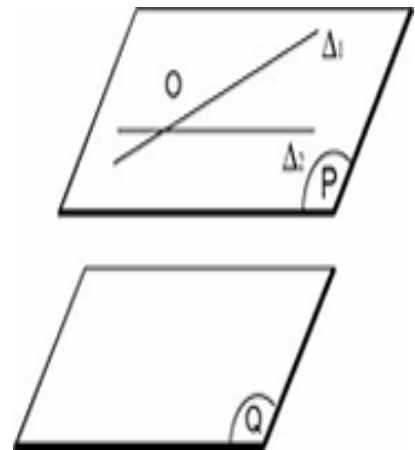
Ce théorème est un théorème d'existence et d'unicité.

1. Montrons l'existence d'un plan passant par un point donné extérieur à un second plan et parallèle à ce dernier.

Choisir dans P , deux droites concourantes Δ_1 et Δ_2 se coupant en un point I . Le plan déterminé par O et la droite Δ_1 contient une droite Δ_1' , parallèle à Δ_1 . Le plan déterminé par O et la droite Δ_2 contient une droite Δ_2' , parallèle à Δ_2 . Les droites Δ_1' et Δ_2' déterminent un plan Q parallèle à P , et passant par O . (d'après le théorème 3.5)

2. Montrons l'unicité de ce plan. Soit Q et Q' deux plans contenant O et parallèles à P et M un point quelconque de Q et n'appartenant pas à Q' . La droite (OM) est contenue dans le plan Q qui est parallèle au plan P . D'où, $(OM) // P$ (d'après la proposition 3.3). De même, pour tout point M' de Q' , $(OM') // P$.

Ainsi, dans le plan (OMM') , où $M \in Q$ et $M' \in Q'$, les deux droites concourantes et distinctes (OM) et (OM') sont toutes deux parallèles au plan P , ce qui est impossible. D'où $Q \equiv Q'$.



(Figure 27)

Remarque

Nous venons de démontrer la généralisation du Postulat d'Euclide aux plans parallèles de l'espace. En d'autres termes, par un plan extérieur à un plan, ne passe qu'un seul plan parallèle au plan donné. Ce résultat peut se traduire par les énoncés suivants :

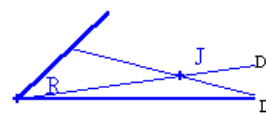
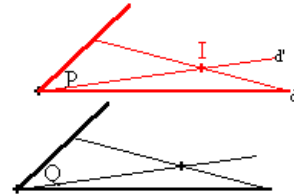
3-6- Corollaire 1

La relation de parallélisme dans l'ensemble des plans de ξ_3 est une relation d'équivalence

La seule propriété non évidente est la transitivité de $//$.

Soit P, Q et R trois plans tels que $P // Q$ et $Q // R$ et montrons que $P // R$.

Si deux de ces trois plans sont confondus le résultat est trivial. Supposons-les deux à deux distincts. Soit Δ_1 et Δ_2 deux droites concourantes de Q , I un point de P et J un point de R .



(Figure 26)

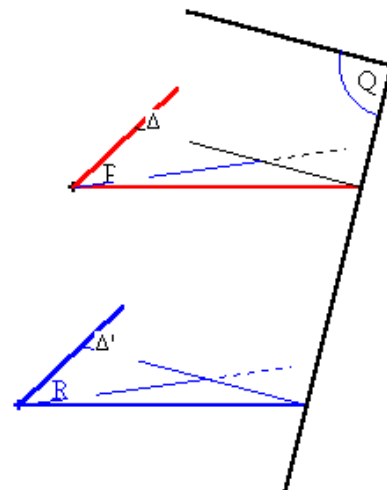
Les parallèles D_1 et D_2 issues de I à Δ_1 et Δ_2 sont contenues dans P d'après le théorème 3-4 et le corollaire 2 du théorème 3-2. De même, les parallèles d_1 et d_2 issues J sont contenues dans R et, de plus, elles sont concourantes et parallèles à P . Donc, d'après 3-5, les plans P et R sont parallèles.

3-7- Corollaire 2

Soit P et Q deux plans parallèles. Tout plan R qui coupe l'un d'eux coupe alors l'autre plan et les droites d'intersection sont parallèles.

Démonstration

- Supposons que R coupe P et posons $\Delta = R \cap P$. si R était parallèle à Q , il coïnciderait avec P , d'après le théorème 3-6; ce qui contredirait le fait que R coupe P . Donc R coupe Q .
- Soit $\Delta' = R \cap Q$. La droite Δ' est parallèle à Δ , car sinon elle couperait P , ce dernier plan couperait le plan Q ; ce qui contredirait le parallélisme supposé de P et Q .



(Figure 27)

Exercices

Exercice 1

On donne un plan P et 3 points A, B, C non alignés et non situés dans le plan P . On note Q le plan déterminé par A, B et C . Soit S un point non situé dans le plan Q .

Les droites $(SA), (SB)$ et (SC) coupent en général le plan P en A', B', C' respectivement.

- 1- Démontrer que lorsque S varie dans $\xi_3 - Q$, les droites $(A'B'), (B'C')$ et $(A'C')$ passent respectivement par trois points fixes γ, α, β .
- 2- Démontrer que les points sont γ, α et β alignés.

Exercice 2

Soit (ABC) un triangle d'un plan P et S un point non situé dans ce plan. Soit α un point situé à un tiers de S sur le segment $[SA]$, β et γ les milieux de $[SB]$ et $[SC]$ respectivement.

- 1- Déterminer l'intersection des plans (ABC) et $(\alpha\beta\gamma)$. On désignera par Δ cette intersection.
- 2- On désigne par B' et C' les points d'intersection de Δ avec (AB) et (BC) .

Que peut-on en conclure pour $(B'C')$?

- 3- Soit G le centre de gravité du triangle (ABC) . SG coupe le plan $(\alpha\beta\gamma)$ en un point G' .
Montrer que G' est le centre de gravité du triangle $(\alpha\beta\gamma)$.

Exercice 3

Soit P un plan et Δ, Δ' deux droites parallèles de P . Soit A et B deux points distincts non situés dans P et tels que (AB) non parallèle au plan P .

Un plan variable Q passant par (AB) coupe Δ en M et Δ' en N .

- 1- Montrer que la droite (MN) passe par un point fixe.
- 2- Déterminer l'ensemble décrit par le point d'intersection I de (AM) et (BN) et par le point J intersection de (BM) et (AN) ?
- 3- Montrer que la droite (IJ) passe par un point fixe.

Exercice 4

On mène par un point O trois demi-droites Ox , Oy et Oz non situées dans un même plan ; deux plans P et Q parallèles coupe Ox , Oy , Oz en A , B , C et en A' , B' , C' respectivement. Montrer que les centres de gravité de ces deux triangles sont alignés avec O .

Chapitre 4 : Le théorème de Thalès dans l'espace

1. Axiomes métriques

1-1- Distance sur un ensemble

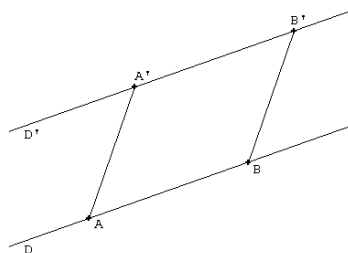
Soit E un ensemble ; on appelle distance toute application δ de $E \times E$ dans \mathbf{R}_+ vérifiant :

- i- $\forall (A,B) \in E \times E \quad \delta(A,B) = \delta(B,A)$
- ii- $\forall (A,B) \in E \times E \quad \delta(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$
- iii- $\forall (A,B,C) \in E \times E \times E \quad \delta(A,C) \leq \delta(A,B) + \delta(B,C)$

1-2- Droite orientée

Soit Δ une droite de ξ_3 ; on dit que Δ est une droite orientée si on a choisi une des relations d'ordre total (voir axiome A_1 du chapitre 1).

On dit que deux droites parallèles orientées D et D' sont de même sens, si l'on peut trouver deux points A et B appartenant à D et deux points A' et B' appartenant à D' tels que $A < B$, $A' < B'$ et le quadrilatère $(ABB'A')$ est un parallélogramme.



1-3- Axiome A_8

Il existe une distance δ sur ξ_3 vérifiant :

$$(a) \forall (A, B) \in \xi_3 \times \xi_3, M \in [AB] \Leftrightarrow \delta(A, M) + \delta(M, B) = \delta(A, B)$$

(b) Pour toute droite orientée Δ , tout point O de Δ et tout réel positif λ , il existe deux points M et M' de Δ , symétriques par rapport à O et tels que $\delta(O, M) = \delta(O, M') = \lambda$.

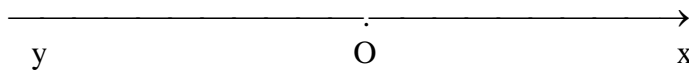
1-4- Remarques

A. Lorsque la distance δ est définie dans l'espace et vérifie les cinq propriétés précédentes, on note par convention AB au lieu de $\delta(A, B)$.

Les cinq propriétés s'écrivent désormais :

1. $\forall (A, B) \in \xi_3 \times \xi_3, \quad AB = BA$
2. $\forall (A, B) \in \xi_3 \times \xi_3, \quad AB = 0 \Leftrightarrow A = B$
3. $\forall (A, B, C) \in \xi_3 \times \xi_3 \times \xi_3, \quad AC \leq AB + BC$
4. $\forall (A, B) \in \xi_3 \times \xi_3, M \in [AB] \Leftrightarrow AM + MB = AB$
5. Pour toute droite orientée Δ , sur laquelle une origine O a été fixée et pour tout réel positif λ , il existe deux points M et M' de Δ , symétriques par rapport à O et tels que $OM = OM' = \lambda$

B. Soit Δ une droite orientée et $O \in \Delta$. Soit A un point de Δ tel que $O < A$ et $OA = 1$; on note Ox la demi-droite incluse dans Δ , d'origine O et contenant A et Oy l'autre demi-droite.



On pose :

$$\vec{OM} = OM, \text{ si } M \in Ox$$

$$\vec{OM} = -OM, \text{ si } OM \in Oy.$$

A tout point M de la droite orientée, on associe un nombre réel \vec{OM} , appelé l'abscisse de M par rapport à l'origine O . La droite Δ est donc partagée en une

demi-droite dont tous les points ont une abscisse positive et une demi-droite dont tous les points ont une abscisse négative.

L'axiome A_8 a pour conséquence le résultat important suivant : Toute droite orientée Δ munie d'une origine O , et sur laquelle on a fixé un point A tel que $OA = 1$, est en bijection avec le corps \mathbb{R} des réels.

1-5- Définition (mesure algébrique d'un segment)

Soit A et B deux points distincts de ξ_3 . Fixons un point O sur la droite (AB) et orientons la droite (AB) de A vers B . On pose $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$. Le nombre réel \overline{AB} est appelé la mesure algébrique du segment $[AB]$.

1-6- Relation de Chasles

Etant donnés trois points alignés A , B et C . Alors, pour toute orientation de la droite (AB) . On pose $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$.

1-7- Définition (notion de milieu)

Soit A et B deux points distincts de ξ_3 , le milieu I du segment $[AB]$ est le point défini par :

- si $A = B$; on pose : $I = A = B$

- si $A \neq B$, soit Δ la droite passant par A et B , et orientons Δ de A vers B ; le point I est défini par $\overline{AI} = \frac{1}{2} \overline{AB}$.

On peut vérifier que la définition de I ne dépend pas de l'orientation de Δ , et que $I \in [AB]$.

1-8- Remarque

Le lecteur doit se convaincre que les axiomes relatifs au plan permettent de déduire les résultats classiques de la géométrie plane. Le but de ce cours étant l'étude des propriétés des figures de l'espace, nous ne donnerons pas la démonstration de ces résultats à partir de ces axiomes. Dans toute la suite nous supposons connus les théorèmes classiques de géométrie plane.

2. Le théorème de Thalès dans l'espace ξ_3

2-1- Le théorème direct

Soit P, Q et R trois plans strictement parallèles, Δ et Δ' deux droites distinctes qui coupent P, Q et R en A, B et C, et A', B' et C' respectivement, alors on a :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$$

Démonstration

Soit Δ_1 la droite issue de A et parallèle à Δ' .
 Δ_1 coupe Q et R en B₁ et C₁ respectivement voir
 (théorème 3-3-3 ; chapitre 1)

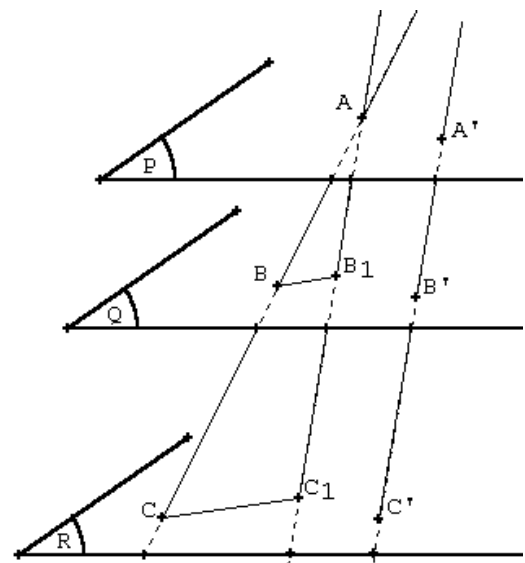
Nous avons, d'après le théorème (3-3-6 ;
 Chapitre 1), $(BB_1) \parallel (CC_1)$ et

$(AA') \parallel (B_1B') \parallel (C_1C')$; de plus dans le
 plan (Δ_1, Δ') , $(AB_1B'A')$, $(AA'C'C_1)$ et
 $(B_1B'C'C_1)$ sont des parallélogrammes.

Dans le plan déterminé par les droites
 concourantes (AB) et (AB_1) , le théorème de

Thalès donne : $\frac{\overline{AB_1}}{\overline{AC_1}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$:

Mais, comme $\overline{AB_1} = \overline{AB}$ et $\overline{AC_1} = \overline{AC}$, nous avons bien : $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$.



(figure 28)

2-2- Remarque

La même démonstration permet de montrer qu'avec les mêmes hypothèses, on a

$$\text{aussi : } \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}.$$

2-3- « Réciproque » du théorème de Thalès dans l'espace

Soit Δ et Δ' deux droites distinctes de ξ_3 et non coplanaires, A, B et C trois points

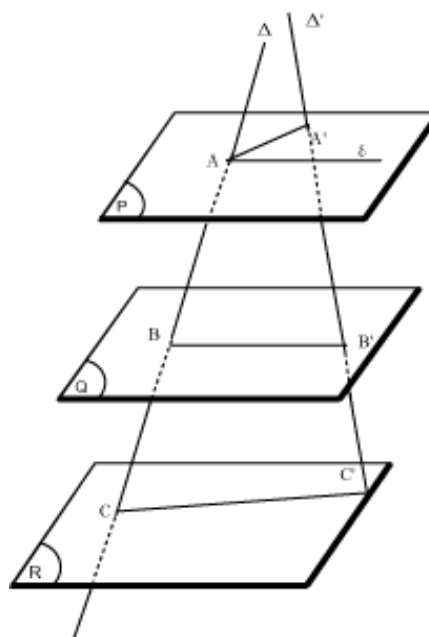
distincts de Δ et A', B' et C' trois points distincts de Δ' , vérifiant : $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$

Alors les droites (AA'), (BB') et (CC') sont contenues dans trois plans parallèles.

Démonstration :

Soit δ la droite issue de A et parallèle à la droite (BB'). Les droite (AA') et (δ) sont distinctes, car Δ et Δ' ne sont pas coplanaires. Désignons par P le plan déterminé par (AA') et (δ). Désignons par Q le plan passant par B et parallèle à (P). Comme (BB') // (δ), le plan Q contient la droite (BB').

Soit enfin R le plan passant par C et parallèle à (P). Comme, par hypothèse les trois points A, B et C sont distincts, les trois plans P, Q et R sont strictement parallèles.



(Figure 29)

Soit C_1 le point d'intersection de Δ' avec R ; d'après le théorème 2-1, nous avons

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C_1}}, \text{ et comme par hypothèse } \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}, \text{ on en déduit } \overline{A'C_1} = \overline{A'C'}.$$

D'où, $C_1 \equiv C'$ et par suite $CC' \subset R$. Il s'ensuit que les droites (AA') , (BB') et (CC') sont contenues respectivement dans P , Q et R qui sont strictement parallèles.

Exercices

Exercice 1

On considère un tétraèdre régulier $(ABCD)$ et un plan P passant par le centre de gravité la face (ABC) et parallèle à la face (BCD) . Calculer l'aire de la section du tétraèdre par le paln P en fonction de l'aire de sa base.

Exercice 2

On considère un cube $(ABCDEFGH)$ et on note I le milieu de l'arête $[AB]$. On note P le plan déterminé par les points I , C et G , et on note Q le plan parallèle à P passant par A . Déterminer l'intersection du plan Q et de la face $(CDHG)$.

Exercice 3

On considère un tétraèdre régulier $(ABCD)$ et un point I de la droite (AB) . La droite parallèle à (AC) passant par I coupe la droite (BC) en J . La parallèle à la droite (BD) passant par J coupe (CD) en K et la parallèle à la droite (AC) passant par K coupe (AD) en L . Montrer que $(IJKL)$ reste un parallélogramme lorsque I varie sur la droite (AB) .

Exercice 4

On considère un tétraèdre $(SABC)$ et les trois centres de gravité I , J et K des triangles (SAB) , (SBC) et (SCA) . Montrer que le plan (IJK) est parallèle à la base (ABC) du tétraèdre.

Exercice 5

On considère un parallélépipède (ABCDEFGH) et on suppose que $\vec{AB} = a$. Pour tout point M de la droite (AB), on note $x = \vec{AM}$. On mène du milieu I de l'arête [CD] un plan parallèle P au plan (MCG). Quelle condition doit vérifier x pour que le plan P passe par le centre O du parallélépipède?

Exercice 6

On considère un parallélépipède (ABCDEFGH) et on note I, J, K, L et M les points vérifiant : $\vec{AI} = \vec{JI} = \vec{JE}$, $\vec{DK} = \vec{KL} = \vec{LH}$ et $2\vec{BM} = \vec{MF}$. Montrer que les plans (IKB) et (JLM) sont parallèles.

Exercice 7

On considère un cube (ABCDEFGH) et on suppose que $\vec{AB} = a$. Pour tout point M de la droite (AB), on note $x = \vec{AM}$. On note N le point de la droite (EF) tel que $(MN) \parallel (AE)$. Le plan P_1 passant par M, N et O, où O est le centre du cube, coupe la droite (CB) en un point I. Du point I, on mène le plan P_2 parallèle à la face (ABHE) du cube, ce dernier plan coupe la droite (AD) en un point noté J. De J on mène un plan P_3 parallèle au plan P_1 . Le plan P_3 coupe la droite (AD) en un point noté K. Quelle condition doit vérifier x pour que le plan P_3 passe par A?

Chapitre 5 : Droites orthogonales dans l'espace

1. Droites perpendiculaires

1-1- Définition (isométrie)

Soit $f: \xi_3 \longrightarrow \xi_3$, l'application f est une isométrie si et seulement si f conserve la distance.

En d'autres termes, si $(A,B) \in \xi_3 \times \xi_3$, $A' = f(A)$ et $B' = f(B)$, alors $A'B' = AB$.

1-2- Propriétés

On montre facilement que toute isométrie transforme un segment en un segment, une droite en une droite, un plan en un plan, une partie convexe de l'espace en une partie convexe, une demi-droite en une demi-droite et un demi-plan en un demi-plan. Elle conserve le milieu d'un segment. De plus on montre que toute isométrie est une bijection.

1-3- Définition (pliage)

Soit Δ une droite d'un plan P . On désigne par $\Sigma_1(\Delta)$ et $\Sigma_2(\Delta)$ les deux composantes convexes de $P - \Delta$.

On appelle pliage autour de Δ dans P , toute isométrie f qui transforme $\Delta \cup \Sigma_1(\Delta)$ en $\Delta \cup \Sigma_2(\Delta)$ et qui vérifie en plus : $\forall A \in \Delta, f(A) = A$.

1-4- Axiome A_9

A_9 : Pour tout plan P et pour toute droite Δ de P , il existe un pliage autour de Δ .

1-5- Définition (symétrie orthogonale)

On démontre facilement que, pour tout plan P et tout droite $\Delta \subset P$, il existe un unique pliage \mathbf{p} autour de Δ appelé symétrie orthogonale d'axe Δ et que la restriction de \mathbf{p} au plan P est une isométrie de P dans P .

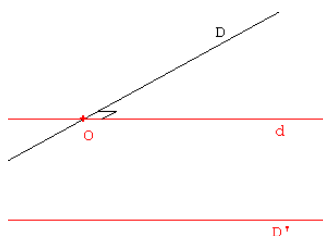
1-6- Définition (droites perpendiculaires)

Soit Δ_1 et Δ_2 deux droites d'un plan P ; Δ_2 est dite **perpendiculaire** à Δ_1 si et seulement si $\mathbf{p}(\Delta_2) = \Delta_1$, où \mathbf{p} désigne la symétrie orthogonale d'axe Δ_1 .

2. Droites orthogonales

2-1- Définition (droites orthogonales)

Soit D et D' deux droites distinctes de ξ_3 . D et D' sont dites orthogonales s'il existe un point O de D et une droite d parallèle à D' et passant par O , tels que les droites D et d soient perpendiculaires.



Pour que cette définition soit légitime il est nécessaire de prouver que cette notion ne dépend pas du choix de O .

2-2- Proposition

Soit (Ox) et (Oy) deux demi-droites, $(O'x')$ et $(O'y')$ deux demi-droites parallèles et de même sens à (Ox) et (Oy) respectivement. Alors, $\widehat{xOy} = \widehat{x'O'y'}$.

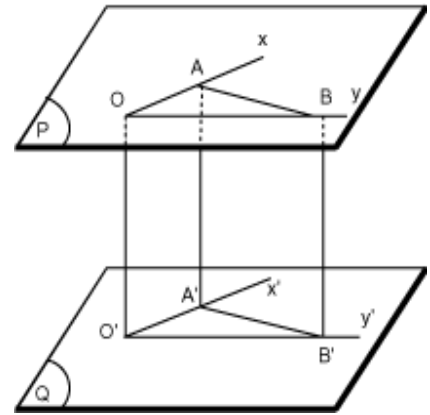
Démonstration

Soit P le plan contenant (Ox) et (Oy) , Q le plan contenant $(O'x')$ et $(O'y')$.

(a) Dans le cas où (Ox) et (Oy) coïncident et dans le cas où les quatre demi-droites sont coplanaires, le résultat à démontrer est une proposition de géométrie plane.

(b) On suppose maintenant P et Q distincts.

Soit A et B deux points de (Ox) et (Oy) , A' et B' deux points de $(O'x')$ et $(O'y')$ tels que $OA = O'A'$ et $OB = O'B'$. D'après le théorème 3.5 du chapitre 1, les deux plans P et Q sont strictement parallèles. Comme $OB = O'B'$ et $(OB) \parallel (O'B')$, le quadrilatère $(OBB'A')$ est un parallélogramme. Donc, $(OO') \parallel (BB')$ et $OO' = BB'$. De même $(AA') \parallel (BB')$ et $AA' = BB'$.



(Figure 30)

On en conclut que $AB = A'B'$. Posons $\alpha = \widehat{AOB}$ et $\alpha' = \widehat{x'O'y'}$. Nous avons

$$\cos(\alpha) = \frac{OB^2 + OA^2 - AB^2}{2OA \cdot OB} = \frac{O'B'^2 + O'A'^2 - A'B'^2}{2O'A' \cdot O'B'} = \cos(\alpha') ; \text{ d'où, } \alpha = \alpha' .$$

Remarques

1- L'hypothèse : " (Ox) et (Oy) sont parallèles et de mêmes sens à $(O'x')$ et $(O'y')$ " a été utilisée lorsque nous avons affirmé que $(OAA'O')$ et $(OBB'A')$ sont des parallélogrammes. Le résultat 2-2 est valable lorsque (Ox) est de sens contraires à $(O'x')$ et (Oy) de sens contraires à $(O'y')$.

2- Si (Ox) est parallèle à $(O'x')$ et de même sens et si (Oy) est parallèle à $(O'y')$ et de sens contraire, alors $\widehat{xOy} = \widehat{x'O'y'} = \pi$.

2-3- Corollaire

Soit (Ox) et (Oy) deux droites perpendiculaires, $(O'x')$ et $(O'y')$ deux droites respectivement parallèles à (Ox) et (Oy) . Alors, $(O'x')$ et $(O'y')$ sont perpendiculaires.

(démonstration évidente)

2-4- Corollaire

La définition de l'orthogonalité de deux droites non coplanaires donnée en 2.1 ne dépend pas du choix de O .

(démonstration immédiate)

2-5- Corollaire

Soit D et D' deux droites orthogonales, d et d' deux droites parallèles respectivement à D et à D' . Alors, d et d' sont orthogonales.

(démonstration immédiate)

Exercices

Exercice 1

Etant donné un point O d'une droite Δ .

1. Construire deux droites distinctes D et D' perpendiculaires en O à Δ .
2. On considère, dans le plan P déterminé par les droites D et D' , une droite quelconque δ passant par O . Montrer que δ est perpendiculaire à Δ .
3. En déduire que Δ est orthogonale à toutes les droites du plan P .

Exercice 2

Etant donné un point O n'appartenant pas à une droite Δ , peut-on construire deux droites distinctes D et D' perpendiculaires à Δ et passant par O ? Justifiez votre réponse.

Exercice 3

Déterminez tous les couples d'arêtes orthogonales d'un cube.

Exercice 4

Soit $(ABCDEFGH)$ un cube. On note I le centre de la face $(ADHE)$, J le centre de la face $(EFGH)$. Déterminer les arêtes du cube orthogonales à la droite (IJ) .

Exercice 5

Soit (ABCDEFGH) un cube dont le côté mesure a . On note I le centre de la face (ADHE), J le centre de la face (EFGH), K le centre de la face (BCGF) et L le centre de la face (ABED).

1. Montrer que (IJ) est orthogonale à (BE).
2. Montrer que (JK) est orthogonale à (AF).
3. En déduire que (IJKL) est un carré dont on calculera la mesure du côté.

Exercice 6

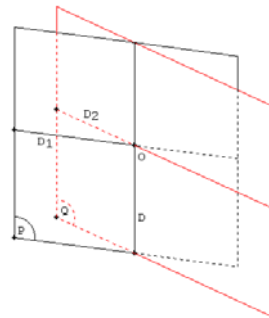
Soit (ABCD) un tétraèdre régulier dont les arêtes mesurent a .

1. Montrer que $BC = CD = DE = EB$ et que le triangle (BDE) est isométrique au triangle (BDC).
2. On note H le milieu de [BD]. Calculer AH , EH et EA en fonction de a .
3. Montrer que la droite (AB) est perpendiculaire à la droite (EB) et en déduire que les arêtes (AB) et (CD) sont orthogonales.
4. Donner la liste de tous les couples d'arêtes orthogonales.

Chapitre 6 : Droites et plans perpendiculaires

1. Plan perpendiculaire à une droite

Soit D une droite et O un point de D . Il existe une infinité de plans contenant D ; dans chacun de ces plans il existe une droite et une seule perpendiculaire en O à D . Le nombre de perpendiculaires en O à la droite D est donc infini.



(Figure 31)

Nous allons démontrer que cet ensemble de droites engendre un plan.

1-1- Théorème

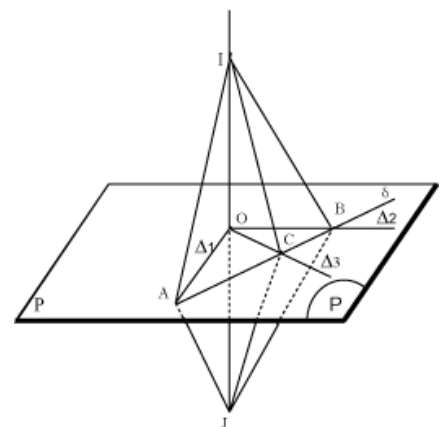
Soit Δ une droite de ξ_3 et O un point de Δ . Il existe un plan unique P contenant toutes les droites perpendiculaires à Δ en O .

Démonstration :

Fixons deux droites Δ_1 et Δ_2 distinctes perpendiculaires en O à Δ et désignons par P le plan contenant Δ_1 et Δ_2 . Soit I un point de Δ , distinct de O , et soit J le symétrique de I par rapport à O .

(a) Soit Δ_3 une droite distincte de Δ_1 et Δ_2 et contenue dans P .

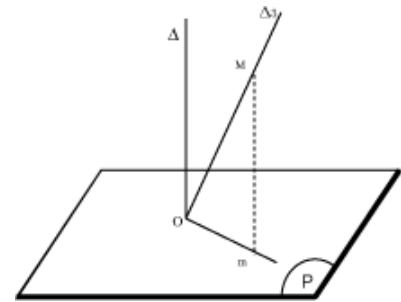
Soit δ une droite de P ne contenant pas O et qui coupe Δ_1 , Δ_2 et Δ_3 respectivement en A , B et C .



(Figure 32)

$IA = JA$ et $IB = JB$ car Δ_1 et Δ_2 sont par hypothèse les médiatrices de $[IJ]$, il s'ensuit que les triangles (IAB) et (JAB) sont isométriques. D'où, $\widehat{IBC} = \widehat{JBC}$. Il en résulte donc que les triangles (IBC) et (JBC) sont isométriques et que $CI = CJ$ et par suite que Δ_3 est la médiatrice de $[IJ]$ dans le plan (ICJ) . **Ainsi toute droite de P passant par O est perpendiculaire à Δ .**

(b) Soit Δ_3 une droite perpendiculaire à Δ en O . Supposons que Δ_3 ne soit pas contenue dans P . Soit M un point de Δ_3 autre que O . Dans le plan déterminé par les droites Δ et Δ_3 , la parallèle à Δ passant par M couperait le plan (P) en un point m distinct de M et de O . Nous aurions alors dans le plan (Δ, Δ_3) , $(Om) \perp (mM)$



(Figure 33)

(car $\Delta \perp (Om)$ d'après la première partie de la démonstration) et $(OM) \perp (Mm)$ (car $\Delta // (Mm)$), ce qui est absurde.

Donc $\Delta_3 \subset P$. Ainsi, **toute droite Δ_3 perpendiculaire en O à Δ est contenue dans P .**

En résumé le plan P contient toutes les droites perpendiculaires en O à Δ et, en plus, il est unique.

1-2- Définition

Soit Δ une droite de ξ_3 et O un point de Δ . Le plan P contenant toutes les droites perpendiculaires à Δ en O est appelé le plan perpendiculaire en O à la droite Δ .

1-3- Proposition

Soit Δ_1, Δ_2 deux droites parallèles et P un plan. Si $P \perp \Delta_1$, alors $P \perp \Delta_2$.

La démonstration est immédiate.

1-4- Théorème

Soit Δ une droite et O un point. Il existe un plan et un seul passant par O et perpendiculaire à Δ .

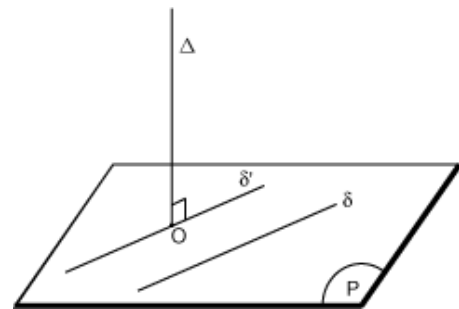
Démonstration

- Si $O \in \Delta$, le plan contenant les droites perpendiculaires à Δ en O est perpendiculaire à Δ (voir théorème 3-1) et il est unique.
- Si $O \notin \Delta$, soit Δ' la droite passant par O et parallèle à Δ . Le plan P perpendiculaire à Δ' est perpendiculaire à Δ (d'après 2.5). D'autre part, tout plan perpendiculaire à Δ et passant par O est perpendiculaire à Δ' . Donc P est l'unique plan contenant O et perpendiculaire à Δ .

2. Droite perpendiculaire à un plan

Soit maintenant une droite δ de P ne contenant pas O ; la parallèle δ' à δ passant par O est perpendiculaire à Δ . Il en résulte que Δ et δ sont orthogonales.

Autrement dit Δ est orthogonale à toutes les droites de P . La définition suivante est donc naturelle :



(Figure 34)

2-1- Définition

Soit Δ une droite et P un plan. La droite Δ est dite perpendiculaire au plan P si elle est orthogonale à toute droite de P .

Remarque

Il est évident qu'une droite Δ perpendiculaire à P n'est pas parallèle à P .

Notation

On écrira $\Delta \perp P$ pour indiquer que Δ est perpendiculaire au plan P .

2-2- Proposition

Soit Δ_1 et Δ_2 deux droites, P et Q deux plans.

- (a) Si $\Delta_1 \perp P$ et $\Delta_2 \perp P$, alors $\Delta_1 // \Delta_2$.
- (b) Si $\Delta_1 // \Delta_2$ et si $\Delta_1 \perp P$ alors $\Delta_2 \perp P$.
- (c) Si $P // Q$ et $\Delta_1 \perp P$ alors $\Delta_1 \perp Q$.
- (d) Si $\Delta \perp P$ et $\Delta \perp Q$ alors $P // Q$.

Les démonstrations sont immédiates.

2-3- Corollaire

On considère une droite Δ et un plan P qui la coupe. On suppose que Δ n'est pas perpendiculaire à P. Alors toutes les droites de P orthogonales à Δ sont parallèles.

(démonstration immédiate)

2-4- Théorème

Pour qu'une droite Δ soit perpendiculaire à un plan P il faut et il suffit qu'il existe dans P deux droites **concourantes orthogonales** à Δ .

Démonstration

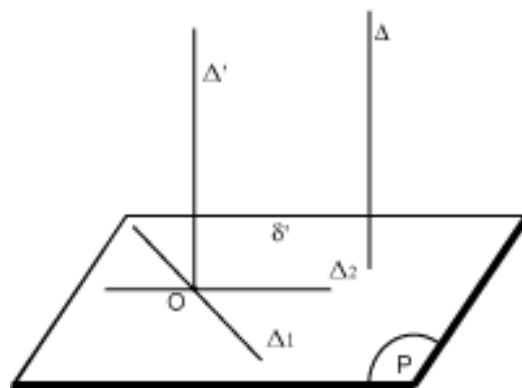
Condition nécessaire :

Si $\Delta \perp Q$, alors toute droite de P est orthogonale à Δ par définition.

Condition suffisante :

Soit Δ_1 et Δ_2 deux droites orthogonales à Δ et concourantes en un point O.

Soit Δ' la parallèle à Δ passant par O.

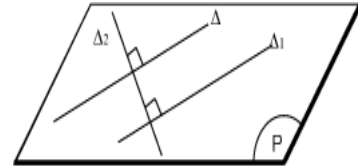


(Figure 35)

D'après le théorème 3-3, Δ' est perpendiculaire à toutes les droites de P passant par O et, par la suite, elle est orthogonale à toutes les droites de P. Donc, $\Delta' \perp Q$ et, d'après 3-5, $\Delta \perp Q$.

Remarque importante

Si Δ est orthogonale à deux droites parallèles Δ_1, Δ_2 , contenues dans P, il n'en résulte pas que $\Delta \perp P$; en effet il existe dans P une infinité de droites perpendiculaires à Δ_1 et à Δ_2 .



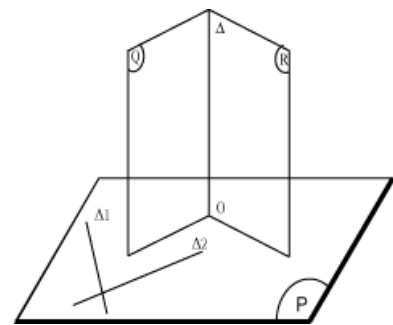
(Figure 36)

2-5- Théorème

Soit P un plan et O un point. Il existe une droite unique Δ passant par O et perpendiculaire à P.

Démonstration :

(a) Supposons $O \in P$. Soit Δ_1 et Δ_2 deux droites concourantes de P. Soit Q le plan contenant O et perpendiculaire à Δ_1 et R le plan issu de O et perpendiculaire à Δ_2 . Ces deux plans sont distincts et ne sont pas parallèles, sinon Δ_1 et Δ_2 seraient parallèles, d'après 3-6. On note Δ leur droite commune.



(Figure 37)

$\Delta_1 \perp Q$ implique $\Delta \perp \Delta_1$ et $\Delta_2 \perp R$ implique $\Delta \perp \Delta_2$. Comme Δ_1 et Δ_2 sont deux droites concourantes de P, il en résulte que $\Delta \perp P$, d'après 3-9. L'unicité de Δ découle de 3-6.

(b) Si $O \notin P$. Soit P' le plan passant par O et parallèle à P. D'après ce qui précède, il existe une seule droite Δ passant par O et perpendiculaire à P' . D'après 3-7, $\Delta \perp P$. L'unicité de Δ découle de 3-6.

2-6- Définition

Soit P un plan et O un point. La droite Δ passant par O et perpendiculaire à P coupe ce plan en un point appelé projeté orthogonal de O sur le plan.

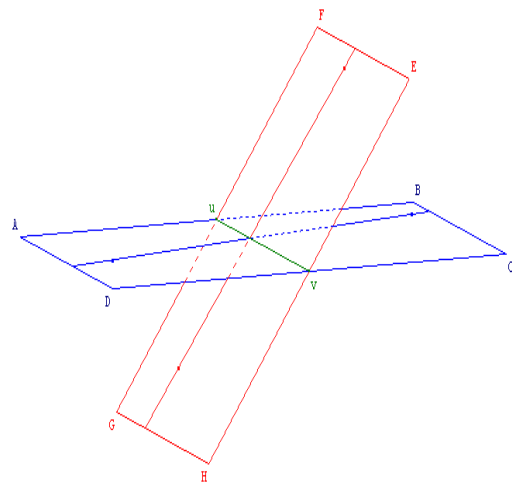
3. Plans perpendiculaires

3-1- Angle de deux plans.

Soit P et Q, deux plans se coupant suivant une droite Δ et soit O un point de Δ .

Construisons les droites Δ_1 et Δ_2 perpendiculaires à Δ et situées dans P et Q respectivement. Les deux droites Δ_1 et Δ_2 définissent quatre angles dont deux sont aigus.

La mesure de l'un de ces angles aigus est appelée la mesure de l'angle des deux plans P et Q.



(Figure 53)

Par abus de langage, on confondra mesure et angle lorsqu'aucune ambiguïté n'est à craindre.

Si on prend un autre point O' de Δ , on obtient deux droites $\Delta'_1 // \Delta_1$ et $\Delta'_2 // \Delta_2$. D'après le théorème 3-2 (chapitre 5) la « définition » précédente est indépendante du choix de O sur la droite.

3-2- Définition

Les deux plans P et Q sont dits perpendiculaires si et seulement si $\Delta_1 \perp \Delta_2$ c'est-à-dire si et seulement si l'angle des deux plans est droit. On écrira $P \perp Q$.

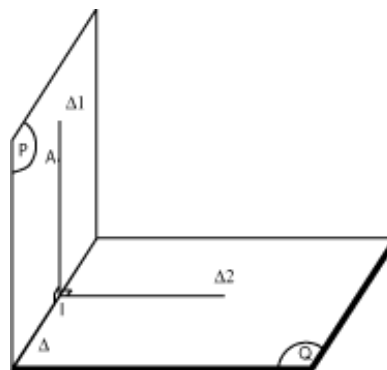
3-3- Proposition

Si deux plans P et Q sont perpendiculaires, alors toute droite passant par un point du plan P et perpendiculaire à l'intersection des deux plans est perpendiculaire au plan Q.

Soit P et Q deux plans perpendiculaires et Δ leur droite commune.

Soit A un point de P et Δ_1 une droite contenue dans P et passant par A. On suppose que Δ_1 est perpendiculaire à Δ coupe Δ en un point I. Soit Δ_2 la perpendiculaire en I à Δ et contenue dans Q.

Comme $\Delta_1 \perp \Delta$ et $\Delta_1 \perp \Delta_2$ alors, Δ_1 est perpendiculaire au plan Q.



(Figure 54)

3-4- Théorème

Pour que deux plans P et Q soient perpendiculaires il faut et il suffit que l'un d'eux contienne une droite perpendiculaire à l'autre plan.

Démonstration :

Soit P et Q deux plans et supposons que l'un d'eux par exemple P, contienne une droite Δ_1 perpendiculaire à Q en I (voir figure 54) . Soit Δ l'intersection de P et Q et Δ_2 la droite contenue dans Q et perpendiculaire à Δ . Nous avons $\Delta_2 \perp \Delta$ et $\Delta_2 \perp \Delta_1$ car $\Delta_1 \perp Q$; de plus $\Delta_1 \perp \Delta$ car $\Delta_1 \perp Q$. Donc $P \perp Q$.

3-5- Proposition

Soit P et Q deux plans perpendiculaires et $A \in P$. La perpendiculaire à Q passant par A est contenue dans P.

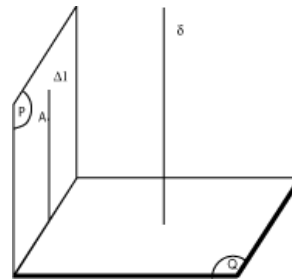
Démonstration

D'après la proposition 3-3, la perpendiculaire Δ_1 à Q passant par A est la perpendiculaire à leur intersection Δ ; donc $\Delta_1 \subset P$.

3-6- Corollaire

Soit P et Q deux plans perpendiculaires. Toute perpendiculaire à l'un d'eux est parallèle à l'autre.

En effet, soit δ une droite perpendiculaire à Q et $A \in P$. La perpendiculaire Δ_1 à Q passant par A et contenue dans P d'après 3-5. Or $\Delta_1 \parallel \delta$; donc $\delta \parallel P$.



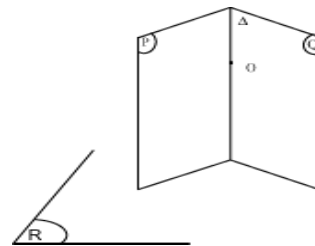
(Figure 55)

3-7- Corollaire

Soit P et Q deux plans sécants perpendiculaires à un troisième plan R. Alors la droite d'intersection est perpendiculaire à R.

En effet soit $O \in P \cap Q$.

La perpendiculaire passant par O et perpendiculaire à Q est contenu dans P et Q. (d'après 3-1)



(Figure 56)

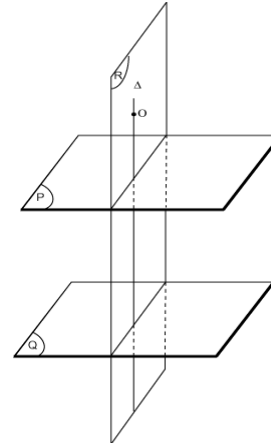
3-8- Corollaire

Soit P, Q et R trois plans. $P \parallel Q$ et $R \perp P$ impliquent $R \perp Q$

En effet soit $O \in R$. La perpendiculaire Δ à P passant par O est contenue dans R ; comme $\Delta \perp P$ et $P \parallel Q$ alors $\Delta \perp Q$; par suite d'après 2-2, on a bien $R \perp Q$.

Remarque

Si deux plans P et Q sont perpendiculaires à un même plan il n'en résulte pas que P et Q sont parallèles.



(Figure 57)

Exercices

Exercice 1

Construire une droite Δ perpendiculaire à un plan donné P et coupant deux droites données Δ_1 et Δ_2 .

Exercice 2

Soit $(ABCD)$ un tétraèdre. Soit Δ la perpendiculaire au plan (BCD) passant par A et Δ' la perpendiculaire au plan (ACD) passant par B . Trouvez une condition nécessaire et suffisante pour que Δ et Δ' soient concourantes.

Exercice 3

Soit $(SABCD)$ une pyramide de base un quadrilatère $(ABCD)$. Soit Δ la perpendiculaire au plan (SBC) et passant par le sommet S de la pyramide et Δ' la perpendiculaire au plan (SAB) passant par C . Trouvez une condition nécessaire et suffisante pour que Δ et Δ' soient concourantes.

Exercice 4

Quelles conditions doivent remplir deux droites données D et D' pour qu'il soit possible de construire par l'une d'elle un plan perpendiculaire à l'autre?

Exercice 5

Soit X un cercle de centre O d'un plan P . Soit S un point de la perpendiculaire en O à P et (MT) la tangente à X en M . Que peut-on dire des plans (OSM) et (SMT) ?

Exercice 6

Peut-on mener par un point O un plan perpendiculaire à deux plans donnés ? à 3 plans donnés ?

Exercice 7

1. On considère un plan P et deux droites Δ et Δ' se coupant en A . On demande de construire une droite perpendiculaire au plan P et coupant respectivement Δ et Δ' .
2. On considère un plan P et deux droites Δ parallèles Δ' . On demande de construire une droite perpendiculaire au plan P et coupant respectivement Δ et Δ' . [indication : cela dépend de la position relative des plans P et Q , où Q est le plan déterminé par Δ et Δ'].
3. On considère un plan P et deux droites Δ et Δ' non coplanaires, et qui ne sont ni parallèles ni perpendiculaires au plan P . On note A et A' les intersections respectives de Δ et Δ' avec le plan P . On demande de construire une droite perpendiculaire au plan P et coupant respectivement Δ et Δ' .

[indication : Il faut commencer à supposer le résultat trouvé, c'est-à-dire que l'on a effectivement trouvé une droite D perpendiculaire en H au plan P et qui coupe à la fois Δ et Δ' respectivement en I et en I' . Faire une esquisse de la figure. Un point quelconque A de Δ distinct de I , et un point quelconque A' de Δ' distinct de I' , sont projetés orthogonalement sur P en K et en K' . Montrer que A , K et H sont alignés et de même pour A' , K' et H .]

Exercice 8

Soit un segment $[AB]$.

1. Déterminer l'ensemble des points de l'espace équidistants de A et de B, c'est-à-dire tous les points M tels que $MA = MB$.
2. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $MA > MB$. Montrer que c'est un ensemble convexe.
3. Etant donné un nombre réel positif k. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $MA^2 - MB^2 = k$.

Exercice 9

On considère un cube (ABCDEFGH) et on note I, J, K et L les centres respectifs des faces (ADHE), (EFGH), (BCGF) et (ABCD).

1. Calculer l'angle des deux plans (IJKL) et (ABCD)
2. Calculer l'angle des deux plans (IJKL) et (ACGE)
3. Calculer l'angle des deux plans (IJB) et (ABCD).

Exercice 10

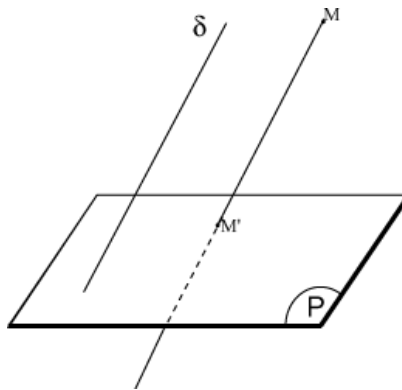
On considère un cube (ABCDEFGH) et on note I, J, K et L les centres respectifs des faces (ADHE) et (EFGH). Calculer l'angle des deux plans (IJB) et (ABCD).

Chapitre 7 : Projection orthogonale sur un plan

1. Projection de base un plan parallèlement à une droite

1-1- Définition

Soit P un plan et δ une droite non parallèle à P . Soit M un point de ξ_3 ; la parallèle à δ passant par M coupe P en M' . L'application f , qui au point M associe le point M' , est appelée la projection de base P et de direction δ .



(Figure 43)

1-2- Propriétés

Soit f la projection de base le plan P et de direction δ . Les propriétés suivantes sont immédiates.

- (a) $f(\xi_3) = P$
- (b) $\{M / f(M) = M\} = P$.
- (c) L'image par f d'une droite Δ non parallèle à δ est une droite de P .
- (d) L'image par f d'un segment $[AB]$ est le segment $[f(A) f(B)]$.

- (e) f conserve le parallélisme (i.e. $\Delta_1 // \Delta_2$ et Δ_1 non parallèle à δ implique $f(\Delta_1) // f(\Delta_2)$).
- (f) f conserve le milieu d'un segment (i.e. si $I = A * B$, alors $f(I) = f(A) * f(B)$).

2. Projection orthogonale sur un plan

2-1- Définition

Soit P un plan et δ une droite perpendiculaire à P . La projection de base P et de direction δ est dite projection orthogonale sur le plan P (ou par rapport à P). Le plan P est appelé plan de la projection orthogonale.

2-2- Proposition

1. L'image par projection orthogonale sur un plan P d'une droite non perpendiculaire à P est une droite de ce plan.
2. Si une droite est parallèle au plan P , alors sa projection orthogonale sur P est une droite qui lui est parallèle.
3. Si une droite n'est pas parallèle au plan P , alors cette droite et sa projection orthogonale sur P se coupent en un point de P .
4. Une droite non incluse dans le plan de projection et sa projection déterminent un plan perpendiculaire au plan de projection.

Démonstration

1. Soit A et B deux points extérieurs au plan P . On projette orthogonalement A et B sur le plan P respectivement en A' et en B' . Puisque A est différent de B , les perpendiculaires au plan P , issues de A et de B , sont distinctes, il s'ensuit que A' est distinct de B' .
2. Supposons que la droite (AB) est parallèle au plan P . Alors, le quadrilatère $(ABB'A')$ est un rectangle. Il s'ensuit que $(AB) // (A'B')$.
3. Si une droite coupe le plan de projection, le point commun est sa propre projection.

4. Notons Q le plan déterminé par une droite et sa projection. Alors Q contient une droite perpendiculaire au plan P , il est donc perpendiculaire à P .

2-3- Proposition

Soit Δ et Δ' deux droites parallèles au plan P . Alors leurs images par projection orthogonale sur un plan P sont deux droites parallèles.

Démonstration

Notons δ et δ' les projections orthogonales sur P de Δ et de Δ' . Par transitivité, δ est parallèle à δ' .

2-4- Proposition

Soit Δ et Δ' deux droites concourantes telles qu'aucune n'est perpendiculaire au plan P . Alors leurs images par projection orthogonale sur un plan P sont deux droites concourantes.

Démonstration

Soit O le point commun des droites Δ et Δ' et ω sa projection orthogonale sur P . Alors les projections orthogonales δ et δ' de Δ et de Δ' passent par ω .

2-5- Exemple de projection orthogonale ne conservant par l'orthogonalité des droites

Nous venons de voir que la projection orthogonale sur un plan P conserve le parallélisme des droites non perpendiculaires à P . Nous allons démontrer qu'elle ne conserve pas en général l'orthogonalité de deux droites.

Soit O un point non situé dans P et (OA) une droite coupant P en A et non perpendiculaire à P .

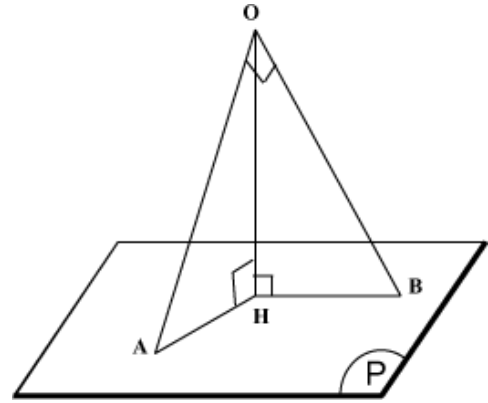
Le plan Q , perpendiculaire à (OA) en O, coupe le plan P suivant une droite Δ ; soit $B \in \Delta$, alors $(AO) \perp (OB)$. Projétons O orthogonalement sur le plan P au point H. Nous avons :

$$OA^2 = OH^2 + HA^2$$

$$OB^2 = OH^2 + HB^2$$

$$AB^2 = OA^2 + OB^2$$

$$AB^2 = 2OH^2 + AH^2 + HB^2$$



(Figure 44)

D'où, $AB^2 > AH^2 + HB^2$. Et par suite (AH) n'est pas perpendiculaire à (HB). Nous sommes ainsi en présence de deux droites (OA) et (OB) perpendiculaires, mais dont les images (HA) et (HB) par projection orthogonale ne sont pas perpendiculaires.

Il serait intéressant de connaître l'hypothèse à ajouter pour que les images de deux droites Δ_1 et Δ_2 orthogonales soient orthogonales. Les propositions suivantes répondent à cette question.

2-6- Théorème

Soit P un plan, Δ_1 et Δ_2 deux droites non perpendiculaires au plan P. On note δ_1 et δ_2 les projections orthogonales sur P des droites Δ_1 et Δ_2 et on suppose $\Delta_1 \parallel P$. Alors, la condition nécessaire et suffisante pour que δ_1 soit perpendiculaire à δ_2 est que Δ_1 soit orthogonale à Δ_2 .

Démonstration

Notons Q le plan déterminé par Δ_2 et sa projection δ_2 . D'après 2.2, le plan Q est perpendiculaire au plan P. En outre, δ_2 est l'intersection de P et de Q.

Condition nécessaire: Supposons $\delta_1 \perp \delta_2$ et montrons que Δ_1 est orthogonale à Δ_2 .

Comme $\delta_1 \perp \delta_2$, δ_1 est donc perpendiculaire au plan Q, donc orthogonale à toute les droites de Q, en particulier: δ_1 est orthogonale à Δ_2 . Or, $\Delta_1 \parallel \delta_1$ car $\Delta_1 \parallel P$ par hypothèse. Il s'ensuit que Δ_1 est orthogonale à Δ_2 .

Condition suffisante : Supposons que Δ_1 est orthogonale à Δ_2 et montrons que $\delta_1 \perp \delta_2$.

Comme $\Delta_1 // P$ par hypothèse, alors $\Delta_1 // \delta_1$. Mais comme par hypothèse Δ_1 est orthogonale à Δ_2 , il s'ensuit que sa parallèle δ_1 est orthogonale à Δ_2 .

Supposons que Δ_2 coupe P en A .

Soit $I \in \Delta_2$ et J sa projection orthogonale sur le plan P . Alors $J \in \delta_2$ et $(IJ) \perp P$. Il s'ensuit que (IJ) est orthogonale à δ_1 , car δ_1 est dans P . Nous avons donc: δ_1 orthogonale à la fois à Δ_2 et à (IJ) , donc orthogonale au plan qu'elles déterminent qui est en fait Q . Il en résulte que δ_1 est orthogonale à toutes droites de Q , en particulier à δ_2 .

(Figure 45)

2-7- Proposition

Si Δ_1 est orthogonale à Δ_2 et si δ_1 et δ_2 , leurs projections orthogonales sur un plan P , sont perpendiculaires, alors l'une des deux droites Δ_1 ou Δ_2 est parallèle à P .

Démonstration

Supposons Δ_2 non parallèle à P et montrons que $\Delta_1 // P$.

Notons P_1 le plan déterminé par Δ_1 et sa projection orthogonale δ_1 et P_2 le plan déterminé par Δ_2 et sa projection orthogonale δ_2 . Le plan P_1 étant perpendiculaire à P , toute droite de P perpendiculaire à leur intersection δ_1 est perpendiculaire à P_1 . Comme $\delta_2 \perp \delta_1$, il s'ensuit $\delta_2 \perp P_1$ et $\delta_2 \perp \Delta_1$. Or par hypothèse, $\Delta_2 \perp \Delta_1$, d'où $\Delta_1 \perp P_2$. Comme Δ_2 n'est pas parallèle à P , elle le coupe en un point A appartenant à δ_2 . Menons de A la parallèle d_1 à Δ_1 . L'orthogonalité $\Delta_1 \perp P_2$ implique $d_1 \perp \delta_2$. Or, dans le plan P , d_1 et δ_1 sont perpendiculaires à δ_2 , d'où $d_1 // \delta_1$ et par transitivité $\Delta_1 // P$.

2-8- Problème corrigé

Soit Δ une droite de ξ_3 et O un point non situé sur Δ .

Soit P un plan variable contenant Δ . Soit H la projection orthogonale de O sur P .

Déterminer l'ensemble des points H .

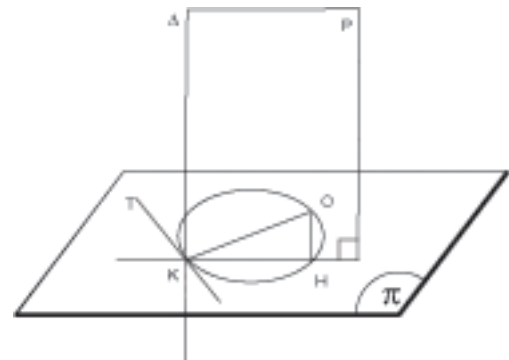
Solution

Soit K la projection orthogonale de O sur Δ .

Le point K est fixe car O et Δ sont fixes.

$\Delta \perp (OH)$ car $(OH) \perp P$; $\Delta \perp (OK)$ par hypothèse donc Δ est perpendiculaire au plan (OKH) et par suite $(KH) \perp \Delta$.

Soit (π) le plan perpendiculaire à Δ en K ; ce plan est fixe et contient K , O et H ; comme le triangle (OKH) est rectangle en H , H appartient au cercle X du plan (π) de diamètre $[KO]$



(Figure 51)

Réciproquement Soit $H \in X$ et distinct de O et K ; le triangle OKH est rectangle en H ; d'autre part $(OH) \perp \Delta$ (car $\Delta \perp (\pi)$ et $(OH) \subset (\pi)$) donc (OH) est perpendiculaire au plan déterminé par Δ et H .

Supposons que $H = K$ et soit (KT) la tangente à X en K . alors $(OK) \perp (KT)$ comme $(OK) \perp \Delta$, on en déduit que (OK) est perpendiculaire au plan contenant Δ et (KT) .

Lorsque $H = O$ la droite (OH) n'est pas définie.

En résumé l'ensemble des points H lorsque P varie est $X - \{O\}$.

Exercices

Exercice 1

On considère un carré ABCD et les demi-droites Ax, By, Cz et Dt perpendiculaires au plan P du carré et de même sens. Sur les prolongements de [DA] et de [CB] on prend deux points I et J et on pose $AI = a$, $BJ = b$. Un plan Q passant par (IJ) coupe Ax, By, Cz, Dt respectivement en A', B', C', D'.

- 1- Quelle est la nature du quadrilatère A'B'C'D' ?
- 2- Comparez $\frac{AA'}{a}$ et $\frac{BB'}{2}$
- 3- Quelles conditions doivent remplir a, b et $k = \frac{AA'}{a}$ pour que A'B'C'D' soit un losange, un rectangle, un carré ?

Exercice 2

- 1- Etudier à quelle condition un triangle isocèle ABC ($AB=AC$) se projette orthogonalement sur un plan suivant un triangle isocèle A'B'C' ($A'B' = A'C'$).
- 2- Etudier à quelle condition la bissectrice de l'angle de deux demi-droites (Ox), (Oy) se projette orthogonalement sur un plan suivant la bissectrice de l'angle (O'x') et (O'y') des projections de (Ox) et (Oy).

Exercice 3

Soit ABCD un tétraèdre. Trouver la direction que doit avoir un plan P pour que (ABCD) se projette orthogonalement sur P suivant un parallélogramme.

Exercice 4

Soit ABC un triangle rectangle en A d'un plan P et A un point de la droite Δ perpendiculaire en A à P. On désigne par α l'angle de (BD) et P par β l'angle de (CD) et P. On donne $\cos(\alpha) = \frac{1}{3}$ et $\cos(\beta) = \frac{1}{3}$. Calculer $\cos(\gamma)$ où γ est l'angle des plans (ACD) et (ABC).

Chapitre 8 : Symétries orthogonales dans l'espace

1. Les isométries de l'espace

1-1- Définition (isométrie)

Soit $f: \xi_3 \longrightarrow \xi_3$, l'application f est une isométrie si et seulement si f conserve la distance.

En d'autres termes, $\forall (A,B) \in \xi_3$, $A' = f(A)$ et $B' = f(B)$, on a $A'B' = AB$.

1-2- Propriétés

1. L'identité de l'espace est une isométrie.
2. Toute isométrie transforme un segment en un segment, une droite en une droite, un plan en un plan, une partie convexe de l'espace en une partie convexe, une demi-droite en une demi-droite et un demi-plan en un demi-plan.
3. f conserve le milieu d'un segment (i.e. si I est le milieu du segment $[AB]$. Si l'on note $I' = f(I)$, $A' = f(A)$ et $B' = f(B)$, alors I' est le milieu du segment $[A'B']$).
4. Toute isométrie est une bijection.
5. Soit (ABC) un triangle et f une isométrie de l'espace. On note $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ et $C' = f(C)$, alors le triangle $(A'B'C')$ est isométrique au triangle (ABC) . (i.e. leurs côtés sont isométriques ainsi que leurs trois angles). Il n'est pas difficile de démontrer que les trois cas d'isométrie, valables en géométrie plane, sont aussi valables dans l'espace ξ_3 .

1-3- Définition (plan médiateur)

Soit A et B deux points, I le milieu du segment [AB] et P un plan de ξ_3 . On dit que P est le plan médiateur du segment [AB], si la droite AB est perpendiculaire au plan P en I.

1-4- Proposition

Soit A et B deux points et P leur plan médiateur, alors P est l'ensemble des points équidistants de A et de B.

(Démonstration immédiate)

1-5- Théorème

Soit f une isométrie de l'espace. A, B, C et D quatre points non coplanaires de ξ_3 . On note $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$ et $D' = f(D)$, alors si $A' = A$, $B' = B$, $C' = C$ et $D' = D$, l'isométrie f est l'identité de l'espace..

Démonstration :

Soit M un point du plan (ABC). Posons $M' = f(M)$, alors si M' est distinct de M, on a $M'A = MA$, $M'B = MB$, $M'C = MC$ et $M'D = MD$. Cela veut dire que A, B, C et D appartiennent tous quatre au plan médiateur du segment [MM']; ce qui est contraire à l'hypothèse indiquant que les 4 points ne sont pas coplanaires. D'où, $M' = M$.

1-6- Corollaire

Soit f et g deux isométries de l'espace telles que $g(A) = f(A)$, $g(B) = f(B)$, $g(C) = f(C)$ et $g(D) = f(D)$ pour quatre points A, B, C et D non coplanaires de ξ_3 , alors f et g sont identiques.

Démonstration :

On considère l'isométrie composée gof .

2. Les translations de l'espace

2-1- Définition (translation)

Soit \vec{v} un vecteur. L'application de ξ_3 qui transforme un point M de ξ_3 en un point M' de ξ_3 vérifiant $\vec{MM'} = \vec{v}$ est appelée la translation de l'espace de vecteur \vec{v} . Notation : $\mathbf{t}_{\vec{v}}$

2-2- Propriétés

1. L'identité de l'espace est une translation de vecteur nul.
2. Toute translation de l'espace est une isométrie.
3. L'image d'une droite par une translation est une droite qui lui est parallèle.
4. Un plan parallèle à la direction du vecteur d'une translation reste invariant par cette translation.
5. Tout plan est transformé par une translation en un plan qui lui est parallèle.
6. La composée de deux translations est une translation.

3. Les rotations de l'espace

3-1- Définition (rotation)

Soit Δ une droite. On suppose que tous les plans perpendiculaires à Δ ont la même orientation. Soit α un réel, l'application de ξ_3 qui transforme un point M de ξ_3 en un point M' de ξ_3 vérifiant :

- (1) M et M' ont même projection orthogonale I sur la droite D.
- (2) $MI = M'I$

(3) L'angle $(\vec{IM}, \vec{IM'}) = \alpha$ (modulo 2π)

est appelée la rotation de l'espace d'axe Δ et d'angle α . Notation : $\mathbf{r}_{(\Delta, \alpha)}$

3-2- Propriétés

- (1) Tout point de l'axe d'une rotation est fixe.
- (2) Toute rotation d'angle nul est l'identité de l'espace.
- (3) Soit M un point de ξ_3 et M' son image par une rotation d'axe Δ et I leur projection orthogonale sur l'axe Δ . Alors, le plan (MIM') est perpendiculaire à l'axe Δ .
- (4) Tout plan perpendiculaire à l'axe d'une rotation est invariant pour cette rotation.

3-3- Proposition

Soit $r_{(\Delta, \alpha)}$ une rotation de l'espace d'axe Δ et d'angle α et P un plan perpendiculaire à l'axe Δ en un point I . Alors la restriction de $r_{(\Delta, \alpha)}$ au plan P est une rotation de ce plan. Son centre est le point I d'intersection de Δ et de P et son angle est α .

La démonstration découle immédiatement de la propriété 4 ci-dessus. L'image M' de tout point M d'un plan perpendiculaire en I à l'axe de la rotation est contenue dans ce plan. De plus, $IM' = IM$ et $(\vec{IM}, \vec{IM}') = \alpha$ (modulo 2π). c'est bien là la définition de la rotation dans le plan de centre I et d'angle α .

3-4- Proposition

Toute rotation de l'espace est une isométrie.

Démonstration :

Soit M et N deux points de ξ_3 , M' et N' leurs images par une rotation d'axe Δ et d'angle α , I et J les projections orthogonales de M et de N sur l'axe Δ .

Projetons orthogonalement M et M' en H et H' sur le plan (NJN') . Alors les triangles (JHH') et (IMM') sont isométriques, car les plans (MIM') et (NJN') sont parallèles. Dans le plan (NJN') , H et N se transforment en H' et N' par une

rotation plan d'angle α , on a donc $N'H' = NH$. Les triangles rectangles (MHN) et (M'H'N') sont donc isométriques; d'où, $M'N' = MN$.

3-5- Théorème

Toute isométrie de l'espace ayant une droite (AB) de points fixes et laissant invariant tout plan perpendiculaire à cette droite est une rotation dont l'axe est (AB).

Démonstration :

Soit M et N deux points distincts appartenant à un plan perpendiculaire à (AB) et tels que A, B, M et N non coplanaires. Notons M' et N' les images par l'isométrie f donnée de M et de N et I la projection orthogonale de M et de N sur (AB). Alors $A' = A$, $B' = B$, $M'A = MA$, $M'B = MB$, $N'A = NA$ et $N'B = NB$. Ces égalités impliquent que (AB) est l'intersection des plans médiateurs de [MM'] et de [NN']. De plus, les triangles (IMN) et (IM'N') sont isométriques et les angles (\vec{IM}, \vec{IM}') et (\vec{IN}, \vec{IN}') sont égaux. Notons α cet angle.

Soit $r_{(\Delta, \alpha)}$ la rotation d'axe (AB) et d'angle $\alpha = (\vec{IM}, \vec{IM}')$. Calculons les images par l'isométrie composée $r_{(\Delta, -\alpha)} \circ f$ des points A, B, M et N. On a :

$$r_{(\Delta, -\alpha)} \circ f(A) = r_{(\Delta, -\alpha)}(A) = A \quad \text{et} \quad r_{(\Delta, -\alpha)} \circ f(B) = r_{(\Delta, -\alpha)}(B) = B,$$

$$r_{(\Delta, -\alpha)} \circ f(M) = r_{(\Delta, -\alpha)}(M') = M \quad \text{et} \quad r_{(\Delta, -\alpha)} \circ f(N) = r_{(\Delta, -\alpha)}(N') = N.$$

Ainsi les points non coplanaires A, B, M et N sont fixes pour $r_{(\Delta, -\alpha)} \circ f$, c'est donc l'identité de l'espace. Il résulte de 1.6 que $f = r_{(\Delta, \alpha)}$.

3-6- Cas particulier

Soit Δ une droite d'un plan P. On appelle symétrie orthogonale d'axe Δ toute rotation d'axe Δ et d'angle π . Notation : s_{Δ}

3-7- Théorème

La composée $s_2 \circ s_1$ de deux symétries orthogonales s_1 et s_2 d'axes parallèles Δ_1 et Δ_2 est une translation de vecteur $2\vec{v}$ tel que $t_{\vec{v}}(\Delta_1) = \Delta_2$.

Démonstration :

Etudiez que $t_{-2\vec{v}} \circ s_2 \circ s_1$.

3-8- Théorème

La composée $s_2 \circ s_1$ de deux symétries orthogonales s_1 et s_2 d'axes Δ_1 et Δ_2 concourants en un point O est une rotation $r_{(\Delta, 2\alpha)}$ telle que $r_{(\Delta, \alpha)}(\Delta_1) = \Delta_2$ et Δ est la droite perpendiculaire en O au plan déterminé par Δ_1 et Δ_2 .

Démonstration :

Etudiez que $r_{(\Delta, 2\alpha)} \circ s_2 \circ s_1$.

3-9- Remarque

La composée $s_2 \circ s_1$ de deux symétries orthogonales s_1 et s_2 d'axes Δ_1 et Δ_2 non coplanaires sera étudiée au prochain chapitre comme application de la perpendiculaire commune.

4. La symétrie par rapport à un point

4-1- Définition (symétrie par rapport à un point)

Soit O un point. L'application de ξ_3 qui transforme un point M de ξ_3 en un point M' de ξ_3 vérifiant $\vec{OM} = -\vec{OM}'$ est appelée la symétrie de l'espace de centre O . (ou une symétrie centrale). Notation : s_O

4-2- Propriétés

- (1) Tout plan passant par O est invariant par une symétrie de centre O .
- (2) Toute droite passant par O est invariante par une symétrie de centre O .
- (3) Toute symétrie centrale est une isométrie. En effet, deux points M , N et leurs images M' , N' se trouvent dans un même plan.
- (4) L'image de toute droite par une symétrie centrale est une droite qui lui est parallèle.
- (5) L'image d'un plan par une symétrie centrale est un plan qui lui est parallèle.

4-3- Théorème

La composée $s_{O'} \circ s_O$ de deux symétries centrales s_O et $s_{O'}$ de centres respectifs O et O' est une translation de vecteur $2\vec{OO'}$.

Montrez que $t_{\vec{2OO'}} \circ s_{O'} \circ s_O$ n'est autre que l'identité de l'espace.

5. La symétrie par rapport à un plan

5-1- Définition

Soit P un plan. L'application S_P de ξ_3 dans ξ_3 qui à tout point M de ξ_3 associe le point M' tel que P est le plan médiateur de $[MM']$ est appelée la **symétrie orthogonale de base P** . Il est clair que S_P est une isométrie de ξ_3 .

5-2- Lemme

Soit f une isométrie de ξ_3 laissant fixes trois points A , B et C non alignés. On note P le plan passant par A , B et C . Alors, $f(P) = P$.

Cela revient à dire que toute isométrie de l'espace laissant fixes trois points non alignés, laisse invariant le plan déterminé par ces trois points.

La démonstration est la conséquence directe de la démonstration de 1.5.

5-3- Théorème

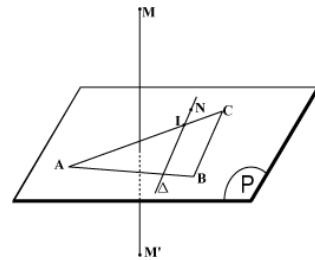
Soit f une isométrie de ξ_3 laissant fixes trois points A , B et C non alignés. Alors, f est la symétrie orthogonale de base le plan (ABC) .

Démonstration :

Désignons par P le plan défini par A , B et C . Soit N un point de P . La restriction de f à P est une isométrie de P possédant trois points distincts invariants, c'est donc l'identité id_P de P . D'où; $f(N) = N$.

Soit M un point non situé dans P et $M' = f(M)$.

f étant une isométrie, nous avons $AM = AM'$, $BM = BM'$ et $CM = CM'$. Il en résulte que les points A , B et C appartiennent au plan médiateur de $[MM']$ et par suite, $M' = S_P(M)$. Comme $f(N) = N = S_P(N)$ pour tout point N de P , $f = S_P$.



(Figure 42)

5-4- Théorème

La composée $s_{P_2} \circ s_{P_1}$ des deux symétries orthogonales par rapport à deux plans

P_1 et P_2 parallèles est une translation de vecteur $2\vec{v}$ tel que $t_{\vec{v}}(P_1) = P_2$.

Démonstration :

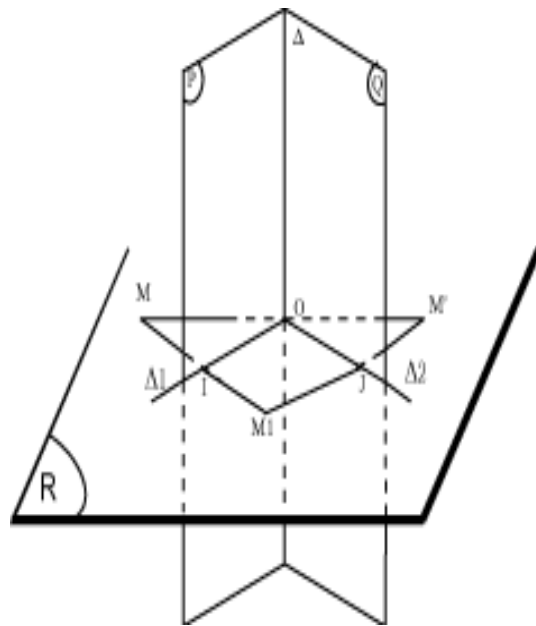
Etudiez que $t_{\vec{v}} \circ s_{P_2} \circ s_{P_1}$.

5-5- Théorème

La composée $g \circ f$ des deux symétries orthogonales par rapport à deux plans perpendiculaires est une symétrie orthogonale d'axe leur intersection.

Soit P et Q deux plans perpendiculaires d'intersection Δ . Désignons par f et g les symétries orthogonales par rapport à P et Q respectivement. Soit $M \in \xi_3$ posons $M_1 = f(M)$ et $M' = g(M_1)$.

Soit d'autre part R le plan passant par M et perpendiculaire à Δ . Les plans P et Q coupent R suivant les droites Δ_1 et Δ_2 respectivement. Les droites Δ_1 et Δ_2 se coupent en un point O de Δ .



(Figure 62)

Puisque $P \perp Q$, les droites Δ_1 et Δ_2 sont perpendiculaires et P est le plan médiateur de $[MM_1]$, donc M_1 est le symétrique de M par rapport à Δ_1 ; de même M' est le symétrique de M_1 par rapport à Δ_2 . Il en résulte que M' est le symétrique de M par rapport à l'intersection O de Δ_1 et Δ_2 . D'autre part puisque $P \perp R$ et $Q \perp R$, les points M , M_1 et M' appartiennent au plan R . Il s'ensuit

$(MM') \perp \Delta$. (car $\Delta \perp R$). En conclusion **gof** est la symétrie orthogonale par rapport à l'intersection Δ de P et Q.

Exercices

Exercice 1

Soit P un plan, A et B deux points d'un même côté de P. Soit A' le symétrique de A par rapport à P.

1- Montrez que $BA \leq BA'$.

2- Déterminer l'ensemble des points M et de P tel que $MA^2 + MB^2$ ait la plus petite valeur possible.

3- Trouvez dans P un point N tel que $NA + NB$ soit minimale.

Exercice 2

Soit (ABC) et (CDE) deux triangles isométriques contenus dans un plan P. Déterminer toutes les isométries de l'espace qui transforment A en A', B en B' et C en C'.

Exercice 3

Soit (ABCD) un trièdre vérifiant $(AB) \perp (AC)$, $(AB) \perp (AD)$ et $(AC) \perp (AD)$. Déterminer l'isométrie composée des symétries par rapports aux axes (AB), (AC) et (AD).

Exercice 4

Soit (AB) et (CD) deux droites orthogonales non coplanaires. On suppose que $AB = CD$. Montrer qu'il existe une isométrie que transforme A en C et B en D.

Exercice 5

Soit (AB) et (CD) deux droites quelconques non coplanaires. On suppose que $AB = CD$. Montrer qu'il existe une isométrie qui transforme A en C et B en D .

Exercice 6

Montrer que la composée de deux rotations de l'espace, d'axes parallèles est soit une translation, soit une rotation.

Exercice 7

Soit O un point extérieur à un plan P et H sa projection orthogonale sur P . On note s_O la symétrie par rapport à O , S_P la symétrie par rapport au plan P , s_Δ la symétrie par rapport à Δ . Déterminer un vecteur \vec{v} tel que $S_P \circ s_O = t_{\vec{v}} \circ s_\Delta$.

Chapitre 9 : Distances, aires et volumes

1. Perpendiculaire commune à deux droites non coplanaires de l'espace

Lorsque deux droites de l'espace sont coplanaires, elles peuvent être concourantes ou parallèles. Si elles sont concourantes en O , alors il existe une droite unique perpendiculaire en O au plan qu'elles déterminent. Si elles sont parallèles, alors il existe dans le plan qu'elles déterminent une infinité de droites perpendiculaires à l'une et à l'autre, mais aucune droite non contenue dans ce plan n'est une perpendiculaire commune. Remarquer que si A et B appartiennent respectivement à l'une et à l'autre droite et si (AB) est leur perpendiculaire commune, alors AB est la distance des deux droites. Que se passe-t-il lorsque les deux droites ne sont pas coplanaires?

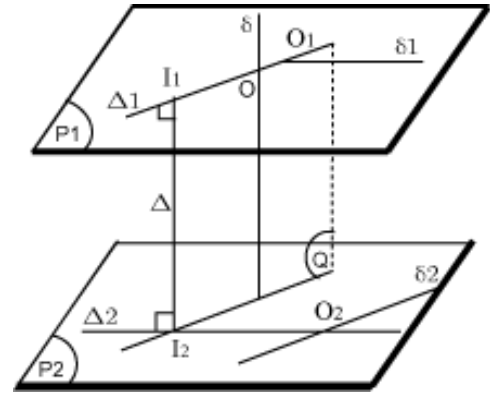
Soit Δ_1 et Δ_2 deux droites non coplanaires. Nous allons démontrer qu'il existe une droite unique Δ coupant Δ_1 et Δ_2 et perpendiculaire à Δ_1 et Δ_2 .

1-1- Théorème

Soit Δ_1 et Δ_2 deux droites non coplanaires. Il existe une droite unique Δ coupant Δ_1 et Δ_2 et perpendiculaire à Δ_1 et Δ_2 .

Démonstration

Soit un point quelconque O_1 de Δ_1 et la droite δ_1 passant par O_1 et parallèle à Δ_2 . Désignons par P_1 le plan contenant Δ_1 et δ_1 . De même, soit δ_2 la droite passant par un point O_2 de Δ_2 telle que δ_2 parallèle à Δ_1 . Désignons par P_2 le plan déterminé par Δ_2 et δ_2 . Il est clair que $P_1 // P_2$. Toute droite Δ perpendiculaire à Δ_1 et à Δ_2 est nécessairement perpendiculaire à P_1 et P_2 , d'après 3-9.



(Figure 38)

Soit δ la droite passant par O_1 et perpendiculaire à P_1 . Désignons par Q le plan déterminé par δ et Δ_1 ; Q coupe P_2 suivant une droite Δ_3 , parallèle à Δ_1 , car $\Delta_1 // P_2$. Puisque Δ_1 et Δ_2 ne sont pas parallèles, la droite Δ_3 , située dans P_1 , coupe Δ_1 en un point I_2 . La parallèle à δ , passant par I_2 , est contenue dans Q , et coupe Δ_1 en I_1 . La droite $(I_1I_2) = \Delta$ est perpendiculaire à la fois à Δ_1 et à Δ_2 .

L'unicité de $(I_1I_2) = \Delta$ découle immédiatement du fait que Δ_1 et Δ_2 ne sont pas coplanaires.

1-2- Définition (perpendiculaire commune de deux droites de l'espace)

Soit Δ_1 et Δ_2 deux droites non coplanaires. La droite unique perpendiculaire à la fois à Δ_1 et à Δ_2 est appelée la perpendiculaire commune à Δ_1 et à Δ_2 .

1-3- Proposition

Soit Δ_1 et Δ_2 deux droites non coplanaires et Δ la perpendiculaire commune à Δ_1 et Δ_2 en I_1 et I_2 . On mène de I_1 la parallèle D_1 à Δ_2 et de I_2 la parallèle D_2 à Δ_1 . Alors les plans déterminés P_1 et P_2 par Δ_1 et D_1 d'une part et par Δ_2 et D_2 d'autre part sont parallèles et (I_1I_2) leur est perpendiculaire.

Démonstration

On considère les plans P_1 et P_2 parallèles trouvés dans la démonstration du théorème précédent. Alors Δ_1 et D_1 sont contenues dans P_1 et Δ_2 et D_2 sont

contenues dans P_2 . D'autre part, étant perpendiculaire à deux droites du plan P_1 , la droite (I_1I_2) est perpendiculaire à P_1 . De même, $(I_1I_2) \perp P_2$.

1-4- Corollaire

Soit Δ_1 et Δ_2 deux droites non coplanaires et Δ la perpendiculaire commune à Δ_1 et Δ_2 . Alors tout plan perpendiculaire à Δ est parallèle aux droites Δ_1 et Δ_2 .

(Démonstration immédiate)

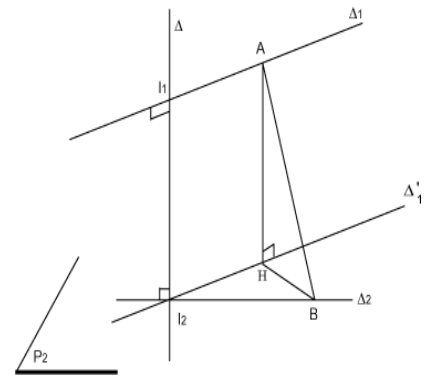
1-5- Proposition

Soit Δ_1 et Δ_2 deux droites non coplanaires et Δ est la perpendiculaire commune à Δ_1 et Δ_2 en I_1 et I_2 . Alors $I_1I_2 = \inf \{ AB \mid A \in \Delta_1 \text{ et } B \in \Delta_2 \}$.

Démonstration

Soit A un point quelconque de Δ_1 . Désignons par Δ_1' la parallèle à Δ_1 passant par I_2 et par P le plan déterminé par Δ_1' et Δ_2 . La parallèle à (I_1I_2) contenant A coupe Δ_1' en H . Il en découle que $(AH) \perp P$.

Soit B un point quelconque de Δ_2 . Le triangle (AHB) est rectangle en H , donc $AB > AH$, or $AH = I_1I_2$, car le quadrilatère (I_1I_2HA) est un rectangle.



(Figure 39)

Il en résulte que I_1I_2 est la plus courte distance entre un point quelconque de Δ_1 et un point quelconque de Δ_2 .

1-6- Définition (distance de deux droites de l'espace)

Soit Δ_1 et Δ_2 deux droites non coplanaires et Δ la perpendiculaire commune à Δ_1 et Δ_2 en I_1 et I_2 . On dit que I_1I_2 est la distance des deux droites Δ_1 et Δ_2 .

2. Plan médiateur d'un segment

2-1- Définition

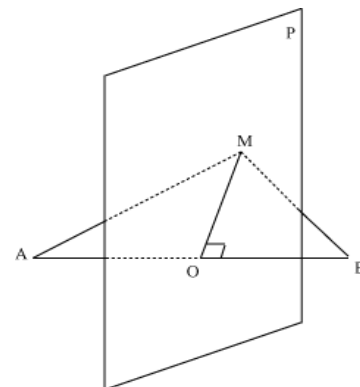
Soit A et B deux points de ξ_3 et O le milieu de [AB], on appelle plan médiateur de [AB] le plan perpendiculaire à la droite (AB) en O.

2-2- Théorème

Soit [AB] un segment ($AB > 0$) de ξ_3 . Pour qu'un point M soit équidistant de A et B il faut et il suffit que M appartienne au plan médiateur de [AB].

Soit P le plan médiateur de [AB] et $M \in P$. Puisque $(AB) \perp P$ et $(AB) \cap P = \{O\}$, la droite (OM) est perpendiculaire à la droite (AB) en O.

Il en résulte que (OM) est la médiatrice de [AB] contenue dans le plan (MAB). D'où, $MA = MB$. Réciproquement, soit M un point de ξ_3 tel que $MA = MB$, la droite (MO) est la médiatrice de [AB] contenue dans le plan (MAB): donc $(OM) \subset P$.



(Figure 40)

2-3- Proposition

Le plan médiateur d'un segment [AB] partage l'espace ξ_3 en deux composantes convexes, l'une $\Gamma(A)$ contenant A et l'autre contenant B. De plus, M appartient à $\Gamma(A)$ si et seulement si $MA > MB$.

Démonstration immédiate.

2-4- Proposition

Soit Δ_1 et Δ_2 deux droites non coplanaires et Δ la perpendiculaire commune à Δ_1 et à Δ_2 en I_1 et en I_2 . Le plan médiateur du segment $[I_1I_2]$ est parallèle aux deux droites Δ_1 et Δ_2 .

(Conséquence directe du corollaire 1.3)

2-5- Proposition

Les plans médiateurs des douze arêtes d'un cube sont concourants en un point O équidistant de ses huit sommets. O est appelé centre du cube.

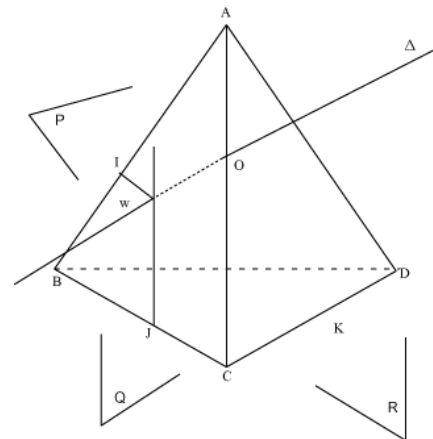
2-6- Définition (tétraèdre)

Soit A, B, C, D quatre points non coplanaires. Les points A, B, C et D sont les sommets d'une pyramide triangulaire (ou d'un tétraèdre).

2-7- Proposition

Les plans médiateurs des six arêtes d'un tétraèdre $(ABCD)$ sont concourants en un point O équidistant des quatre sommets.

Soit P, Q et R les plans médiateurs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ respectivement. Il est clair que ces trois plans sont sécants deux à deux. Soit Δ la droite commune à P et à Q . Puisque Δ est orthogonale à (AB) et à (CD) , la droite Δ est perpendiculaire au plan (ABC) en un point ω qui est le centre du cercle circonscrit au triangle (ABC) . Le plan médiateur R de $[CD]$ coupe Δ en un point O .



(Figure 41)

D'après le théorème 2-2, le point O est équidistant des quatre sommets A, B, C et D du tétraèdre, il appartient donc aux plans médiateurs de $[AC]$, $[AD]$ et $[BD]$.

Remarque

Le résultat 2-7 peut être exprimé en disant que par quatre points non coplanaires de l'espace ξ_3 il passe une sphère (et une seule) dont le centre est le point commun aux six plans médiateurs des arêtes du tétraèdre (ABCD). Cette sphère est appelée la sphère circonscrite au tétraèdre (ABCD).

3. Prismes et cylindres

3-1- Définitions

Etant données une courbe fermée π d'un plan P et une direction δ non parallèle à P. L'ensemble des droites parallèles à δ qui coupent le plan P en un point de π est appelé surface prismatique de base π (ou surface cylindrique de base le cercle π) Tout plan P' parallèle à P coupe la surface prismatique (ou cylindrique) en une courbe fermée π' isométrique à π . La figure obtenue, constituée des deux bases parallèles et de la surface limitée par ces deux bases, est appelée prisme de base π (ou cylindre de base le cercle π). Les droites parallèles à δ sont les généralrices du prisme (ou du cylindre). La distance entre les deux bases est appelée hauteur du prisme (ou du cylindre). Lorsque la base est un polygone ayant n côtés, le prisme possède n faces latérales qui sont des parallélogrammes. Lorsque les généralrices de la surface prismatique (ou cylindrique) sont perpendiculaires au plan de la base, le prisme (ou le cylindre) est dit droit. Un parallélépipède est un prisme dont la base un parallélogramme, il peut être oblique ou droit. Un cube est un prisme droit.

Figures 42 (prisme oblique) - Figure 43 (cylindre oblique) - Figure 44 (prisme droit) - figure 45 (cylindre droit).

3-2- Développement d'une surface prismatique ou cylindrique

Etant donné un prisme (ou un cylindre) de base π . On découpe la surface latérale le long d'une généralrice passant par un des sommets de la base si elle est un polygone ou par un point quelconque si la base est un cercle. On dit que l'on a développé le prisme (ou le cylindre).

Figure 46 (développement du prisme) - Figure 47 (développement du cylindre)

3-3- Proposition (aire d'un prisme)

L'aire d'un prisme est la somme des aires de la surface latérale et celles des deux bases : **Aire(prisme) = 2Aires(bases) + Périmètre(base) x Hauteur(prisme)**

On déduit ce résultat en observant le développement du prisme.

Exemples :

1. Soit un triangle (ABC) tel que $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ et sa hauteur issue de A est $AH = u$. Alors l'aire du prisme de base (ABC) et de hauteur h est

$$au + (a + b + c)h.$$

2. Soit un parallélogramme Π dont les côtés mesurent a et b. Alors l'aire du parallélépipède de base Π et de hauteur h est.

$$2ab + 2(a + b)h$$

3. Soit un cercle C de rayon r. Alors l'aire du cylindre de base C et de hauteur h est $2\pi r^2 + 2\pi rh$.

3-4- Axiome 10 (volume d'un pavé droit à base rectangulaire)

Le volume d'un pavé droit à base rectangulaire est obtenu par le produit de l'aire de la base et de la hauteur du pavé.

3-5- Proposition (volume d'un pavé oblique à base polygonale)

Le volume d'un pavé oblique à base polygonale est obtenu par le produit de l'aire de la base et de la hauteur du pavé.

On déduit ce résultat en plusieurs étapes et en utilisant le principe que deux pavés superposables, c'est-à-dire dont tous les éléments coïncident, ont même volume. Nous ne proposons pas de démonstrations écrites et nous contenterons des figures.

Première étape : pavé droit dont la base est triangulaire. Figure 48.

Deuxième étape : pavé oblique dont la base est un parallélogramme. Figure 49.

Troisième étape : pavé oblique à base triangulaire. Figure 50.

Quatrième étape : pavé oblique à base polygonale. Figure 51.

4. Pyramides et cônes

4-1- Définitions

Etant données une courbe fermée π d'un plan P et un point S extérieur au plan P. L'ensemble des droites passant par S et qui coupent le plan P en un point de π est appelé surface pyramidale (ou conique) de base π . La figure obtenue, constituée de la surface limitée entre S et le plan de π est appelée pyramide de base π (ou cône de base le cercle π) et de sommet S. Les droites passant par S sont les généatrices du prisme (ou du cône). La distance du sommet à la base est appelée hauteur de la pyramide (ou du cône). Lorsque la base est un polygone ayant n côtés, le pyramide possède n faces latérales qui sont des triangles. Lorsque les génératrices de la surface prismatique (ou conique) sont perpendiculaires au plan de la base, la pyramide est dite droite (et le cône est droit). Lorsque la pyramide est droite et sa base est un polygone régulier, elle est dite régulière. Le centre d'un cube est le sommet de six pyramides régulières isométriques admettant comme bases les faces du cube. Figures 52 (pyramide) - Figure 53 (cône).

4-2- Développement d'une cône

Etant donné un cône de sommet S, de hauteur h et de base un cercle de rayon r. On découpe la surface latérale le long d'une génératrice passant par un point quelconque du cercle de base. On dit que l'on a développé le cône.

Figure 54 (développement du cône)

Le développement de la surface latérale du cône est un secteur circulaire de rayon h et d'angle α vérifiant $\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{r}{h}$. Il s'ensuit que l'aire du cône est donnée par la formule : **Aire(cône, hauteur h, rayon r) = $\pi rh + 2\pi r$**

4-3- Proposition

Si l'on coupe une pyramide (ou un cône) par un plan P' parallèle au plan P de sa base, la section obtenue est une figure semblable à celle de la base B . De plus, si l'on note S le sommet, h la hauteur de la pyramide (ou du cône), h' la distance de S à P' et B' la section de la pyramide (ou du cône) par le plan P' , alors

$$\text{Aire}(B') = \left(\frac{h'}{h}\right)^2 \text{Aire}(B)$$

(Démonstration immédiate, découlant du théorème de Thalès) Figure 54

4-4- Autres sections planes du cône

Le résultat précédent suppose que la section est parallèle au plan de base. Lorsque l'on coupe une pyramide par un plan non parallèle au plan de base, alors la section est un polygone quelconque (voir par exemple l'exercice 3.10). Lorsque l'on coupe un cône par un plan non parallèle au plan de base, alors la section peut être une ellipse, une partie de parabole ou une partie d'hyperbole. (figure 55)

4-5- Corollaire

Soit un cône droit de hauteur h et de sommet S et un plan P parallèle à la base du cône. On note d la distance de S au plan P et on suppose que la base du cône est un cercle de rayon r . Alors la section du cône par le plan P est un cercle de rayon ρ vérifiant $\frac{\rho}{r} = \frac{d}{h}$. L'aire de cette section circulaire est $2\pi \frac{r^2 d^2}{h^2}$

(Démonstration immédiate)

4-6- Définition (tronc de pyramide ou de cône)

Etant donné une pyramide droite (ou un cône droit) de sommet S , de hauteur h et de base B . On coupe cette pyramide (ou ce cône) par deux plans P_1 et P_2 parallèles à la base. Si on note B_1 et B_2 les sections planes obtenues, le solide limité par la surface latérale entre les deux plans et les deux sections planes est appelé tronc de la pyramide (ou tronc du cône). La distance entre les deux plans sécants est appelée hauteur du tronc. (figure 56)

4-7- Théorème

Le volume d'une pyramide (ou d'un cône) est égal à un tiers du produit de l'aire de la base par la hauteur.

Démonstration : On note h la hauteur de la pyramide (ou du cône) , B sa base et S son sommet . Le résultat se montre en plusieurs étapes :

Première étape : On découpe la pyramide (ou le cône) par deux plans parallèles à sa base P_1 et P_2 . On note B_i la section de la pyramide (ou du cône) avec le plan P_i et O_i la projection orthogonale de S sur P_i et O la projection de S sur B . On suppose que $SO_2 > SO_1$. Alors, le prisme (ou le cylindre) de hauteur O_1O_2 contient le tronc de pyramide (ou de cône) de hauteur O_1O_2 . Figure 56.

Deuxième étape : On mène n plans parallèles à la base de la pyramide droite (ou du cône droit) tels que la distance de l'un au suivant soit égale à $\frac{h}{n}$. On note Π_k le

$k^{\text{ième}}$ prisme (ou cône) de base B_k et de hauteur $\frac{h}{n}$, A_k l'aire de sa base et W_k son volume. On sait que Π_k contient un tronc de pyramide (ou cône) limité par les plans P_k et P_{k+1} . Alors, d'après 4.3, $A_k = \frac{k^2}{n^2} A$. alors et $W_k = \frac{h}{n} A_k = \frac{hk^2}{n^2} A$. Pour

chaque n , la pyramide (ou le cône) est entièrement contenue à l'intérieur d'un solide composé des n prismes (ou cylindres) Π_k . Notons V_n le volume de ce

solide. On aura alors $V_n = \sum_{k=1}^{k=n} W_k = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{hk^2}{n^2} A = hA \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k^2}{n^2} = hA \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2}$.

Troisième étape : La pyramide (ou le cône) peut être considéré(e) comme la limite de la suite des n prismes (ou cylindres) lorsque n tend vers l'infini. On note V le volume de la pyramide (ou du cône). Lorsque n tend vers l'infini, V_n tend vers V .

D'où, $V = \frac{hA}{3}$

5. Sphères et boules

5-1- Définitions (sphère et boule)

Soit O un point de ξ_3 et r un réel. L'ensemble $\{M \in \xi_3 \mid OM = r\}$ est appelé la sphère de centre O et de rayon r . La boule fermée de centre O et de rayon r est l'ensemble des points M tels que $OM \leq R$. L'ensemble $\{M \in \xi_3 \mid OM < r\}$ est appelé la boule ouverte de centre O et de rayon r ou l'intérieur de la sphère.

5-2- Proposition

Si une sphère et un plan se coupent, leur intersection est un cercle. On note r le rayon de la sphère, h la distance de O au plan sécant et r le rayon de la section circulaire, alors $r = \sqrt{r^2 - h^2}$.

Démonstration :

On mène de O la perpendiculaire au plan P en un point ω . Soit A un point fixe et M un point quelconque, tous deux appartenant à l'intersection du plan P et de la sphère S . Remarquons que les droites (ωA) et (ωM) sont toutes deux perpendiculaires en ω à la droite (ωO) .

(Figure 51)

Les triangles rectangles $(A\omega O)$ et $(M\omega O)$ sont isométriques (les hypothénuses sont les rayons de la sphère) et ωO commun. D'où, $\omega M = \omega A$. Il s'ensuit que tout point de l'intersection de S et de P appartient au cercle de centre ω et de rayon ωA . Réciproquement tout point de ce cercle appartient à la sphère.

5-3- Proposition

Soit A un point de la sphère S de centre O et P un plan perpendiculaire à la droite (OA) en A. Alors tous les points du plan P distincts de A sont extérieurs à la sphère. On dit que P est un plan tangent à la sphère.

(La démonstration est immédiate)

5-4- Principe de Cavalieri (1598-1647)

Soit deux solides de même hauteur. Si tout plan parallèle à une direction donnée coupe ces deux solides selon deux surfaces ayant même aire, alors les deux solides ont même volume.

5-5- Cylindre évidé

Soit un cylindre droit C et Ω le centre de sa base circulaire. On considère le cône Γ de sommet Ω est dont la base est la base supérieure du cylindre. Alors le solide obtenu en prenant le complément de Γ dans C est appelé le cylindre évidé (figure 52).

5-6- Proposition

Le cylindre évidé de base un cercle de rayon r et de hauteur r a même volume que la demi-boule de rayon r. Il en résulte que : $\text{volume}(\text{sphère, rayon } r) = \frac{4}{3} \pi r^3$.

On place le cylindre évidé et la demi-boule sur un plan P. Ces deux solides ont donc même diamètre r et même hauteur r. On les coupe par un plan Q parallèle à leur base commune. Les sections sont d'une part un anneau dont les cercles concentriques ont pour rayons r et h, et d'autre part un cercle de rayon ρ . Montrons que ces deux surfaces ont même aire. En effet, l'aire de l'anneau est $\pi r^2 - \pi h^2$, alors que celle de la section de la sphère est égale à $\pi \rho^2$ avec $\rho^2 = r^2 - h^2$. (figure 53).

Comme les sections du cylindre évidé et de la demi-boule ont mêmes aires, le principe de Cavalieri affirme que leurs volumes sont égaux.

Exercices

Exercice 1

Soit $(ABCDEFGH)$ un cube. On note $I = A * C$, $J = B * G$. Déterminer la perpendiculaire commune des droites (IJ) et (AE) .

Exercice 2

Le plan médiateur d'un segment $[AB]$ partage ξ_3 en deux composantes convexes. Quelles inégalités caractérisent les points de chacune de ces deux composantes ?

Exercice 3

Etant donnés deux points A et B situés de part et d'autre d'un plan P , trouver le point M de P tel que $MA + MB$ soit minimale ; trouver le point N de P tel que $|NA - NB|$ soit maximale.

Exercice 4

Etant donné un cube $(ABCDEFGH)$. Déterminer le plan médiateur de $[AG]$, puis de $[BF]$ et en déduire l'intersection.

Exercice 5

Montrez que le centre O d'un cube $(ABCDEFGH)$ est le sommet de six pyramides dont les bases sont les faces du cube : $(O, ABCD)$, $(O, CDHG)$, $(O, EFGH)$, $(O, ABFE)$, $(O, BCGF)$, $(O, ADHE)$ et que ces pyramides sont isométriques.

Exercice 6

Soit $(ABCD)$ un tétraèdre vérifiant $(AB) \perp (CD)$ et $(AC) \perp (BD)$. Pour chaque couple d'arêtes, déterminer leur perpendiculaire commune.

Exercice 7

Soit $[BC]$ un segment et α un réel strictement compris entre 0 et π . Trouvez tous les points M de l'espace tels que $\widehat{BMC} = \alpha$. [indication : Penser à l'arc capable]

Exercice 8

Deux segments $[AA']$ et $[BB']$ sont perpendiculaires à un plan P en A et B . On pose $AA' = 2a$ $BB' = a$ et $AB = 3a$.

1. Déterminez l'ensemble (Γ) des points tels que $\widehat{AMA'} = \widehat{BMB'}$.

Déterminez $(\Gamma) \cap (AB)$.

2. Pour quelles positions de M on ait $\widehat{AMA'}$ et $\widehat{BMB'}$ sont minimum ou maximum ? Quelle est la valeur du maximum ?

Exercice 9

On dit qu'un cylindre droit est d'Archimède si sa hauteur h est égale au diamètre de son cercle de base.

1. Montrez que tous les plans médiateurs des diamètres du cercle de base se coupent en l'axe Δ du cylindre.
2. Montrez que toutes des génératrices du cylindre admettent le même plan médiateur P .
3. On note O l'intersection de Δ et de P . Montrez que la sphère de centre O et de diamètre h est tangente aux bases du cylindre.
4. Comparez les aires et volumes de cette sphère inscrite dans le cylindre et ceux du cylindre.

Exercice 10

On considère un solide de forme cubique et on envisage de le couper par un plan.

1. On voudrait obtenir une section dont la forme est un triangle équilatéral. Est-ce possible? Si oui, combien de solutions peut-on trouver?
2. Construire une section carrée dont les sommets appartiennent à quatre arêtes du cube, mais dont le plan de section n'est parallèle à aucune des faces du cube. Est-elle unique?
3. On voudrait obtenir une section dont la forme est un hexagone régulier. Est-ce possible? Si oui, combien de solutions peut-on trouver?
4. Déterminer la nature de toutes les sections que l'on peut obtenir.

Exercice 11

On donne dans un plan P un carré $ABCD$ de côté $2a$.

Dans le plan Q passant par (AB) et perpendiculaire à P on construit le triangle équilatéral AEB . Un point M variable décrit $[AB]$; on pose $AM = x$.

1- On désigne par K et K' les milieux de $[AB]$ et $[CD]$, par N la projection orthogonale de E sur (MC) et par N' la projection orthogonale de C sur (ME) .

- a- Déterminez les ensembles décrits par N et N' lorsque M décrit $[AB]$
- b- Montrez que les sept points E, K, N, N', K', C, B sont sur une même sphère (Σ) dont on déterminera le centre O et son rayon R .

2- Calculez MO en fonction de a et de x .

Exercice 12

Soit P un plan, S un point non situé sur P . La perpendiculaire à P passant par S coupe P en A ; soit $B \in P$.

1- Déterminez l'ensemble (Γ) des points M de P tels que les plans (SMA) et (SMB) soient perpendiculaires. Dans toute la suite du problème on supposera $M \in (\Gamma)$.

2- Soit H la projection orthogonale de A sur (SM). Quel est l'ensemble des points H lorsque M décrit (Γ) ?

3- Soit I la projection orthogonale de A sur (SB) ; démontrer qu'il existe un point équidistants de A, B, M, H et I.

4- Les quatre points B, M, H et I sont sur même cercle. Déterminez l'ensemble des centres des cercles (B,M,H, I) lorsque M varie sur (Γ) .

Exercice 13

Soit un tétraèdre ABCD tel que $CB = CA = DB = DA = a$, $CD = b$ et tel que les plans (BCD) et (ACD) soient perpendiculaires.

1- Calculer AB et IJ où $I = A * B$ et $J = C * D$.

2- Quelle est la perpendiculaire commune à (AB) et (CD) ; calculer la distance entre (AB) et (CD).

3- Montrer que le centre O de la sphère circonscrite à A, B, C, D appartient à (IJ). Calculer OJ.

Exercice 14

Soit Δ_1 et Δ_2 deux droites non coplanaires dont la perpendiculaire commune Δ coupe Δ_1 en A et Δ_2 en B. On mène par A une droite qui coupe Δ_2 en M puis par B la droite orthogonale à (AM) qui rencontre Δ_1 en N.

Montrez que le produit $AN \cdot BM$ est constant lorsque M décrit Δ_2 .

Montrez que : $AN^2 + BM^2 = AB^2 + MN^2$.

Exercice 15

Etant donné un cône droit de sommet S, de hauteur h et de base un cercle de rayon r. On coupe ce cône par un plan P' parallèle à la base. Le solide obtenu limité par la surface latérale et des deux sections circulaires est appelé tronc du cône. Notons r' le rayon de la section circulaire C' du cône par le plan P'. Si A est un point de C,

on note A' l'intersection de (SA) et de C' . On dit que $[AA']$ est une génératrice du tronc de cône. On pose $SA = a$ et $SA' = a'$.

1. Montrer que $\frac{r'}{r} = \frac{h'}{h} = \frac{a'}{a}$.
2. Montrer que le volume du tronc du cône est égal à $\frac{1}{3} \pi (h - h')(r^2 + r'^2 + rr')$
3. Développer le tronc du cône.
4. En déduire que l'aire latérale du tronc de cône est égale à $\pi(a - a')(r + r')$.

Exercice 16

L'objet de cet exercice est de calculer le volume d'un tétraèdre et d'en déduire celui de toute pyramide à base polygonale et de tout cône.

1. Soit (S, ABC) une pyramide à base triangulaire et de hauteur h . On mène du sommet S les parallèles aux côtés du triangle de base et on note B' et C' les intersections obtenues. Montrer que $(ABCSB'C')$ est un prisme oblique de hauteur h et de volume $h \times \text{Aire}(ABC)$.
2. Le prisme $(ABCSB'C')$ est composé de trois pyramides (S, ABC) , (S, BCB') et $(S, CC'B')$. Montrer que les pyramides (S, BCB') et $(S, CC'B')$ ont même volume.
3. En déduire que les tétraèdres (S, ABC) , (S, BCB') et $(S, CC'B')$ ont même volume. D'où, $\text{Volume}(\text{tétraèdre, hauteur } h, \text{ base}(ABC)) = \frac{h \times \text{Aire}(\text{base})}{3}$.
4. Calculer le volume d'une pyramide dont la base est un polygone quelconque.
5. En déduire le volume du cône.

Exercice 17

Un polyèdre est un solide de l'espace dont toutes les faces sont des polygones. Une pyramide ou un prisme sont des polyèdres. Un polyèdre est dit régulier lorsque ses faces sont des polygones réguliers.

1. Dessiner un polyèdre régulier ayant 6 faces. Combien de sommets et d'arêtes possède-t-il?
2. Soit I, J, K, L, M et N les centres des faces du polyèdre régulier à six faces. Montrez que (IJKLMN) est un polyèdre régulier. Combien a-t-il de faces, d'arêtes? Trouver une relation entre le nombre de ses faces, celui de ses arêtes et le nombre de ses sommets.
3. Montrer qu'il n'existe que cinq polyèdres réguliers dans l'espace.

Bibliographie

MATHEMATIQUES, Première année secondaire, CNP, Tunis, 2003-2004.

Dans ce manuel, le chapitre 8 de la partie "travaux géométriques" est consacré aux sections planes d'un solide.

MATHEMATIQUES, Deuxième année secondaire, CNP, Tunis, 2003-2004.

Dans ce manuel, le chapitre 4 de la partie "activités géométriques" est consacré au plan médiateur d'un segment. A l'axe d'un cercle (dans l'espace) et aux plans perpendiculaires.

MATHEMATIQUES, Troisième année secondaire, CNP, Tunis, 2003-2004.

Dans ce manuel, les chapitres 7, 8, 9 et 10 du tome II sont respectivement consacrés aux chapitres:

- Projection dans l'espace.
- Vecteurs de l'espace.
- Droites et plans de l'espace.
- Produit scalaire dans l'espace.

GEOMETRIE, Classe de mathématiques, C. Lebossé et C. Hémerly, Fernand Nathan, Paris, 1963.

Dans ce manuel, plusieurs leçons sont consacrées à la géométrie dans l'espace:

- Leçon 3 : Eléments orientés dans l'espace.
- Leçon 4 : Trièdres.
- Leçon 7 : Déplacements dans l'espace.
- Leçon 8 : Symétries dans l'espace.
- Leçon 9 : Homothétie.
- Leçon 10 : Similitude dans le plan et dans l'espace.

Liens Utiles

<http://www.crdp.ac-grenoble.fr/IMEL/jlj/persp/index.htm>

<http://www.prepas.org/ups/maths/>

<http://jellevy.yellis.net/>

<http://www.maths.ac-aix-marseille.fr/debart/index.html#ch1>

Glossaire

A

Axe focal, axe transverse :

Une parabole n'admet qu'un axe de symétrie l'axe focal mené par le foyer perpendiculairement à la directrice. Une conique à centre a deux axes de symétrie, l'axe focal passant par les foyers l'axe non focal, transverse ou orthofocal parallèle aux directrices. Dans tous les cas le sommet ou les sommets sont le ou les points d'intersection de la conique avec l'axe focal.

Axiome :

Propriété prise pour vraie, avant tout raisonnement logique. Axiomes et définitions mathématiques permettent de commencer à faire des démonstrations mathématiques. Dans une théorie, un axiome est une formule de base, que l'on considère vraie sans démonstration. C'est en quelque sorte le "point de départ" qui servira à démontrer des théorèmes.

B

Boule fermée :

de centre O et de rayon r est l'ensemble des points M tels que $OM \leq r$.

L'ensemble $\{M \in \xi_3 \mid OM < r\}$ est appelé la **boule ouverte** de centre O et de rayon r ou l'intérieur de la sphère.

C

carré (en géométrie) :

Polygone régulier à 4 côtés. Un carré est un rectangle dont les 4 côtés sont égaux.

- Dans le plan, pour que quatre points A,B,C,D pris dans cet ordre, soient les sommets d'un carré, il faut et il suffit que $AB = BC = CD = DA$ (4 cotés égaux) et que les segments [AB] et [BC] (deux cotés adjacents) soient perpendiculaires.
- Dans le plan ou l'espace, pour que quatre points A,B,C,D pris dans cet ordre, soient les sommets d'un carré, il faut et il suffit que les segments AC et BD (les diagonales) aient même milieu, même longueur et soient perpendiculaires

Convexe (polygone, polyèdre, corps) :

En géométrie, un *ensemble convexe* est un ensemble de points qui contient tous les segments joignant deux de ses points.

Un *corps convexe* est un ensemble convexe qui n'est pas dégénéré, c'est à dire qui a la même dimension que l'espace ambiant

Convexité :

Soit A une partie non vide de ξ_3 . On dit que A est convexe si chaque fois que A contient deux point A et B , elle contient le segment [AB]. On appelle composante convexe de A toute partie convexe non vide B de A telle que toute partie C de A contenant strictement B n'est pas convexe.

Côtés congrus :

Côtés qui ont la même longueur. Dans un triangle équilatéral, les trois côtés sont congrus. Dans un triangle rectangle isocèle, les deux côtés autres que l'angle droit sont congrus.

D

Diagonale :

Segment de droite qui joint deux sommets non consécutifs dans un polygone. Un carré a deux diagonales ; un pentagone a cinq diagonales ; un hexagone a neuf diagonales. Soit n le nombre de côtés d'un polygone, le nombre de diagonales est égal à $n(n-3)/2$.

Distance :

Soit E un ensemble ; on appelle distance toute application δ de $E \times E$ dans \mathbf{R}_+ vérifiant :

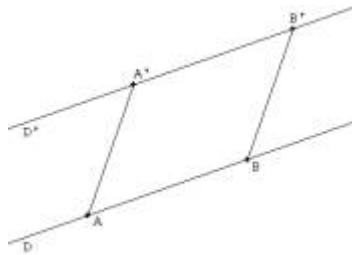
$$- \quad \forall (A,B) \in E \times E \quad \delta(A,B) = \delta(B,A)$$

- $\forall (A,B) \in E \times E \quad \delta(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$
- $\forall (A,B,C) \in E \times E \times E \quad \delta(A,C) \leq \delta(A,B) + \delta(B,C)$

Distance de deux droites de l'espace :

Soit Δ_1 et Δ_2 deux droites non coplanaires et D la perpendiculaire commune à Δ_1 et Δ_2 en I_1 et I_2 . On dit que I_1I_2 est la distance des deux droites Δ_1 et Δ_2 .

Droite orientée

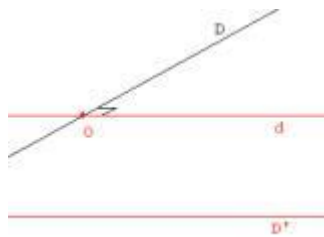


Soit Δ une droite de ξ_3 ; on dit que Δ est une droite orientée si on a choisi une des relations d'ordre total. On dit que deux droites parallèles orientées D et D' sont de même sens, si l'on peut trouver deux points A et B appartenant à D et deux points A' et B' appartenant à D' tels que $A < B$, $A' < B'$ et le quadrilatère $(ABB'A')$ est un parallélogramme.

Droite perpendiculaire à un plan :

Soit Δ une droite et P un plan. La droite Δ est dite perpendiculaire au plan P si elle est orthogonale à toute droite de P .

Droites orthogonales :



Soit D et D' deux droites distinctes de ξ_3 . D et D' sont dites orthogonales s'il existe un point O de D et une droite d parallèle à D' et passant par O , tels que les droites D et d soient perpendiculaires.

Droites perpendiculaires :

Soit Δ_1 et Δ_2 deux droites d'un plan P ; Δ_2 est dite perpendiculaire à Δ_1 si et seulement si $\mathbf{p}(\Delta_2) = \Delta_1$, où \mathbf{p} désigne la symétrie orthogonale d'axe Δ_1 .

Espaces affines orthogonaux et perpendiculaires :

Les définitions vectorielle de l'orthogonalité et de la perpendicularité se transposent directement aux espaces affines associés. En géométrie plane les notions d'orthogonalité et de perpendicularité coïncident. En dimension trois on peut parler indifféremment d'un plan perpendiculaire ou orthogonal à une droite mais non de plans orthogonaux ni de droites perpendiculaires. Et pourtant, si deux droites orthogonales dans l'espace sont sécantes elles définissent un plan et dans ce plan elles sont perpendiculaires !

F

Face (d'un polyèdre) :

Portion plane de la surface du polyèdre, délimitée par des arêtes du polyèdre. Deux faces qui se rencontrent se coupent suivant une *arête* ou un *sommet*.

Figure géométrique :

Une *figure géométrique* est composée de plusieurs objets géométriques satisfaisant à certaines règles qui énoncent des relations entre ces objets.

Les objets géométriques (points, droites ou portions de droites, courbes ou portions de courbe, plans, portions de plan ou d'espace etc.) qui composent une figure sont appelés les *éléments constitutifs de la figure*. Toute figure géométrique est le résultat d'une *construction* : certains éléments de la figure sont *donnés* en début de la construction, les autres éléments sont *définis* pas à pas : à chaque étape de la construction, le nouvel élément introduit est déterminé sans ambiguïté par des relations qui mettent en jeu les éléments donnés ou construits précédemment.

Dans le langage courant, le mot "figure" désigne le *dessin* qui représente une figure géométrique. Ces dessins, qui aident à comprendre les propriétés des figures, peuvent être trompeurs, c'est pourquoi l'on dit souvent : « il ne faut pas raisonner sur la figure ».

H

Hyperbole équilatère :

Une hyperbole est dite équilatère si et seulement si ses asymptotes sont orthogonales.

Hyperplan :

Dans un espace vectoriel, ou affine, de dimension n , on appelle hyperplan un sous espace de dimension $n-1$. Cette définition simplifie l'expression de nombreux théorèmes de géométrie affine et, notamment, le théorème de Thalès.

I

Intersection :

Opération portant sur des ensembles qui à deux ensembles A et B associe l'ensemble $A \cap B$ (lire « A *inter* B »), formé des éléments *communs* à A et à B , c'est à dire qui appartiennent à A **et** à B . L'ensemble $A \cap B$ est appelé l'*intersection* des ensembles A et B .

Exemples : $\{1,2,3\} \cap \{2,3,4,5\} = \{2,3\}$.

Dans \mathbb{R} , on a $[-1 ; 2] \cap]-5 ; 1[= [-1 ; 1[$.
L'intersection de deux droites (D) et (D') du plan peut être

- vide (si (D) et (D') sont parallèles et différentes)
- une droite (si (D) et (D') sont confondues)
- ou un ensemble réduit à un unique point (dans les autres cas)

Intervalles :

Soit A et B deux points d'une droite Δ . Désignons pour simplifier par \leq la relation d'ordre sur Δ telle que $A \leq B$. On définit alors d'une façon naturelle les intervalles $[AB]$, $]AB]$, $[AB[$, $]AB[$ d'extrémités A et B . De même on définit les demi-droites $] \leftarrow A]$, $] \leftarrow A[$, $[A \rightarrow [$, $[A \rightarrow [$ comme dans \mathbb{R} .

Isométrie :

Soit $f : \xi_3 \longrightarrow \xi_3$, l'application f est une isométrie si et seulement si f conserve la distance. En d'autres termes, $\forall (A,B) \in \xi_3$, $A' = f(A)$ et $B' = f(B)$, on a $A'B' = AB$.

L

Lemme :

Résultat technique utilisé immédiatement dans la démonstration d'un théorème qui le suit immédiatement.

M

Médiane :

Médianes d'un triangle ABC : droite passant par un sommet S du triangle et par le milieu I du côté opposé à S. On donne aussi le nom de *médiane* au segment [SI] ou à sa longueur SI.

Dans le plan, les trois médianes d'un triangle sont concourantes. Le point de concours est le centre de gravité du triangle.

Médiane d'un quadrilatère ABCD : droites joignant les milieux, I et J, de deux côtés opposés. On donne aussi le nom de *médiane* au segment [IJ] ou à sa longueur IJ.

Mesure algébrique :

Soit A et B deux points distincts de ξ_3 . Fixons un point O sur la droite (AB) et orientons la droite (AB) de A vers B. On pose $\vec{OA} = a$, $\vec{OB} = b$. Le nombre réel est appelé la mesure algébrique du segment [AB].

Méthode axiomatique :

Initialement utilisée par Euclide en géométrie, la méthode axiomatique consiste à accepter sans démonstration un petit nombre de vérités (les axiomes) et à les utiliser pour en déduire d'autres choses vraies (théorèmes).

Milieu :

Soit A et B deux points distincts de x_3 , le milieu I du segment [AB] est le point défini par :

- si $A = B$; on pose : $I = A = B$
- si $A \neq B$, soit Δ la droite passant par A et B, et orientons Δ de A vers B ; le point I est défini par $\vec{AI} = \frac{1}{2} \vec{AB}$.

P

Parallélisme

1. Soit deux droites D et D' . Ces deux droites sont dites parallèles si et seulement si D et D' sont confondues ou si D et D' sont coplanaires avec $D \cap D' = \emptyset$. On écrira $D // D'$ pour indiquer que D et D' sont parallèles.
2. Soit P un plan et D une droite. On dira que D et P sont parallèles si, ou bien $D \cap P = \emptyset$, ou bien $D \subset P$; et on écrira $D // P$.
3. Soit P et Q deux plans de l'espace \mathbb{R}^3 ; trois cas et trois seulement sont possibles :

- $P \cap Q = \emptyset$ ou $P \subset Q$. Les deux plans sont dits **parallèles**.

$P \cap Q$ non vide. Les deux plans P et Q sont **sécants**.

Perpendiculaire commune de deux droites de l'espace :

Soit Δ_1 et Δ_2 deux droites non coplanaires. La droite unique perpendiculaire à la fois à Δ_1 et à Δ_2 est appelée la perpendiculaire commune à Δ_1 et à Δ_2 .

Plan médiateur :

Soit A et B deux points, I le milieu du segment $[AB]$ et P un plan de \mathbb{R}^3 . On dit que P est le plan médiateur du segment $[AB]$, si la droite AB est perpendiculaire au plan P en I .

Plan perpendiculaire à une droite :

Soit Δ une droite de \mathbb{R}^3 et O un point de Δ . Le plan P contenant toutes les droites perpendiculaires à Δ en O est appelé le plan perpendiculaire en O à la droite Δ .

Plans perpendiculaires :

Les deux plans P et Q sont dits perpendiculaires si et seulement si $\Delta_1 \perp \Delta_2$ c'est-à-dire si et seulement si l'angle des deux plans est droit. On écrira $P \perp Q$.

Pliage autour d'un axe :

Soit Δ une droite d'un plan P . On désigne par $\Sigma_1(\Delta)$ et $\Sigma_2(\Delta)$ les deux composantes convexes de $P - \Delta$. On appelle pliage autour de Δ dans P , toute isométrie f qui transforme $\Delta \cup \Sigma_1(\Delta)$ en $\Delta \cup \Sigma_2(\Delta)$ et qui vérifie en plus : $\forall A \in \Delta, f(A) = A$.

polyèdre :

[D'origine grecque : "poly"- "èdre" = "plusieurs"- "faces".]

Découpons des polygones plans et assemblons les dans l'espace de manière à ce que chacun des cotés des polygones se retrouve comme coté commun à exactement deux polygones. L'assemblage final forme une surface (sans bord) appelée *surface polyédrique* ou *polyèdre*.

Les surfaces des polygones utilisés sont les *faces* du polyèdre. Leurs cotés constituent les *arêtes* du polyèdre et leurs sommets sont les *sommets* du polyèdre.

On donne aussi le nom de *polyèdre* à la portion d'espace délimitée par une *surface polyédrique*.

On classe souvent les polyèdres suivant leur nombre de faces : un *tétraèdre* a 4 faces, un *hexaèdre* (par exemple un cube) en a 6, un *octaèdre*, 8, un *dodécaèdre*, 12, un *icosaèdre*, 20.

- Un polyèdre est *régulier* quand tous ses sommets, toutes ses arêtes, toutes ses faces jouent le même rôle . Plus précisément, si on se donne deux triplets (s,a,f) et (s',a',f') tels que :
 - f est une face, a est une arête de f, s un sommet de a.
 - f' est une face, a' est une arête de f', s' un sommet de a'.alors, il existe toujours un déplacement de l'espace tout entier qui amène s en s', a en a', f en f'

Polygone :

Ligne brisée fermée, composée de plusieurs segments mis bout à bout. Le nom vient du grec "poly" (plusieurs) et "gonos" (coté).

Un *polygone* est une figure géométrique formée par n points A_1, A_2, \dots, A_n (les *sommets* du polygone), et les n segments $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ (les *cotés* du polygone). Les angles formés par deux cotés consécutifs, c'est à dire les angles

$\angle A_1A_2A_3, \angle A_2A_3A_4, \dots, \angle A_{n-2}A_{n-1}A_n, \angle A_{n-1}A_nA_1, \angle A_nA_1A_2$ sont appelés les *angles* du polygone. Un polygone à n cotés ($n \geq 3$) est aussi appelé un *n-gone*. Sauf précision contraire, un polygone est plan : tous ses sommets sont dans un même plan.

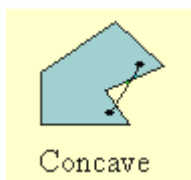
Deux cotés consécutifs d'un polygone sont dit *adjacents*. Si deux cotés non adjacents se rencontrent ailleurs qu'en leur extrémités, le polygone est dit *croisé*. Dans l'usage le plus courant, un polygone est *simple* : il est non croisé et ses sommets sont différents. Le *bord d'un polygone simple* est l'ensemble des points qui forment ses cotés.

Voici les noms des polygones selon le nombre de côtés

| | | | | |
|----------|--------------|-----------|----------|-----------|
| 3 côtés | 4 côtés | 5 côtés | 6 côtés | 7 côtés |
| Triangle | Quadrilatère | Pentagone | Hexagone | Heptagone |

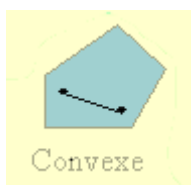
| | | | | |
|----------|-----------|----------|-------------|------------|
| 8 côtés | 9 côtés | 10 côtés | 11 côtés | 12 côtés |
| Octogone | Ennéagone | Décagone | Hendécagone | Dodécagone |

Polygone concave



Un polygone est concave quand il y a au moins un angle rentrant ou une partie rentrante. Quand on relie deux points quelconques situés à l'intérieur du polygone, certains points de la droite peuvent être à l'intérieur du polygone. La mesure de l'angle intérieur est alors supérieure à 180 degrés.

Polygone convexe :



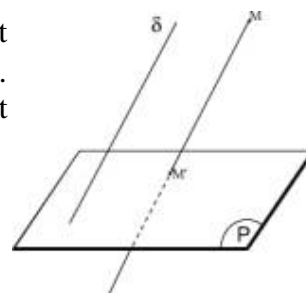
Un polygone est convexe lorsqu'il n'y a pas d'angle rentrant ou de partie rentrante. Quand on relie deux points quelconques situés à l'intérieur du polygone, tous les points de la droite sont à l'intérieur du polygone. Tous les angles intérieurs mesurent moins de 180 degrés.

Preuve, démonstration :

C'est la liste des étapes, non ambiguës (en utilisant les règles d'inférences si on travaille dans un système formel), qui permettent de passer d'une formule supposée vraie à une autre. On obtient alors la preuve que la formule obtenue est vraie.

Projection de base le plan P :

Soit P un plan et δ une droite non parallèle à P. Soit M un point de ξ_3 ; la parallèle à δ passant par M coupe P en M'. L'application f, qui au point M associe le point M', est appelée la projection de base P et de direction δ .



Q

Quadrilatère :

Polygone à 4 cotés.

Quadrilatère complet :

Figure géométrique formé de 4 points différents (appelés les *points de base* ou les *sommets* du quadrilatère) et des 6 droites qui joignent ces points deux à deux. Pour qu'une telle figure ne soit pas "*dégénérée*", il faut supposer que les 6 droites sont toutes différentes.

- A la différence d'un quadrilatère usuel, les 6 droites d'un quadrilatère complet jouent le même rôle : il n'y en a pas de "*diagonales*".

Dans le plan, les 6 droites d'un quadrilatère complet déterminent 7 points d'intersection, pourvu qu'aucune relation de parallélisme n'apparaissent entre les droites.

R

Relation de Chasles :

Etant donnés trois points alignés A, B et C. Alors, pour toute orientation de la droite (AB). On pose $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$.

Rotation :

Soit Δ une droite. On suppose que tous les plans perpendiculaires à Δ ont la même orientation. Soit α un réel, l'application de ξ_3 qui transforme un point M de ξ_3 en un point M' de ξ_3 vérifiant :

- M et M' ont même projection orthogonale I sur la droite D.
- $MI = M'I$
- L'angle = α (modulo 2π)

est appelée la rotation de l'espace d'axe Δ et d'angle α .. Notation : $r(\Delta, \alpha)$

S

Sommet :

Extrémité d'une arête dans un graphe ou dans un polyèdre.

Point de rencontre de deux segments dans un polygone. Deux sommets qui se suivent sont dits consécutifs

Sphère et boule :

Soit O un point de ξ_3 et r un réel strictement positif donné. L'ensemble $\{M \in \xi_3 \mid OM = r\}$ est appelé la **sphère** de centre O et de rayon r .

Symétrie orthogonale de base un plan P :

Soit P un plan. L'application S_P de ξ_3 dans ξ_3 qui à tout point M de ξ_3 associe le point M' tel que P est la plan médiateur de $[MM']$ est appelée la symétrie orthogonale de base P . Il est clair que S_P est une isométrie de ξ_3 .

Symétrie orthogonale par rapport à une axe :

Soit Δ une droite d'un plan P . On appelle **symétrie orthogonale d'axe** Δ toute rotation d'axe Δ et d'angle π . Notation : s_Δ

Symétrie par rapport à un point :

Soit O un point. L'application de ξ_3 qui transforme un point M de ξ_3 en un point M' de ξ_3 vérifiant $\vec{OM} = -\vec{OM'}$ est appelée la symétrie de l'espace de centre O . (ou une symétrie centrale) . Notation : sO

T

Tétraèdre :

Soit A, B, C, D quatre points non coplanaires. Les points A, B, C et D sont les sommets d'une pyramide triangulaire (ou d'un tétraèdre).

Théorème :

Enoncé mathématique vrai, c'est-à-dire *prouvé*. (Le mot théorème vient du verbe grec « *théorein* », "montrer".)

Un théorème est une phrase qui a une signification mathématique précise et qui est la conclusion d'un raisonnement *logique* particulier, appelé *démonstration*. Il est la conséquence logique d'autres propriétés vraies soit parce qu'elles sont prises pour vraies (*axiomes* et *définitions*) soit parce qu'elles ont été démontrées auparavant.

Translation :

Soit \vec{v} un vecteur. L'application de ξ_3 qui transforme un point M de ξ_3 en un point M' de ξ_3 vérifiant $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$ est appelée la translation de l'espace de vecteur \vec{v} . Notation : $t_{\vec{v}}$

Triangle :

Polygone à 3 cotés, figure géométrique formée par trois points (les *sommets du triangle*) et les trois segments joignant ces points (*les cotés du triangle*). Dans la pratique, le mot triangle s'applique aussi à la surface délimitée par un triangle (formée des points intérieurs ou sur le bord) ainsi qu'à la figure formée par trois droites deux à deux concourantes (ces droites sont alors abusivement appelées *cotés* et leurs points de rencontre *sommets*)

- Trois points déterminent toujours un triangle. Si les points sont alignés, le triangle est dit *plat* ou *dégénéré*.