Institut Supérieur de l'Education
et de la Formation Continue.
Professeur: S. Snoussi.

Session: Mars 2007
U.V. MA 110
Durée: 3 heures

Nombre de pages: 2

Barème: 6 - 3.5 - 3.5 - 3 - 4

Exercice 1

Soit $P(X)$ le polynôme donné par

$$P(X) = 3X^5 - 2X^4 + 12X^3 - 8X^2 + 12X - 8.$$

1) Déterminer une racine rationnelle du polynôme $P(X)$.
2) Décomposer en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P(X)$.
3) Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{6X^6 - 4X^5 + 24X^4 - 16X^3 + 25X - 6}{P(X)}$$

Exercice 2

Soient a un réel, m et n deux entiers naturels non nuls. Déterminer, dans $\mathbb{R}[X]$, un pgcd des polynômes $X^m - a^m$ et $X^n - a^n$.

Exercice 3

Soit n un entier naturel non nul. Déterminer, en fonction de n, les réels a et b pour que le polynôme $P(X) = aX^{n+1} + bX^n + 1$ soit divisible par le polynôme $X^2 + X + 1$.

Exercice 4

Soient p et q deux nombres complexes. On considère dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme

$$P(X) = X^3 + pX + q.$$

1) Quelle relation doit lier p et q pour que le polynôme $P(X)$ ait une racine de multiplicité deux?

2) Que vaut cette racine en fonction de p et q?

Exercice 5

1) Déterminer un pgcd des polynômes X^3+X^2+1 et X^2+1.

2) Trouver, dans $\mathbb{R}[X]$, un polynôme P tel que P soit divisible par X^2+1 et $P+1$ soit divisible par X^3+X^2+1.

Institut Supérieur de l'Education **Session: Mars 2007**
et de la Formation Continue. **U.V. MA 110**
Professeur: S. Snoussi.

Indications

Exercice 1

Soit $P(X)$ le polynôme donné par

$$P(X) = 3X^5 - 2X^4 + 12X^3 - 8X^2 + 12X - 8.$$

1) Soit $r = p/q$ une racine rationnelle du polynôme $P(X)$, où $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ et $p \wedge q = 1$. On aura $p \mid (-8)$, $q \mid 3$, $p - q \mid P(1) = 9$ et $p + q \mid P(-1) = -45$. Ces conditions impliquent que $p/q \in \{-2,\ 2/3,\ 4\}$, mais comme $P(-2) < 0$ et $P(4) > 0$, il nous reste uniquement la valeur $2/3$. En effet, la division euclidienne de $P(X)$ par $3X - 2$, nous donne:

$$P(X) = (3X-2)(X^4 + 4X^2 + 4) = (3X-2)(X^2+2)^2.$$

2) Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$:

$$P(X) = (3X-2)(X^2+2)^2,$$

car $3X - 2$ et $X^2 + 2$ sont irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$:

$$P(X) = (3X-2)(X+i\sqrt{2})^2(X-i\sqrt{2})^2.$$

3) Le degré de la fraction $F(X)$ est égal à 1. On effectue alors la division euclidienne du polynôme $6X^6 - 4X^5 + 24X^4 - 16X^3 + 25X - 6$ par $P(X)$ pour déterminer sa partie entière. On a:

$$6X^6 - 4X^5 + 24X^4 - 16X^3 + 25X - 6 = 2XP(X) - 24X^2 + 41X - 6.$$

Ainsi

$$F(X) = 2X - \frac{1}{3}\ \frac{24X^2 - 41X + 6}{(X - \frac{2}{3})(X^2+2)^2}.$$

Posons

$$G(X) = \frac{24X^2 - 41X + 6}{(X - \frac{2}{3})(X^2+2)^2}.$$

La décomposition en éléments simples de $G(X)$ est donnée par:

$$G(X) = \frac{a}{X - \frac{2}{3}} + \frac{bX + c}{(X^2+2)^2} + \frac{dX + e}{X^2 + 2}.$$

$$a = \Big[(X - \frac{2}{3})G(X)\Big]_{/X=\frac{2}{3}} = \Big[\frac{24X^2 - 41X + 6}{(X^2+2)^2}\Big]_{/X=\frac{2}{3}} = -\frac{216}{121},$$

$\underline{a = -\frac{216}{121}}$.

$$ib\sqrt{2} + c = \Big[(X^2+2)^2 G(X)\Big]_{/X=i\sqrt{2}} = \Big[\frac{24X^2 - 41X + 6}{X - \frac{2}{3}}\Big]_{/X=i\sqrt{2}} = \frac{312}{11}i\sqrt{2} - \frac{243}{11},$$

ce qui donne $\underline{c = -\frac{243}{11}}$ et $\underline{b = \frac{312}{11}}$.
La valeur de d est obtenue en multipliant $G(X)$ par X et en faisant tendre X vers $+\infty$, on obtient $d + a = 0$, ou encore $\underline{d = -a = \frac{216}{121}}$.
La valeur de e est obtenue en prenant une valeur arbitraire de X. Par exemple, $X = 0$,

$$G(0) = -\frac{9}{4} = -\frac{3a}{2} + \frac{c}{4} + \frac{e}{2},$$

et il s'ensuit que $\underline{e = 144/121}$.

Exercice 2
On utilise l'algorithme d'Euclide. On peut supposer que $m \geq n$. Déterminons la division euclidienne de $X^m - a^m$ par $X^n - a^n$. Soit $m = nq + r$, $0 \leq r < n$, la division euclidienne de m par n. On a :
$X^m - a^m = X^{nq+r} - a^{nq+r} = (X^n)^q X^r - a^{nq} a^r = (X^n - a^n + a^n)^q X^r - a^{nq} a^r$. En développant $(X^n - a^n + a^n)^q$, on obtient:
$(X^n - a^n + a^n)^q = (X^n - a^n)Q + a^{nq}$, où Q est un polynôme de degré $n(q-1)$. Il s'ensuit alors que $X^m - a^m = (X^n - a^n)QX^r + a^{nq}(X^r - a^r)$. Comme $r < n$, alors $a^{nq}(X^r - a^r)$ est le reste de la division euclidienne de $X^m - a^m$ par $X^n - a^n$. Ainsi,

$$pgcd(X^m - a^m,\ X^n - a^n) = pgcd(X^n - a^n,\ X^r - a^r).$$

On peut supposer que $r \neq 0$, sinon un pgcd est $X^n - a^n$. Soit r_1 le reste de la division euclidienne de n par r. On déduit de ce qui précède que

$$pgcd(X^n - a^n,\ X^r - a^r) = pgcd(X^r - a^r,\ X^{r_1} - a^{r_1}).$$

En effectuant les divisions euclidiennes successives de r par r_1, avec un reste r_2, puis de r_1 par r_2, avec un reste r_3, jusqu'à arriver à un reste r_{k+1} nul. Alors, un pgcd recherché est

$$X^{r_k} - a^{r_k},$$

mais $r_k = pgcd(m, n)$, donc

$$pgcd(X^m - a^m,\ X^n - a^n) = X^\delta - a^\delta,$$

où $\delta = pgcd(m, n)$.

Exercice 3
Les racines complexes du polynôme $X^2 + X + 1$, sont j et $\bar{j}$, où j est la racine cubique de l'unité, $j = \exp(2i\pi/3)$. Une condition nécessaire et suffisante pour que $P(X)$ soit divisible par $X^2 + X + 1$ est que $P(j) = P(\bar{j}) = 0$. On aura ainsi

$$a(j^{n+1} - \bar{j}^{n+1}) = b(\bar{j}^n - j^n).$$

Comme $j^3 = 1$, on effectue la division euclidienne de n par 3, $n = 3q + r$ et on discute suivant les valeurs de $0, 1$ ou 2 du reste r.
1er cas: $\underline{r = 0}$

On obtient $a(j-\bar{j})=0$, ce qui implique que $a=0$, et $P(X)$ devient $bX^{3q}+1$, sa valeur en j ou $\bar{j}$ est $b+1=0$, d'où $b=-1$, et $P(X)=-X^{3q}+1$, avec $a=0$ et $b=-1$.

2ème cas: $\underline{r=1}$

On trouve $a(j^2-\bar{j}^2)=b(\bar{j}-j)$, ce qui implique, en tenant compte de $j^2=-j-1$ et $\bar{j}^2=-\bar{j}-1$, que $a=b$. $P(X)$ devient $aX^{3q+2}+aX^{3q+1}+1$, sa valeur en j est $aj^2+aj+1=0$, d'où $a=b=1$, et $P(X)=X^{3q+2}+X^{3q+1}+1$, avec $a=1$ et $b=1$.

3ème cas: $\underline{r=2}$

$0=b((\bar{j}^2-j^2)$, ou encore $b=0$, et $P(X)$ devient $aX^{3q+3}+1$, sa valeur en j est $a+1=0$, d'où $a=-1$, et $P(X)=-X^{3q+3}+1$, avec $a=-1$ et $b=0$.

<u>Exercice 4</u>

1) Condition nécessaire: Désignons par α la racine double et β l'autre racine de $P(X)$. En écrivant $P(X)=(X-\alpha)^2(X-\beta)$, puis en développant, on déduit que $\beta+2\alpha=0$, $\alpha^2+2\alpha\beta=p$ et $-\beta\alpha^2=q$. Ces trois égalités impliquent que $(E_1):\beta=-2\alpha,\ (E_2):-3\alpha^2=p$ et $(E_3):2\alpha^3=q$. On obtient de (E_2) et (E_3), $p^3=-27\alpha^6$ et $q^2=4\alpha^6$, ou encore (la condition recherchée)

$$4p^3+27q^2=0.$$

Si p ou q est nul, alors les deux sont nuls et $P(X)=X^3$ possède une racine triple qui est 0. Si l'un des deux est non nul, alors les deux sont non nuls et la racine double α vérifie $2\alpha\alpha^2=2\alpha(-p/3)=q$, ou encore $\alpha=-\frac{3q}{2p}$ et la racine simple $\beta=-2\alpha=\frac{3q}{p}$.

Condition suffisante: Supposons que p et q vérifient la relation: $4p^3+27q^2=0$, avec $pq\neq 0$. Posons, $\alpha=-\frac{3q}{2p}$ et $\beta=\frac{3q}{p}$.

Montrons que le polynôme $Q(X)=(X-\alpha)^2(X-\beta)$ coïncide avec $P(X)$. On a

$$Q(X)=X^3-(\beta+2\alpha)X^2+(2\alpha\beta+\alpha^2)X-\beta\alpha^2,$$

avec $(\beta+2\alpha)=\frac{3q}{p}-\frac{3q}{p}=0$, $(2\alpha\beta+\alpha^2)=-\frac{27q^2}{4p^2}=p$ et $(-\beta\alpha^2)=-\frac{27q^3}{4p^3}=q$. D'où $Q(X)=X^3+pX+q=P(X)$, et le polynôme $P(X)$ possède une racine double α et une racine simple β.

Conclusion $P(X)$ possède une racine double si et seulement si $4p^3+27q^2=0$.

A titre d'exemple, considérons $q=2i$ et $p=3$, le polynôme $P(X)=X^3+3x+2i$ possède la racine $-i$ qui est double et la racine $2i$ qui est simple.

2) D'après la première question $\alpha=-\frac{3q}{2p}$.

<u>Exercice 5</u>

1) Les deux polynômes X^3+X^2+1 et X^2+1 sont premiers entre eux. En effet, grâce à l'algorithme d'Euclide on a :

$X^3+X^2+1=X^3+X+X^2+1-X=(X+1)(X^2+1)-X$ et $X^2+1=XX+1$, donc un pgcd est 1 et de plus en remontant dans ces calculs, on obtient, $1=(X^2+1)-X^2=(X^2+1)+X[(X^3+X^2+1)-(X+1)(X^2+1)]$, ce qui donne

$$1=X(X^3+X^2+1)+(X^2+1)(1-X(X+1)).$$

2) Par hypothèse, il existe Q et H deux polynômes dans $\mathbb{R}[X]$ tels que $P = Q(X^2+1)$ et $P+1 = H(X^3+X^2+1)$, ce qui implique que $Q(X^2+1) = H(X^3+X^2+1)-1$, ou encore $1 = H(X^3+X^2+1)-Q(X^2+1)$. Il suffit alors de prendre, d'après la première question $H = X$ et $Q = X^2+X-1$ et on obtient $P = (X^2+X-1)(X^2+1) = X(X^3+X^2+1)-1 = X^4+X^3+X-1$, qui répond à la question.