Contribution du Calcul Fractionnaire et des Méthodes de Réduction à l'Etude de Certains Problèmes en Mécanique des Fluides

présenté par

Ali ABDENNADHER

UNIVERSITE DE TUNIS EL MANAR

Faculté des Sciences de Tunis

Département de

Mathématiques

HABILITATION UNIVERSITAIRE

Spécialité: Mathématiques

Soutenue le 30 Mai 2009, devant le jury composé de:

M.	HEDI AMARA	Université 7 Novembre à Carthage	Président
M.	HOUCINE CHEBLI	Université de Tunis El Mariai	Rapporteur
M.	ABDELKADER MOJTABI	Université de Toulouse III	Rapporteur
Mme	LEILA LASSOUED	Université de Tunis El Manar	Examinateur
Mme	SALOUA AOUADI	Université de Tunis El Manar	Examinateur

Sommaire

Liste des travaux de recherche et des publications Rapport

de synthèse détaillé des travaux de recherche Articles

présentés:

[Al] On the semi group generated by Stokes operator in ***V*** spaces with periodic boundary conditions in a layer, Int. Jour. Appl. Sci. Comp. Vol 3, Number 2, page 154-162.(1996)

[A2] Structures convectives induites par un gradient de température dans un milieu fluide soumis à des vibrations, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, tome 323, Série 2b, page 315-320. (1996)

[A3] Estimâtes for the resolvant of the Stokes operator with periodic boundary conditions in a layer of M^3, Rostock. Math. Kolloq. 53, 61-74. (1999)

[A4] Fractionnai flux and non-normal diffusion, Electronic Journal of Différentiel Equations, Conférence 16, 2007, pp 1-13.

[A5] Fractional Fick's law: the direct way, Journal of Physics A : Math. Theor.40 (2007)8299-8314

[A6] A continous variant for Grunwald-Letnikov's fractional derivatives, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 387 (2008) 2750-2760

[A7] Lyapunov Schmidt réduction for non darcian effects in driven thermal convection in porous média. Communications in Mathematical Analysis. Conf 02 (2008)

[A8] Effet d'un champ magnétique transversal sur la stabilité de l'écoulement de Hartmann: les modes tridimensionnels. Comptes Rendus de Mécanique 333 (2005) 447-451

[A9] Stabilité de l'écoulement de Hartmann chauffé par le bas, Comptes Rendus de Mécanique 334 (2006) 332-339

Liste des travaux de recherche et des publications

[Al] A. Abdennadher, M-C. Néel. On the semi group generated by Stokes opera-tor in ***LP*** spaces with periodic boundary conditions in a layer, Int. Jour. Appl. Sci. Comp. Vol 3, Number 2, page 154-162**.(1996)**

[A2] A. Abdennadher, M-C. Néel. Structures convectives induites par un gradient de température dans un milieu fluide soumis à des vibrations, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, tome 323, Série 2b, page 315-320. **(1996)**

[A3] A. Abdennadher, M-C. Néel. Estimâtes for the resolvant of the Stokes ope-rator with periodic boundary conditions in a layer of M^3, Rostock. Math. Kolloq. 53, 61-74. **(1999)**

[A4] A. Abdennadher, M-C. Néel. Fractionnai flux and non-normal diffusion, Electronic Journal of Différentiel Equations, Conférence 16, **(2007),** pp 1-13.

[A5] M-C. Néel, A. Abdennadher and M. Joelson. Fractional Fick's law: the di-rect way, Journal of Physics A : Math. Theor.40 **(2007)** 8299-8314

[A6] M-C. Néel, A. Abdennadher and S. Joelson. A continous variant for Grunwald-Letnikov's fractional derivatives, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 387 **(2008)** 2750-2760

[A7] A. Abdennadher. Lyapunov Schmidt réduction for non darcian effects in driven thermal convection in porous média. Communications in Mathematical Ana-lysis. Conf. 02, **(2008)** 1-20

[A8] Jédidi M., Kaddeche S., Abdennadher A., Gharbi A., Henry D., Ben Ha-did H. Effet d'un champ magnétique transversal sur la stabilité de l'écoulement de Hartmann: les modes tridimensionnels. Comptes Rendus de Mécanique 333 **(2005)** 447-451

[A9] Fakhfakh W., Kaddeche S., Abdennadher A., Henry D., Ben Hadid H., Stabilité de l'écoulement de Hartmann chauffé par le bas, Comptes Rendus de Mécanique 334 **(2006)** 332-339

[A10] A. Abdennadher, F.Ben Belgacem. Mathematical study of the eigenvalues of the Poisson Problem computed by spectral method with numerical intégration. Publications MIP. 96.06 **(1996),** pp 1-27.

[Ail] A. Abdennadher: Thèse de Doctorat de l'Université Paul Sabatier de Toulouse III: "Solutions stationnaires d'un problème de convection possédant des symétries : Analyse Mathématique et Calcul Symbolique" (Janvier 1997)

[A12] A. Abdennadher: Mémoire de D.E.A de l'Université Paul Sabatier de Toulouse III intitulé "Trajectoires homoclines dans l'espace de phase d'un système différentiel d'ordre trois autonome, continu par morceaux" (Juin 1992)

— Rapport de Synthèse Détaillé des Travaux de Recherche

Table des matières

Chapitre 1

Introduction générale

Le point commun à l'ensemble des travaux présentés dans ce mémoire d'habilitation, et plus largement à tous les travaux énumérés dans la liste des publications qui suit ce texte, est l'étude et approximation de modèles issus de la mécanique des fluides.

Il en est ainsi tout d'abord des travaux effectués au cours de ma thèse, qui portent sur l'étude d'un système (S) d'équations aux dérivées partielles comportant un terme oscillatoire. De nombreux systèmes d'équations aux dérivées partielles paraboliques possédant cette propriété admettent des solutions qui peuvent être décrites à l'aide d'un système autonome (M), dit moyenne. On a démontré qu'il en est bien ainsi dans le cas étudié lorsque la fréquence des oscillations est élevée. Pour cela, on a dû utiliser des outils de la théorie des semi groupes.

On a ensuite déterminé les solutions stationnaires de (M). L'utilisation des résultats récents des théories de la variété centrale et des formes normales nous a permis de démontrer qu'elles sont associées à une équation différentielle ordinaire. Cependant compte tenu du caractère concret du problème à traiter, on a dû recourir au calcul symbolique afin, en particulier, de déterminer les coefficients de la forme normale capable de décrire correctement le phénomène étudié.

Tout en continuant à travailler sur cette thématique, on s'est intéressé à l'effet d'une correction non linéaire et visqueuse dans la loi de Darcy. Cette étude est basée sur un principe de réduction à une équation différentielle ordinaire, appelé méthode de Lyapunov-Schmidt.

Dans le cadre d'une coopération établie entre l'INSAT, L'IMFT de Toulouse et l'école centrale de Lyon, des travaux de recherche ont fait l'objet de l'étude de l'action d'un champ magnétique sur les écoulements de convection forcée et de convection mixte. L'essentiel de ces travaux est de contrôler les instabilités se développant lors d'écoulements de convection forcée du type Poiseuille et des instabilités susceptibles d'apparaître au sein d'écoulements mixtes du type Poiseuille-Rayleigh-Bénard. Ce contrôle est effectué par application d'un champ magnétique.

Plus récemment on s'est intéressé à une thématique portant sur l'application d'outils de calcul fractionnaire pour étudier la diffusion anormale en milieux poreux hétérogènes. L'approche fractionnaire apparaît aujourd'hui, comme une voie prometteuse pour mieux décrire le transport anormal en milieux complexes. Les travaux sur les approches fractionnaires sont très vastes et concernent des domaines très variés comme la finance, la physique du solide, le traitement du signal, la mécanique quantique, les milieux poreux, sans oublier le développement de l'analyse fractionnaire lui même qui représente une branche en plein essor des mathématiques.

La motivation de ce travail est le transport anormal (non-Fickien) dans des milieux naturels, plus précisément dans le sol. Ces dernières années, un certain nombre de modèles microscopiques décrivant des phénomènes de dispersion anormale ont été proposés. Ils mettent en jeu des marcheurs aléatoires de temps continu, avec des distributions de probabilité différentes de celles du mouvement brownien. Ces modèles conduisent à l'échelle macroscopique à une généralisation du modèle de l'équation de convection dispersion en terme de dérivées d'ordre non entier ou fractionnaire. Les dérivées fractionnaires sont des opérateurs non-locaux. Ces modèles semblent bien adaptés à la dispersion anormale telle qu'observée dans les sols et les aquifères hétérogènes.

L'objectif essentiel de ce travail est de trouver une généralisation de la loi de Fick. Pour ceci on montre que pour un nuage de particules effectuant des vols de Lévy, le flux est une dérivée fractionnaire de la concentration. Les vols de Lévy représentent à petite échelle la dispersion dans des milieux où la matière peut être emportée très loin, beaucoup plus vite que d'après les paramètres de transport moyens.

Le corps de ce mémoire est divisé en quatre parties indépendantes. Dans la première partie on étudie les structures convectives induites par un gradient de températures dans un milieu fluide soumis à des vibrations. Les résultats ont été obtenus à partir d'un modèle permettant d'associer un système d'équations aux dérivées partielles autonomes qualifié de moyenne, à l'étude des champs de vitesse et de température dans un fluide soumis à un gradient thermique et placé entre deux plans parallèles vibrant en phase parallèlement à l'une de leurs directions. Ce modèle est utilisée lorsque la fréquence des vibrations est élevée. La seconde partie est consacrée à l'étude de l'effet d'une correction non linéaire et visqueuse dans la loi de Darcy. On montre que cette correction élève la valeur critique du nombre de Rayleigh de filtration. Dans la troisième partie, notre objectif est de contrôler les instabilités se développant lors d'écoulements de convection forcée du type Poiseuille et des instabilités susceptibles d'apparaître au sein d'écoulements mixtes du type Poiseuille-Rayleigh-Bénard. Ce contrôle est effectué par application d'un champ magnétique. Le point commun à ces trois parties réside dans le fait qu'on s'intéresse à une étude de stabilité, par différentes méthodes, d'écoulements convectifs. La dernière partie de ce mémoire est consacrée à l'étude de la diffusion fractionnaire en milieux hétérogènes.

Avant de présenter une synthèse détaillée des travaux de recherche, nous allons commencer par donner un résumé de ces travaux et une description des résultats.

Chapitre 2

Description des résultats

2.1 Convection vibrâtionnelle: forme réduite

Cette thématique s'inscrit dans le cadre des travaux de recherche effectués au cours de ma thèse de doctorat. Elle a pour objet l'étude du champ des vitesses V et du champ des températures T" dans un fluide visqueux entre deux plans rigides parallèles à xOy, portés à des températures différentes, et qui oscillent en phase le long de Ox à la fréquence £t. Lorsque cette dernière est suffisamment élevée, V est la somme d'une réponse directe aux vibrations et d'un champ V qui évolue selon une échelle de temps plus lente, comme la température. La première approximation de (V,T) satisfait un système d'équations aux dérivées partielles autonomes (M), dont on étudie les solutions indépendantes du temps.

Le système (M) est constitué de l'équation de la chaleur, et des équations analogues à celle de Navier - Stokes à un terme non linéaire près. Si on néglige les effets de la pesanteur, (M) fait apparaître deux nombres sans dimension, le nombre de Prandtl Pr, et le nombre de Rayleigh vibrationnel R. Celui-ci dépend de Çl et de la différence de température imposée sur les plans parallèles rigides qui délimitent le miheu. Or il existe R_c tel que (M) possède des solutions indépendantes du temps autres que l'état de repos si et seulement si $R > R_c$. Ce phénomène résulte de l'interaction entre le gradient de température (imposé par l'intermédiaire des conditions aux limites et la force d'entraînement due aux vibrations. On l'appelle convection vibrationnelle.

Lorsque R est voisin de sa valeur critique R_c, les solutions stationnaires de (M) vérifient une équation différentielle ordinaire par rapport à la variable x. La détermination de ses premiers coefficients, à l'aide du logiciel du calcul symbolique MAPLE, a fourni une approximation des champs de vitesses et des températures des structures convectives, solutions stationnaires de (M) pour R légèrement supérieur à R_c. Nous avons concentré notre attention sur le cas de l'apesanteur.

Le problème physique (P) de départ est régi par les équations de la chaleur et de Navier-Stokes; dans celle-ci l'accélération d'entraînement est représentée par un terme oscillatoire. Un résultat ancien (Simonenko 1970) a établi une relation entre les solutions (V',T') de ce système et celles (V,T) de (M): pour un fluide contenu dans un réservoir borné, (P) admet des solutions avec un champ T" voisin de ***T*** lorsque la fréquence Q des oscillations dépasse un certain seuil **£V** La proximité entre ces solutions doit être entendue au sens de la norme ***V*.** Ce résultat est obtenu en écrivant les systèmes (P) et ***(M)*** sous la forme d'équations de point fixe. Les inégalités permettant de comparer leurs solutions reposent sur l'estimation de l'opérateur de Stokes et du Laplacien au sens de la norme ***If*.** Comme on a étudié un fluide contenu entre deux plans parallèles (donc dans un domaine non borné), Il a fallu vérifier que ce résultat s'applique encore. Ceci a été accompli pour les solutions périodiques en espace. On a en particulier dû prouver que l'opérateur de Stokes avec des conditions aux limites périodiques est analytique dans ***V*** avec ***p*** plus grand que deux.

A la suite de nombreux auteurs (en particulier IOOSS et son équipe), on a étudié les solutions stationnaires bidimensionnelles, périodiques en espace ou non, du système (M). Ces dernières correspondent aux solutions d'une équation aux dérivées partielles qui s'écrit:

$$— = C_R U + M(U, U) \qquad (EDP)$$

La variable x décrit R, cependant que U est un vecteur à huit composantes qui sont des fonctions de z qui lui décrit l'intervalle [0,1]. Il représente un écart à partir de l'état de conduction pure. Les opérateurs linéaires C_R et non linéaire N ne font intervenir que des dérivations par rapport à z. On a montré que lorsque R est voisin de sa valeur critique R_C, les solutions de (EDP) vérifient une équation différentielle ordinaire d'ordre quatre (par rapport à la variable x), dite forme normale (E). Celle-ci fait partie d'une catégorie pour laquelle les résultats généraux sont disponibles. On sait en particulier que prés de certaines solutions (périodiques en x, quasipériodiques, homoclines à des solutions périodiques) d'une troncature de (E), on trouve des solutions de (E) elle même avec les mêmes propriétés.

Afin de décrire quantitativement les configurations convectives qui leurs correspondent, on a calculé les premiers coefficients de la forme normale. Pour cela, il a fallu discuter et résoudre des problèmes de la forme

$$(X_A - \backslash I_d)X = Y$$

où A étant un scalaire.

Pour effectuer ce travail, on a pu réduire ce type de problème à une équation différentielle ordinaire d'ordre huit, à coefficients constants, sur l'intervalle [0,1], avec des conditions aux limites aux deux bornes de [0,1].

La détermination de cette équation différentielle (par son second membre essentiellement qui dépend de ***Y)*** a été automatisée. La conséquence de ceci a été un gain de temps, mais surtout de fiabilité. Ensuite, nous l'avons résolue en utilisant la forme de son second membre, à base d'exponentielles et de polynômes. Les difficultés rencontrées ont surtout été dues au grand nombre de termes à traiter.

borné, (P) admet des solutions avec un champ T" voisin de ***T*** lorsque la fréquence f2 des oscillations dépasse un certain seuil **£V** La proximité entre ces solutions doit être entendue au sens de la norme ***IP*.** Ce résultat est obtenu en écrivant les systèmes (P) et ***(M)*** sous la forme d'équations de point fixe. Les inégalités permettant de comparer leurs solutions reposent sur l'estimation de l'opérateur de Stokes et du Laplacien au sens de la norme ***V*.** Comme on a étudié un fluide contenu entre deux plans parallèles (donc dans un domaine non borné), Il a fallu vérifier que ce résultat s'applique encore. Ceci a été accompli pour les solutions périodiques en espace. On a en particulier dû prouver que l'opérateur de Stokes avec des conditions aux limites périodiques est analytique dans ***I?*** avec ***p*** plus grand que deux.

A la suite de nombreux auteurs (en particulier IOOSS et son équipe), on a étudié les solutions stationnaires bidimensionnelles, périodiques en espace ou non, du système (M). Ces dernières correspondent aux solutions d'une équation aux dérivées partielles qui s'écrit:

$$— = C_R U + M(U,U) \qquad (EDP)$$

La variable x décrit R, cependant que U est un vecteur à huit composantes qui sont des fonctions de z qui lui décrit l'intervalle [0,1]. Il représente un écart à partir de l'état de conduction pure. Les opérateurs linéaires C_R et non linéaire N ne font intervenir que des dérivations par rapport à z. On a montré que lorsque R est voisin de sa valeur critique R_c, les solutions de (EDP) vérifient une équation différentielle ordinaire d'ordre quatre (par rapport à la variable x), dite forme normale (E). Celle-ci fait partie d'une catégorie pour laquelle les résultats généraux sont disponibles. On sait en particulier que prés de certaines solutions (périodiques en x, quasipériodiques, homoclines à des solutions périodiques) d'une troncature de (E), on trouve des solutions de (E) elle même avec les mêmes propriétés.

Afin de décrire quantitativement les configurations convectives qui leurs correspondent, on a calculé les premiers coefficients de la forme normale. Pour cela, il a fallu discuter et résoudre des problèmes de la forme

$$(L_{RC} - XI_D)X = Y$$

où A étant un scalaire.

Pour effectuer ce travail, on a pu réduire ce type de problème à une équation différentielle ordinaire d'ordre huit, à coefficients constants, sur l'intervalle [0,1], avec des conditions aux limites aux deux bornes de [0,1].

La détermination de cette équation différentielle (par son second membre essentiellement qui dépend de Y) a été automatisée. La conséquence de ceci a été un gain de temps, mais surtout de fiabilité. Ensuite, nous l'avons résolue en utilisant la forme de son second membre, à base d'exponentielles et de polynômes. Les difficultés rencontrées ont surtout été dues au grand nombre de termes à traiter.

A partir des valeurs des coefficients de (E), on a ensuite obtenu une approximation des configurations convectives, solutions de (M) indépendantes du temps, au voisinage du seuil convectif (R est voisin de R_c). On a pu montrer comment s'exerce l'influence du nombre de Prandtl : contrairement à ce qui se produit en convection naturelle, l'amplitude des structures convectives n'en dépend pratiquement pas. Bien sûr, elle dépend de l'écart entre R et sa valeur critique. Nous avons aussi obtenu une approximation numérique du champ des températures correspondant aux solutions de (E) qui sont homoclines à l'infini à des configurations périodiques.

Les nouveautés contenues dans ce travail apparaissent sur deux plans:

Analyse mathématique

Tout d'abord, le lien entre le problème physique (P) de départ et sa version moyennée a été étendu au cas des conditions aux limites périodiques. Il a en particulier fallu vérifier que l'opérateur de Stokes est analytique. Deux articles [Al] et [A3] ont été publiés sur ce thème.

D'autre part, après avoir défini un cadre fonctionnel approprié aux opérateurs C_R et M, on a démontré que ces derniers vérifient certaines propriétés assurant pour l'équation (E.D.P) l'existence d'une variété centrale V de dimension finie. Ce résultat joue un rôle fondamental, car il entraîne que les petites solutions de (E.D.P) vérifient une équation différentielle. On a utilisé des résultats récents pour démontrer que cette dernière peut être mise sous forme normale (E) (dite **1:1** résonnante).

Calcul scientifique

L'utilisation des outils d'algèbre linéaire et de résolution formelle d'équations fournis par le logiciel de calcul symbolique Maple nous a permis de:

—► Déterminer l'ordre de l'équation différentielle (E) qui n'est autre que la dimension du sous espace critique de l'opérateur C_R, somme des sous espaces propres généralisés associés aux valeurs propres imaginaires pures de C_R.

—► Calculer les premiers coefficients de l'équation différentielle ordinaire permettant de décrire les solutions stationnaires du problème (M).

Les principaux résultats de cette étape ont fait l'objet d'une note aux Comptes Rendus à l'Académie des Sciences de Paris [A2].

2.2 Convection forcée en milieu poreux: Ecarts à la loi de Darcy

La convection naissante, dans un milieu poreux isotrope saturé chauffé par le bas, est convenablement décrite à l'aide de champs de température et de vitesse de filtration dont l'évolution est régie par l'équation de Darcy et celle du transfert thermique. Le moteur de ce phénomène est la poussée d'Archimède, ou, ce qui revient au même la composante verticale, négative, ici à cause du chauffage par le bas, du gradient de température. Son effet est mesuré par le nombre de Rayleigh de filtration. Les propriétés mécaniques du milieu interviennent aussi dans la définition de ce dernier. La distribution de la température à travers toute la couche est de plus couplé au mouvement du fluide saturant par l'intermédiaire de termes convectifs d'une part, diffusifs de l'autre, apparents dans l'équation de la chaleur. Ces derniers propagent à travers tout le dispositif l'influence des conditions aux limites.

Pendant longtemps, les études de convection naturelle en milieux poreux saturés se sont appuyées sur ce type de modèles. La confrontation des résultats de calculs obtenus à partir de cette description et des mesures effectuées sur des milieux modèles montre des différences importantes. Ceci a conduit de nombreux auteurs à suggérer des modifications de la loi de Darcy et à prendre en compte des termes généralement négligés qui sont liés aux contraintes visqueuses et aux forces d'inertie. Dans ce cas la loi de Darcy est remplacée par une version étendue incluant des corrections de Forchheimer (terme d'inertie) et de Brinkman (terme visqueux) destinées à tenir compte de la présence de parois rigides. Notre contribution consiste à étudier l'influence de ces corrections sur le nombre de Rayleigh de filtration, au-delà duquel des écoulements convectifs s'installent. On montre dans [A7], moyennant une méthode de réduction de Lyaponuv-Schmidt, que ces corrections élèvent le nombre de Rayleigh de filtration.

2.3 Convection sous champ magnétique

L'objectif de ce travail est de contrôler les instabilités se développant lors d'écoulements de convection forcée du type Poiseuille et des instabilités susceptibles d'apparaître au sein d'écoulements mixtes du type Poiseuille-Rayleigh-Bénard. Ce contrôle est effectué par application d'un champ magnétique. Les résultats obtenus pour des situations de convection forcée se sont montrés en excellent accord avec ceux existants dans la littérature, notamment quand l'écoulement de Poiseuille est soumis à un champ magnétique transversal. Il a été prouvé que l'application d'un champ magnétique retardait l'apparition des instabilités et que les valeurs trouvées sont en parfaite concordance avec ceux déterminés lors d'études antérieures malgré l'approche basée sur un formalisme foncièrement différent. Ces résultats relatifs aux ondes de Tollmien-Schlichting bidimensionnelles attestent de la validité du code de calcul. On s'est ensuite intéressé par la suite aux instabilités tridimensionnelles avec ou sans application d'un champ magnétique pour prouver que de tels modes habituellement traités par une approche basée sur la transformation de Squire nécessitaient une formulation tridimensionnelle globale pour obtenir des résultats satisfaisants en terme de précision, notamment quand l'intensité du champ magnétique devenait assez significative et aussi quand le front de l'onde s'écartait d'une façon importante du plan de l'écoulement de base. Ces résultats ont donné lieu à une publication [A8].

Concernant la situation de convection mixte du type Poiseuille-Rayleigh-Bénard, on a élaboré un nouveau code de stabilité linéaire dédié au calcul des seuils critiques des écoulements stratifiés de Poiseuille (Situation de Poiseuille-Rayleigh-Benard : PRB). On s'est d'abord intéressé à la situation déstabilisante pour laquelle le plan inférieur est porté à une température supérieure à celle du plan supérieur. Ces deux plans délimitent le domaine dans lequel se situe le fluide en mouvement. Les premiers résultats obtenus montrent que l'écoulement de Poiseuille retarde l'apparition de l'instabilité de Rayleigh-Bénard. Les valeurs numériques des valeurs critiques aux seuils se sont ici aussi montrés en excellent accord avec ceux de la littérature, attestant par conséquent la validité du code de calcul développé. Les résultats obtenus nous ont permis de publier un article [A9].

2.4 Calcul fractionnaire et diffusion anormale

Le modèle de convection-dispersion, fondé sur la loi de Fick et sur des statistiques gaussiennes, est couramment utilisé pour décrire le transport de soluté en milieux poreux. De nombreux résultats expérimentaux sur le terrain et en laboratoire montrent que celui-ci ne reproduit pas toujours les observations expérimentales. C'est notamment le cas en milieux hétérogènes où les écarts sont les plus significatifs. Des équations aux dérivées partielles incluant des dérivées fractionnaires et liées aux statistiques non gaussiennes (vols de Lévy), ont été proposées pour modéliser le transport de matière dans ces milieux.

Les vols de Lévy représentent à petite échelle la dispersion dans des milieux où la matière peut être emportée très loin, beaucoup plus vite que d'après les paramètres de transport moyens. Or c'est le cas dans de nombreux milieux poreux naturels. Dans ces conditions, le flux de matière est une combinaison linéaire de dérivées fractionnaires locales et non locales, qui donne la loi de Fick dans le cas particulier du mouvement brownien.

Des particules effectuant des vols de Lévy suivent des trajectoires faites d'accumulations de sauts indépendants, de longueur aléatoire distribuée selon la densité *<pt(x)* =

$jL_{a},e(j)$, où L_{ATQ} représente une loi de Lévy normalisée d'exposant de stabilité a (entre 0 et 2) et de paramètre de dissymétrie 9 (Feller, 1970). La densité $ij>_{T}(t) = -e^{-}{}_{r}$ distribue les temps d'attente entre sauts successifs : r est le temps d'attente moyen, l est une échelle de longueur. Pour $a = 2$, $L_{a,8}$ est la loi normale.

Dans une solution diluée, la concentration $P(x,t)$ représente la densité de probabilité de trouver un marcheur dans $[x,x + dx)$ à l'instant t. Le flux à travers x s'obtient en comptant positivemement (ou négativement) les particules traversant x vers la droite (ou vers la gauche), pendant $[t,t + dt[$. La probabilité de sauter pendant $[t,t + dt[$ est donc en milieu infini, le flux est

$$r"1! l^{\circ\circ} P(x - y,t)FZ_{i9}tf)dy - J^{\infty}P(x + y,t)F\wedge(\wedge-)dy), \qquad (2.1)$$

où $F+_{g}(y/l)$ représente la probabilité $L_{a}fi\{z)dz$ pour un saut d'être dirigé vers la droite avec une amplitude supérieure à y. De même, $F\sim_{g}(y/l)$ est la probabilité $jL_{at}e_{(zj}$ pour un saut d'avoir un module supérieur à y, mais vers la gauche. L'expression (2.1) du flux à petite échelle est plus ou moins modifiée par des conditions aux limites, par exemple en x — 0. Avec un mur absorbant, les particules atteignant le mur sont exclues de la marche au hasard : il suffit de mettre HP à la place de P dans l'expression du flux, H représentant la fonction d'Heaviside. Avec un mur élastique, au contraire, chaque particule atteignant le bord rebondit et parcourt la distance prévue par le tirage au sort, en restant simplement du même coté $(x > 0)$. Ainsi, les particules effectuant un saut vers la gauche à partir de $x + y$ $(y > 0)$ arrivent à droite de x si l'amplitude est supérieure à $2x + y$: elles ne comptent pas dans le bilan. Les sauts dirigés vers la gauche, partant de x — y $(0 < y < x)$, traversent x si leur amplitude est supérieure à $2x — y$. Donc le flux est

$$- J \sim P_{\{x\ +}\ yj)[F+_{e}(=f) - F\wedge(=*LUL)]dy]_{t} \qquad (2.2)$$

Les équations, fractionnaires ou non, de la dispersion, ont été établies dans la limite diffusive où 1 tend vers zéro, en vérifiant **Ç = *K*** par Scalas et al. (2004). Dans les deux expressions (2.1) et (2.2) donnant le flux, on étudie la limite, quand / tend vers zéro de termes de la forme

$$r^{a} \quad f(xTy,t)F(\wedge-)d_{y}$$

où la fonction / est fixée.

Pour des valeurs de a comprises entre 1 et 2, on montre que cette limite combine des dérivées d'ordre a — 1, qui coïncident, pour une vaste classe de fonctions avec des inverses à gauche d'intégrales fractionnaires d'ordre a — 1. Ce travail a fait l'objet des deux articles [A4] et [A5]. Pour se faire des outils de calcul fractionnaire ont été adapté combinant plusieurs dérivées fractionnaires tels que la dérivée de Riemann-Liouville, de Marchaud et des dérivées locales de Klowankar et al (1996). Nous avons étendu ce résultat dans [A6] à toutes les valeurs positives de a.

Compte tenue du caractère récent de cette thématique, et indépendant des autres qui sont liées à l'étude de stabilité de certains écoulements, nous avons préféré par la détailler en premier.

Chapitre 3

Calcul fractionnaire et diffusion anormale

L'objet de cette partie est de présenter les principaux résultats des articles [A4], [A5] et [A6].

3.1 Introduction

La motivation de ce travail est de contribuer à quelques questions fondamentales en relation avec la modélisation du transport anormal dans les milieux naturels.

Aujourd'hui, la quantification du transport des espèces chimiques dans des milieux géologiques hétérogènes est d'une importance primordiale pour la prévision de la pollution de l'environnement. Qu'il s'agisse de la contamination des eaux souterraines par des polluants transitant de la surface du sol jusqu'aux aquifères, de leurs dispersions dans les eaux souterraines ou de la filtration des substances dangereuses confinées dans les sites de stockage, une estimation correcte du devenir des espèces dissoutes est essentiel pour la préservation des écosystèmes et de la ressource en eau.

Les sols et les aquifères sont, le plus souvent, des milieux poreux hétérogènes. Ces hétérogénéités sont manifestes à plusieurs échelles d'observations, et notamment à l'échelle macroscopique. Ainsi, les modèles de transport de solutés développés pour les milieux strictement homogènes, en particulier l'équation de convection-dispersion, ne peuvent pas être utilisés dans ce type de milieux.

En effet de nombreuses données montrent que la loi de Fick ne décrit pas toujours bien la dispersion de matière dissoute en milieux poreux hétérogènes. La loi de Fick prévoit qu'à partir d'une injection localisée, la concentration est une gaussienne dont l'écart type est proportionnel à la racine carrée du temps. Des données expérimentales ont mis en évidence des comportements qualitativement différents, remplaçant les gaussiennes par des lois stables de Lévy Un champ des vitesses désordonné, à petite échelle, semble à l'origine de ceci.

Laissant de côté les effets de mémoire, nous concentrons l'attention sur des milieux dans lesquels on observe des profils de concentration incompatibles avec la notion de second moment (Benson, Wheatcraft et Meerschaert. [6], Deng, de Lima JLMP, de Lima MIP et Singh. [13]) , ainsi qu'avec des modèles à petite échelle fondés sur le mouvement brownien. Des marches au hasard plus générales, les vols de Lévy, tiennent mieux compte de la possibilité pour la matière dissoute, d'être emportée très vite très loin. L'équivalent macroscopique est une généralisation fractionnaire de la loi de Fourier pour l'évolution de la concentration. Ceci a été prouvé par Scalas, Gorenflo, Mainardi et Raberto [59]. Cette équivalence est bien établie en milieu infini, mais des conditions aux limites peuvent obliger à modifier ces équations. Pour des vols de Lévy symétriques, ce point a été déduit par Krepysheva, Di Pietro et Néel [39], de ce qui se passe en milieu infini. Y compris dans le cas non symétrique, on montre dans [A5] que pour un nuage de particules effectuant des vols de Lévy, le flux est une dérivée fractionnaire de la concentration.

Des opérateurs appartenant à des classes très différentes prolongent les dérivées usuelles d'ordre entier pour donner ce qu'on peut appeler les dérivées d'ordre fractionnaire. Ces différentes classes servent des objectifs très différents et s'appliquent à tel ou tel domaine de la physique. Parmi elles on trouve des dérivées fractionnaires combinant convolution par des noyaux de puissances et dérivations usuelles, avec en plus le choix de l'intervalle d'intégration de Riemann-Liouville, Marchaud et apparentés. Quand on prend des intervalles semi infinis et qu'on les applique à des fonctions assez régulières, on obtient aussi des objets qu'on sait approcher par des différences finies de Grünwald-Letnikov qui sont, en certains sens, des convolutions discrètes divisées par une puissance du pas. Nous montrons que les dérivées de Riemann-Liouville et Marchaud associées à des intervalles semi infinis sont aussi des limites d'une vaste classe de convolutions "continues".

3.2 Dérivées et intégrales fractionnaires

Le calcul fractionnaire est une généralisation du calcul différentiel. Son histoire remonte à L'Hôpital (1693) qui se pose la question d'interpréter la dérivée d'ordre 1/2. C'est Lacroix (1879) qui montre que pour $f(x) = x^a$ et $a > 0$,

$$\frac{d^{1/2}f(x)}{dx^{1/2}} = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+1/2)} \, x^{a-1/2}$$

Ensuite, Fourier, Abel, Liouville, Riemann, Weyl, Riez, Marchaud et Caputo, entre autres, ont contribué au développement du calcul fractionnaire dans lequel on définit les dérivées et intégrales non entières.

Dans ce cadre et pour notre support bibliographique nous nous sommes appuyés principalement sur les ouvrages de Samko, Kilbas et Marichev ([57], 1993), celui de Rubin ([55], 1996) ainsi que Kilbas, Srivastava et Trujillo ([36], 2006).

Les dérivées de Riemann-Liouville et Marchaud sont intimement liées aux intégrales fractionnaires, pour lesquelles elles jouent le rôle d'inverse. Cependant, comme lorsque

Bibliographie

[1] A. ABDENNADHER- ***Solutions stationnaires d'un problème de convection possédant des symétries: Analyse Mathématique et Calcul Symbolique,*** Thèse de Doctorat de l'Université Paul Sabatier Toulouse III, 1997.

[2] M. Abramowitz and I. Stegun, ***Handbook of mathematical junctions,*** Dover, New York (1965)

[3] A. Babakhani and Varsha Daftardar-Gejji, On calculus of local fractional derivatives, J. Math. Anal. Appl. 270, 66-79 (2002)

[4] G. Bardan, E. Knobloch, A. Mojtabi, H. Khallouf, Natural doubly diffusive convection with vibration, Fluid Dynam. Res. 28 (2001) 159-187.

[5] L.M. Braverman, A. Oron, On the oscillatory instability of a fluid layer in a high-frequency vibrational field in weightlessness, Eur. J. Mech. 13 (1) (1994) 115-128.

[6] D.A. Benson, R. Schumer, M.M. Meerschaert and S.W. Wheatcraft, Fractional dis-persion, Lévy motion, and the MADE tracer tests , Transp. Por. Med. 42, 211-240 (2001)

[7] D.A. Benson, S.W. Wheatcraft and M.M. Meerschaert, The fractional-order équation of Lévy motion, Water Resour. Res. 36, 1413-1424 (2000)

[8] H. C. Brinkman, "A calculation of the viscous force extended by a fiowing fluid on a dense swarm of particles", Appl. Sci. Res. A1, pp 27-34, 1947.

[9] L.M. Braverman, A. Oron, On the oscillatory instability of a fluid layer in a high-frequency vibrational field in weightlessness, Eur. J. Mech. 13 (1) (1994) 115-128.

[10] P. Brockman and I.M. Sokolov, Lévy fl.igh.ts in external force fields, from models to équations Chemical Physics, 284, 409-421 (2002)

[11] I.CISSE, G.BARDAN, A.MOJTABI (2004)-Rayleigh Bénard convective instability of a fluid under high-frequency vibration, /. ***Cisse et al. International journal of heat and mass transfer*** *47, **p.**1401-1412*-

[12] J.H. Cushman and T.R. Ginn, Fractional advection-dispersion équation: a classical mass balance with convolution-Fickian, Water Resour. Res. 36, 3763-3766 (2000)

[13] Deng ZQ, de Lima JLMP, de Lima MIP and Singh VP 2006 ***Water Resour. Res.*** 42, W03416

[14] C. Elphick, E, Tirapeghi, M.E Brachet, P. Coullet, G. Iooss A simple global carac-terization for normal forms of singular vector fields, Physica D, 29, p. 95-127

[15] J.Ettefagh, K.Vafai and S.Kim, "Non Darcian effects in open ended cavities filled with a porous médium", Journal of heat Transfer, vol. 113, pp 747-756, 1991.

P.A. Elofsson, P.H. Alfredsson, An expérimental study of oblique transition in plane Poiseuille flow, J. Fluid Mech. 358 (1998) 177-202.

W. Feller, An Introduction to Probability Theory and its Applications, vol. II, Page 581, Wiley séries in probability and mathematical statistics, J. Wiley and sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto (1970)

P.H.Forchheimer, Z. Ver. Deutsch. Ing.vol.45, pp 1782-1788, 1901. M.Firdaouss , J.L.Guermond, P. Le Quéré "Nonlinear corrections to Darcy's law at low Reynolds numbers", J.F.M, vol 343, pp 331-350, 1997 . G.Z. Gershuni, D.V. Lyubimov, Thermal Vibrational Convection, Wiley, 1998. G.Z. Gershuni, E.M. Zhukhovitskii, Free thermal convection in a vibrational field under conditions of weightlessness, Sov. Phys. Dokl. 24 (11) (1979) 894-896. G.Z. Gershuni, E.M. Zhukhovitskii, on convective instability of fluid vibrational field weightlessnes, Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Meh. Zhidk. Gaza 4 (1981) 12-19. G.Z. Gershuni, E.M. Zhukhovitskii, vibration-induced thermal convection in weightlessness, Fluid Mech. Sov. Res. 15 (1) (1986) 63-84.

Y. Giga, Analyticity of the semi-group genrated by the Stokes operator in i7-spaces, Math. Z, 178, p. 297-329, 1981.

B.V. Gnedenko and A.N. Kolmogorov, ***Limit distributions for sums of independent variables,*** Addison Wesley (1968)

M.Golubitski and D.Schaeffer, " Singularities and Groups in Bifurcation Theory, vol.l, New York, Springer Verlag, 1985.

R. Gorenflo, F. Mainardi, Non-Markovian random walk models, scaling and diffusion limit, 2nd MaPhysSto Lévy Conférence, 2002

R. Gorenflo and F.Mainardi, Random Walks models for space-fractional diffusion processes, Fractional Calculus and Applied Analysis, **1** (2), 167, (1999) R. Gorenflo, F. Mainardi, D. Moretti, G. Pagnini, P. Pardisi, Fractional diffusion: probability distributions and random walk models, Physica A, **305,** 106 (2002) R. Gorenflo, F. Mainardi, D. Moretti, G. Pagnini, P. Pardisi, Discrète random walks models for space-time fractional diffusion, Chemical Physics, **284,** 521 (2002) G.Iooss, M.Adelmayer, Topics in bifurcation theory and applications, Advanced séries in nonlinear dynamics, ***vol 3, world Scientific.*** 1992

G. Iooss and A. Mielke, "Bifurcating Time Periodic Solutions of Navier-Stokes Equations in Infinité Cylinders", Journal of Nonlinear Science, vol. 1, no. 1, p. 107-146, 1991.

G.Iooss, A.Mielke et Y.Demay, Theory of steady Ginzburg-Landau équation in hydrodynamic stability problems, Eur.J.Mec, B Fluids,8,3, p.623-727. 1989

G. Iooss, M-C. Péroueme, Perturbed homoclinic solution in réversible 1:1 résonance vector field, Journal of Differential Equation, 102, p. 62-68, 1993.

V.M. Kenkre, E.W. Montroll and M.F. Shlesinger, Generalized Master Equations for Continuous-Time Random Walks, J. Stat. Phys. **9** (1), 45 (1973)

[36] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo, ***Theory and Applications of Fractional Differential Equations*** (North-Holland Mathematical Studies **204,** Ed. Jan van Mill, Amsterdam (2006))

[37] K.M. Kolwankar and A.D. Gangal, Fractional differentiation of nowhere differentiable functions and dimension, CHAOS 6, 505-513 (1996) [38] N. Krepysheva, L. Di Pietro aad M..G. Néal, ¥x^ÀcrcM^USMSVOTI as\à. xe^ec!twe\>o\m.-daxy cotuittÀcm., Ybysica M^SS), 3^-361 (,"2006") \39\ 'H. YL^eç^^eM^Yi.TiW^tTo anàM.C. "Née\, ¥ïact\oïia\ aàvection-àiffusion and re-ftective boundary condition, Phys. Rev. E (73), 021104 (2006) [40] P. Lévy, ***Théorie de l'addition des variables aléatoires,*** Gauthier-Villars, Paris (1937)

[41] D.V. Lyubimov, Convective flows under the influence of high frequency vibrations, Eur.J.Mec.B/Fluids, 14, 4,P.439-458, 1995 [42] F. Mainardi, Y. Luchko, G. Pagnini, The fundamental solution of the space-time fractional diffusion équation, Fractional Calculus and Applied Analysis, vol. 4,(2) pp 153-192 (2001)

3] M. MC Cracken, The Resolvant problem for the Stokes équations, SIAM J. Math. Anal., 12.2, p. 201-228, (1981)

1] R.Metzler, E. Barkai and J.Klafter, Deriving fractional Fokker-Planck équations from

a generalized master équation, Europhysics Letters **46(4),** pp 431-436 (1999) 5] R. Metzler and J. Klafter, The restaurant at the end of the random walk: récent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics, J. Phys. A **37** R161-R208, (2004) 3] R.Metzler and J.Klafter, Boundary value problem for fractional diffusion équation

Physica A **278,** pp 107-125 (2000) *7]* R.Metzler and J.Klafter, The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach, Physics Reports **339,** pp 1-77 (2000) 3] A. Mielke, "Réduction of quasilinear elliptic équations in cylindric domains with applications", Journal of Diff. equation,vol 15, p. 68-88, 1988.

3] E.W. Montroll and G.H. Weiss, Random Walks on Lattices II, J. Math. Phys. 6(2), 167 (1964)

3] E.W. Montroll and H. Scher, J. Stat. Phys. **9,** 101 (1973) 1] R. Moreau,

Magnetohydrodynamics, Kluwer Académie, 1990. ***2}*** P. Paradisi, R. Cesari, F.

Mainardi, and F. Tampieri, The fractional Fick's law for

non-local transport processes, Physica A **293**(1-2), 130 (2001) 3] A.

Pazy, Semi groups of linear operators, Springer. 1981

1] M.C. Potter, J.A. Kutchey, Stability of plane Hartmann flow subject to a transverse magnetic field, Phys. Fluids 16 (1973) 1848-1851. 5] B. Rubin, Fractional intégrais and potentials, Harlow: Longman (1996) 3] S.G. Samko, Hypersingular intégrais and différences of fractional orders ***Proc. Steklov Inst. Math.*** 1992 2 pp 175-193 (1992)

[57] S.G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marichev, ***Fractional intégrais and derivatives: theory and applications*** (Gordon and Breach, New York (1993))

[58] W.R.Schneider, in Stochastic process in classical and quantum Systems , Ed. S. Al-beveiro, G. Casatti, D. Merlini, Springer, Berlin, (1986)

[59] Scalas E, Gorenflo R Mainardi F and Raberto M 2003 ***Fractals*** **11** 281-289.

[60] E. Scalas, R. Gorenflo, F. Mainardi, Uncoupled continuous-time random walks: so-lutions and limiting behaviour of the master équation, Phys. Rev E, 692, 011107 (2004)

[61] I.B. Simonenko, A justification of the averaging method for a problem of convection in a field rapidly oscillating forces and other parabolic équations, Mat. Sb. (129) 2 (1972) 245-263.

[62] I.B. Simonenko, S.M. Zenkovskaja, On the effect of highfrequency vibrations on the origin of convection, Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Meh. Zhidk. Gaza 5 pp. 51-55. 1966.

[63] M. Takashima, The stability of the modified plane Poiseuille flow in the présence of a transverse magnetic field, Fluid Dyn. Res. 14 (1996) 293-310.

[64] A. Tsinober, Variability of Anomalous Transport Exponents versus Différent Physical Situations in Geophysical and Laboratory Turbulence, in Lévy flights and related topics in physics, E d. M.F. Shlesinger, G.M. Zaslavsky and U. Frisch , Springer, (1995)

[65] K.Vafai and C.L.Tien, "Boundary and Inertia effects on Flow and Heat Transfer in Porous Media", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 24, pp 195-203, 1981.

[66] A.Vanderbauwhede, Center manifolds, normal forms, and elementary bifurcation, Dynamics reperted.2, 89-169. 1989.

[67] A.Vanderbauwhede et G.Iooss, Center manifold theory in infinité dimension, pre-print, ***Université de Nice.***

[68] E.R. Weeks, T.H. Salomon, J.S. Urbach and H.L. Swinney, Observations of anomalous diffusion and Lévy flights, in Lévy flights and related topics in physics, Ed. M.F. Shlesinger, G.M. Zaslavsky and U. Frisch , Springer, (1995)

[69] K. Yosida, Functional Analysis, die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaft in Einzeldarstellungen 123, 3d édition, 1971

[70] M.P. Zavarykin, S.V. Zorin, G.F. Putin, Convective instabilities in a vibrational field, Dokl. Akad. Nauk SSR 299 (1998) 174-176.

[71] X. Zhang, J.W. Crawford, L.K. Deeks, M.I. Stutter, A.G. Bengough and I.M. Young, A mass balance based numerical method for the fractional advection-dispersion équation: Theory and application, Water Resour. Res. **41** W07029 (2005)

[72] G. Zumofen and J. Klafter, Absorbing boundaries in one-dimensional anomalous transport, Phys. Rev. E, **51** 4, 2805 (1995)