Université de Carthage
Ecole Polytechnique de Tunisie
Première année — Année universitaire 2007-2008

Houcine Chebli

# Travaux dirigés : Série 1

## Exercice 1

1. Montrer que, pour toute fonction $g \in C^\infty$, on a
$$g\delta_a = g(a)\delta_a$$
2. En déduire que $x\delta = 0$ et $(x-a)\delta_a = 0$.
3. Montrer qu'une distribution $T \in D'(\mathbb{R})$ satisfait la relation $(x-a)T = 0$ si, et seulement si, $T = c\delta_a$ où $c$ est une constante arbitraire.

## Exercice 2

Considérons $T_\psi$ la distribution de Cauchy, associée à la fonction définie sur $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ par $\psi(z) = 1/z = 1/(x+iy)$. Pour une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, on pose
$$\partial_{\bar z} f = \frac{\partial f}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \text{avec} \quad z = x+iy$$
Montrer que $\partial T_\psi/\partial \bar z = \pi\delta$, c'est-à-dire : $\dfrac{\partial}{\partial \bar z}\left(\dfrac{1}{z}\right) = \pi\delta$, dans $D'(\mathbb{R}^2)$.

## Exercice 3

Montrer qu'une distribution $T \in D'(\mathbb{R})$ satisfait la relation $x^n T = 0$ si, et seulement si, $T = c_0\delta + c_1\delta' + \cdots + c_{n-1}\delta^{(n-1)}$, où $c_j$, $0 \le j \le n-1$, sont des constantes.

Exercice 4

Montrer que, pour tout entier naturel $n$, on a $x\delta^{(n)} = -n\delta^{(n-1)}$.
En déduire que

$$x^m \delta^{(n)} = \begin{cases} (-1)^m n(n-1)\cdots(n-m+1)\delta^{(n-m)}, & \text{si } 1 \le m = n \\ 0, & \text{si } m > n \end{cases}$$

Exercice 5

Montrer que, pour tout entier naturel $n \ge 1$, on a

$$\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^n}{dx^n}(x^{n-1}H) = \delta$$

où $H$ est la distribution de Heaviside.

Exercice 6

Soit $\lambda$ un nombre réel non nul et soit $H$ la distribution de Heaviside. Montrer qu'au sens des distributions, on a

$$\frac{d}{dx} - \lambda \quad (e^{\lambda x}H) = \delta, \qquad \frac{d^2}{dx^2} + \lambda^2 \quad (\sin(\lambda x)H) = \lambda\delta$$

Exercice 7

Soit $\lambda \ge 0$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Soit $P$ l'opérateur différentiel définit sur $\mathbb{R}^3$, par $P = \partial_t + \alpha\partial_x + \beta\partial_y + \lambda$,. Pour $\varphi \in D(\mathbb{R}^3)$, on pose

$$\langle E, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\varphi(t, \alpha t, \beta t)dt$$

1) Montrer que $E$ définit une distribution sur $\mathbb{R}^3$ et donner son support.

2) Calculer $PE$.

Exercice 8

1. Soit $f$ la fonction $a$-périodique définie sur $(0,a)$ par $f(x) = x/a$. Montrer que

$$T_f = \frac{1}{a} - \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{na}, \quad \text{c-a-d} \quad T_f = \frac{1}{a} - \Delta_a$$

2. Soit $f(x) = |\cos x|$. Montrer que $T_f = T_f$ et

$$T_f = T_f + 2 \sum_k \delta_{a_k} \quad \text{avec} \quad a_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 9

Soit $f$ la fonction $a$-périodique définie sur $(0,a)$ par

$$f(x) = \frac{x}{a}\left(\frac{x}{a} - 1\right)$$

1. Montrer que $T_f = T_f$
2. Montrer que $T_f = (2/a^2) - (2/a)\Delta_a$
3. Calculer la série de Fourier de $f$
4. En déduire la formule sommatoire de Poisson.

Exercice 10

Soit $f$ une fonction de $L^1(\mathbb{R})$, positive et dont l'intégrale vaut 1

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$$

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$f_n(x) = nf(nx)$$

1. Montrer que, lorsque $n$ tend vers l'infini, la suite $(f_n)$ converge au sens des distributions vers la distribution de Dirac.
2. En déduire les relations suivantes :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} = \pi\delta, \quad \lim_{n \to \infty} \frac{\sin^2(nx)}{nx^2} = \pi\delta.$$

Exercice 11

Soit $(f_n)$ la suite de fonctions définies par

$$f_n(x) = \begin{cases} \sin(nx)/x, & \text{si } x = 0 \\ n, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que la suite $(f_n)$ converge au sens des distributions vers $\pi\delta$.