ISEFC **Juin 2007**
Département de Mathématiques
MA115

<u>Série d'exercices: Géométrie élémentaire du Plan</u>

<u>Exercice 1:</u>

Soient (ABC) et (ABD) deux triangles tels que C et D soient de part et d'autre de la droite (AB) et vérifient $\widehat{CAB} = \widehat{DAB}$ et $AC = AD$. Montrer que la droite (AB) est une bissectrice de l'angle $\widehat{CBD}$.

<u>Exercice 2:</u>

On considère un segment $[AB]$ et deux demi-droites $[Ax)$ et $[By)$ situées de part et d'autre de la droite (AB), vérifiant $\widehat{BAx} = \widehat{ABy}$. On note I le milieu de $[AB]$. Montrer que toute droite passant par I et coupant $[Ax)$ en M et $[By)$ en N est telle que $AM = BN$.

<u>Exercice 3:</u>

Montrer que dans un triangle une médiane est aussi une hauteur si et seulement si ce triangle est isocèle.

<u>Exercice 4:</u>

Montrer que dans un triangle une bissectrice est aussi une hauteur si et seulement si ce triangle est isocèle.

<u>Exercice 5:</u>

Dans un triangle (ABC), les hauteurs issues de B et de C coupent les côtés opposés respectivement en K et L. Montrer que le triangle (ABC) est isocèle de base $[BC]$ si $AK = AL$.

<u>Exercice 6:</u>

Montrer que pour tout triangle isocèle de base $[BC]$, les médianes issues de B et C sont isométriques et les bissectrices issues de B et C le sont aussi.

<u>Exercice 7:</u> Soit $\widehat{xOy}$ un angle donné. Construire en justifiant un angle $\widehat{x'O'y'}$ isométrique à l'angle $\widehat{xOy}$ en un point O' distinct de O.

Exercice 8: Soient (d) une droite et A, B deux points extérieurs à (d). Existe-t-il un point sur (d) équidistant des points A et B? Si oui le construire.

Exercice 9: On considère un triangle isocèle de base $[BC]$ et on choisit un point D vérifiant $\widehat{DBC} = \widehat{DCB}$. Montrer que (DA) est une droite contenant la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

Exercice 10: On considère deux triangles (ABC) et (EFG) tels que $AB = EF$ et $AC = EG$. On note I et J les milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[FG]$. Montrer que si $AI = EJ$, alors les deux triangles (ABC) et (EFG) sont isométriques.

Exercice 11: Montrer que si deux hauteurs d'un triangle sont isométriques alors ce triangle est isocèle.

Exercice 12: Soit (ABC) un triangle tel que $AB < AC$. montrer que l'angle que fait la médiane issue de A avec le côté $[AB]$ est plus grand que celui qu'elle fait avec le côté $[AC]$.

Exercice 13: Soient $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et $[AB]$, $[CD]$ deux cordes de ce cercle. Montrer que $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$ si et seulement si $AB = CD$.

Exercice 14: Trois demi-droites distinctes issues du centre O d'un cercle $\mathcal{C}$ coupent ce cercle en A, B et C. On suppose que $\widehat{AOB} = \widehat{COA} = \widehat{BOC}$. Montrer que $AB = BC = CA$ et que (OA), (OB) et (OC) sont les bissectrices des angles $\widehat{BAC}$, $\widehat{CBA}$ et $\widehat{ACB}$.

Exercice 15: On suppose que deux cercles de centres O et O' se coupent en A et B. Montrer que
(i) $\widehat{OAO'} = \widehat{OBO'}$,
(ii) la droite (OO') est une bissectrice des angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{AO'B}$,
(iii) La droite (OO') est la médiatrice du segment $[AB]$.

Exercice 16: On considère deux points M et N situés à l'intérieur d'un cercle de centre O. La perpendiculaire en M à (OM) coupe le cercle en I et I' et la perpendiculaire en N à (ON) coupe le cercle en J et J'. Montrer que $OM = ON$ si et seulement si $MJ = NJ$.

Exercice 17: Soient I,J et K trois points distincts appartenant à un cercle de centre O. On suppose que I est intérieur à l'angle $\widehat{JOK}$ et que la tangente au cercle en I coupe la tangente en J en un point A et la tangente en K en un point B.
Montrer que $AB = AJ + BK$.

Exercice 18: Soient A, B, C, D et E cinq points consécutifs appartenant à un cercle et vérifiant
$$AB = BC = CD = DE = EA.$$
On note I le milieu de la corde $[AE]$.
Montrer que la droite (IC) est perpendiculaire aux droites (AE) et (BD).

Exercice 19: Deux cercles sont dits concentriques s'ils ont un même centre. On considère deux cercles concentriques distincts. D'un point M du petit cercle on mène une tangente à ce cercle, elle coupe le grand cercle en A et B.
Montrer que M est le milieu de la corde $[AB]$.

Exercice 20: Montrer que si une droite passant par le centre O d'un parallélogramme coupe ses côtés parallèles $[AB]$ et $[CD]$ en E et F, alors O est le milieu du segment $[EF]$.

Exercice 21: Deux droites, passant par le centre O d'un cercle, coupent ce cercle respectivement en A, B et en A', B'.
1) Montrer que $(AB') \parallel (A'B)$ et $(AA') \parallel (BB')$.
2) On choisit les points M sur $[OA)$ et M' sur $[OA')$. Montrer que (MM') est parallèle à (AA') si et seulement si $OM = OM'$.

Exercice 22: Soit X un point quelconque du côté $[BC]$ d'un triangle (ABC). On note J, K et Y les milieux respectifs des segments $[AC]$, $[AB]$ et $[AX]$.
Montrer que les points J, K et Y sont alignés.

Exercice 23: On note J, K et I les milieux respectifs des côtés $[AC]$, $[AB]$ et $[BC]$ d'un triangle (ABC). Les parallèles à (BJ) menées de I et de K coupent (AC) en M et N.
Montrer que $AN = NJ = JM = MC$.

Exercice 24: On considère les milieux respectifs I, J, K et L des côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[CD]$ et $[DA]$ d'un quadrilatère convexe $(ABCD)$.
Montrer que $(IJKL)$ est un parallélogramme.

Exercice 25: Soit (ABC) un triangle isocèle de base $[BC]$. D'un point I de la base, on mène une perpendiculaire à (AB) en H et une perpendiculaire à (AC) en K.
Montrer que $IH + IK$ est constante lorsque I varie sur $[BC]$.

Exercice 26: On considère quatre points alignés A, B, C et D tels que $AB = CD$. On mène de A et de C deux droites parallèle (d) et (d') et de B et de D deux autres droites parallèles (δ) et $(\delta^{'})$ et on suppose que (δ) coupe (d) en M et que $(\delta^{'})$ coupe (d') en N.
Montrer que les triangles (MAB) et (NCD) sont isométriques.

Exercice 27: Un quadrilatère convexe $(ABCD)$ est inscrit dans un cercle. On suppose que l'une de ses diagonales est un diamètre du cercle. Montrer que les projections orthogonales de ses côtés opposés sur l'autre diagonale sont deux à deux isométriques.

Exercice 28: On considère le diamètre $[AB]$ d'un cercle de centre O, et deux points M et N de ce cercle. On suppose que (AM) coupe (BN) en P et que (AN) coupe (BM) en Q.
Montrer que les points M, N, P et Q sont cocycliques.

Exercice 29: Soient (ABC) un triangle et K un point de $[AB]$. Un cercle de centre O passant par A et K recoupe $[AC]$ en J et un deuxième cercle de centre O' passant par B et K recoupe

$[BC]$ en I. On suppose que les deux cercles se coupent en un deuxième point ω intérieur au triangle (IJK). Montrer que les points ω, I, C et J sont cocycliques.

Exercice 30: Soient un point M sur un cercle de diamètre $[AB]$ et $[CD]$ un diamètre perpendiculaire à $[AB]$. Les droites (MA), (MB) et la tangente $(x'x)$ en M au cercle coupent la droite (CD) aux points N, P et Q respectivement. Démontrer que les segments $[NQ]$ et $[PQ]$ sont isométriques.

Exercice 31: A l'extrémité A du diamètre $[AB]$ d'un cercle de centre O, on trace une corde $[AC]$, et à l'autre extrémité B, la tangente. La bissectrice de l'angle $\widehat{CAB}$ coupe la corde $[BC]$ en F, le cercle en H et la tangente en D. Montrer que $BD = BF$ et $FH = HD$.

Exercice 32: Deux cercles sont tangents intérieurement en un point A. Par un point D du petit cercle on mène une tangente qui coupe le grand cercle en B et C. Démontrer que la droite (AD) est bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

Exercice 33: Dans un triangle rectangle (ABC) on inscrit un carré $(QMNP)$ dont le côté (MN) est sur l'hypoténuse $[BC]$. Si on note O le point d'intersection des diagonales du carré, montrer que la droite (AO) est bissectrice de l'angle $\hat{A}$

Exercice 34: Un quadrilatère $(ABCD)$ dont les diagonales sont perpendiculaires et se coupent en G, est inscrit dans un cercle, montrer que, si M est le milieu de $[CD]$, les droites (MG) et (AB) sont perpendiculaires.

Exercice 35: Sur le côté $[Ox)$ d'un angle $\widehat{xOy}$, on prend un point A; on trace un cercle tangent à (Ox) en A, et l'on mène les tangentes parallèles à (Oy) à ce cercle. Soient M et N les points de contact de ces tangentes. Démontrer que les droites (AM) et (AN) sont parallèles aux bissectrices de l'angle $\widehat{xOy}$.

Exercice 36: Soit $(ABCD)$ un quadrilatère inscriptible. On suppose que les droites (AB) et (DC) se coupent en E et (AD) et (BC) en F. La bissectrice de l'angle $\widehat{AED}$ (resp. $\widehat{BFA}$) coupe les côtés du quadrilatère en G et H (resp. en I et J).
1) Faire une figure à la règle et au compas.
2) Montrer que les triangles (FGH) et (EIJ) sont isocèles.
3) Montrer que le quadrilatère $(IHJG)$ est un losange.

Exercice 37: Soient (ABC) et (EFG) deux triangles semblables. Montrer que le rapport des hauteurs (resp. bissectrices) (resp. médianes) homologues est égal au rapport de similitude des deux triangles.

Exercice 38: Une corde $[CD]$ est perpendiculaire en H au diamètre $[AB]$ d'un cercle de centre O. D'un point M quelconque de $[CD]$, on mène la droite (MA) qui coupe le cercle en N. Montrer que

$$AM.AN = AB.AH,$$

où $\{H\} = (AB) \cap (CD)$.

<u>**Exercice 39:**</u> Par un point O de la diagonale $[BD]$ d'un parallélogramme $(ABCD)$, on mène une sécante qui coupe les droites:
(AB) en F, (BC) en G, (CD) en H et (DA) en K. Montrer que

$$OK.OF = OG.OH.$$

<u>**Exercice 40:**</u>
Une parallèle aux bases $[AB]$ et $[CD]$ d'un trapèze passe par un point M de $[AD]$ et un point N de $[BC]$. On note I le point d'intersection des droites (MN) et (AC).

1) Montrer que

$$MI = \frac{AM.DC}{AD}, \qquad IN = \frac{AB.DM}{AD}.$$

Déduire que

$$MN = \frac{AB.DM + DC.AM}{AD}.$$

2) Montrer que si la droite (MN) passe par le point d'intersection des diagonales, alors

$$MN = 2\frac{AB.DC}{AB + DC}.$$

<u>**Exercice 41:**</u>
Soit $(ABCD)$ un quadrilatère. La parallèle menée de B à (CD) coupe (AC) en F, et celle menée de C à (AB) coupe (BD) en G. Démontrer que les droites (AD) et (FG) sont parallèles.

<u>**Exercice 42 (Théorème des bissectrices):**</u>

Soient (ABC) un triangle, I un point intérieur au segment $[BC]$ et J un point de (BC). Alors la droite (AI) (resp. (AJ)) est la bissectrice intérieure (resp. extérieure) de l'angle $\hat{A}$ si et seulement si

$$\frac{\overline{IB}}{\overline{IC}} = -\frac{\overline{JB}}{\overline{JC}} = -\frac{AB}{AC}.$$

<u>**Exercice 43 (Théorème de Desargues):**</u>

Soient (ABC) et (EFG) deux triangles dont les sommets sont distincts et les côtés deux à deux parallèles. Alors les droites qui relient les sommets homologues sont concourantes ou parallèles.

<u>**Exercice 44 (Théorème de Pappus):**</u>
Soient (d) et (d') deux droites concourantes en un point O. on considère les points A, B, C sur (d) et A', B', C' sur (d') tels que (AB') est parallèle à $(A'B)$ et (BC') est parallèle à $(B'C)$.

Alors (CA') est parallèle à $(C'A)$.

Exercice 45 (Théorème de Menelaüs):
Soient (ABC) un triangle, I un point de (BC), J un point de (CA) et K un point de (AB) distincts de A, B et C. Alors les points I, J et K sont alignés si et seulement si

$$\frac{\overline{IB}}{\overline{IC}} \cdot \frac{\overline{JC}}{\overline{JA}} \cdot \frac{\overline{KA}}{\overline{KB}} = 1.$$

Exercice 46 (Théorème de Ceva):
Soient (ABC) un triangle, I un point de (BC), J un point de (CA) et K un point de (AB) distincts de A, B et C. Alors les droites (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes ou parallèles si et seulement si

$$\frac{\overline{IB}}{\overline{IC}} \cdot \frac{\overline{JC}}{\overline{JA}} \cdot \frac{\overline{KA}}{\overline{KB}} = -1.$$