Université de Carthage
Ecole Polytechnique de Tunisie
Première année Année universitaire 2008-2009

Houcine Chebli

Correction : Série 1

Exercice 1.

1. Soit $g \in C^\infty$, par définition, pour toute $\varphi \in D$, on a

$$g\delta_a, \varphi = \delta, g\varphi = g(a)\varphi(a) = g(a)\delta_a(\varphi)$$

c'est-à-dire que $g\delta_a = g(a)\delta_a$.

2. Il en résulte immédiatement que $x\delta = 0$ et $(x-a)\delta_a = 0$.

3. Il suffit de considérer le cas où $a = 0$, par translation on en déduit le cas $a = 0$. Il est clair que $x\delta = 0$. Inversement, soit T une distribution telle que $xT = 0$, c'est-à-dire $xT, \varphi = 0$, pour toute fonction φ de $D(\mathbb{R})$. On montre que toute fonction φ de $D(\mathbb{R})$ peut s'écrire sous la forme

$$\varphi(x) = \varphi(0)\varphi_0(x) + x\psi(x)$$

où φ_0 est une fonction arbitraire de $D(\mathbb{R})$ soumise à la seule condition $\varphi_0(0) = 1$ et où ψ est une fonction de D. Puisque T est linéaire,

$$T, \varphi = \varphi(0)\, T, \varphi_0 + T, x\psi$$

Par définition le deuxième terme du second membre est nul. Il suffit donc de poser $c = T, \varphi_0$.

Exercice 2.

Pour toute fonction $\varphi \in D(\mathbb{R}^2)$, on a

$$T_\psi(\varphi) = -\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}} \frac{1}{z}\, dx\, dy$$

Or, en dehors de l'origine la fonction $z \to 1/z$ est holomorphe, donc $\partial_{\bar z}(1/z) = 0$, et par suite

$$T_\psi(\varphi) = -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_\varepsilon} \frac{\partial(z^{-1}\varphi)}{\partial \bar z}\, dx\, dy$$

où $B_\varepsilon = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < \varepsilon^2\}$. Une application de la formule de Green-Riemann

$$\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial D} [P\, dx + Q\, dy]$$

montre que l'intégrale du second membre de l'égalité ci-dessus est égale à

$$\frac{1}{2i} \int_{\partial B_\varepsilon} (\varphi(z)/z)\, dz$$

En posant $z = \varepsilon e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$, on peut voir que la limite de cette dernière intégrale, quand $\varepsilon \to 0$, vaut $\pi\varphi(0)$.

Exercice 3. La relation est vraie pour $n = 1$. Supposons, par récurrence, qu'elle soit vraie pour $n - 1 > 0$, c'est-à-dire que

$$x^{n-1}T = 0 \Longleftrightarrow T = a_0\delta + a_1\delta' + \cdots + a_{n-2}\delta^{(n-2)}$$

Il en résulte que

$$x^n T = 0 \Longleftrightarrow x^{n-1}(xT) = 0 \Longleftrightarrow xT = b_0\delta + b_1\delta' + \cdots + b_{n-2}\delta^{(n-2)}$$

Or, voir exercice ci-après, $x\delta^{(p)} = -p\delta^{(p-1)}$, on en déduit que

$$x^n T = 0 \iff xT = -x\left(b_0\delta + \frac{b_1}{2}\delta' + \cdots + \frac{b_{n-2}}{n-2}\delta^{(n-1)} \right)$$

$$\iff x\left(T + b_0\delta + \frac{b_1}{2}\delta' + \cdots + \frac{b_{n-2}}{n-1}\delta^{(n-1)} \right) = 0$$

$$\iff T + b_0\delta + \frac{b_1}{2}\delta' + \cdots + \frac{b_{n-2}}{n-1}\delta^{(n-1)} = \alpha\delta$$

Cela termine la démonstration.

Exercice 4. Par définition, pour toute fonction test φ, on a

$$x\delta^{(n)},\varphi = \delta^{(n)},x\varphi = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}(x\varphi)_{x=0}$$

Or,

$$\frac{d^n}{dx^n}(x\varphi) = x\varphi^{(n)} + n\varphi^{(n-1)}$$

il en résulte que, pour toute fonction test,

$$x\delta^{(n)},\varphi = (-1)^n n\varphi^{(n-1)}(0) = -n\ \delta^{(n-1)},\varphi$$

On a donc montré la relation

$$x\delta^{(n)} = -n\delta^{(n-1)}$$

D'autre part, pour des entiers naturels n et m, on a

$$x^m\delta^{(n)},\varphi = x\delta^{(n)},x^{m-1}\varphi$$

Utilisant la relation précédente, le second membre s'écrit

$$x^m\delta^{(n)},\varphi = -n\ \delta^{(n-1)},x^{m-1}\varphi = -n\ x^{m-1}\delta^{(n-1)},\varphi$$

Cela montre que $x^m\delta^{(n)} = -nx^{m-1}\delta^{(n-1)}$. Par itération pour $1 \leq m \leq n$, on en déduit que

$$x^m\delta^{(n)} = (-1)^m n(n-1)\cdots(n-m+1)\delta^{(n-m)}$$

En particulier,

$$x^n\delta^{(n)} = (-1)^n n!\delta$$

On vérifie immédiatement que, si $m > n$, alors

$$x^m\delta^{(n)} = (-1)^n n!x^{m-n}\delta = 0$$

Exercice 5. On sait que $H' = \delta$, la formule est donc vraie pour $n = 1$. Soit $n > 1$, on a

$$\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^n}{dx^n}(x^{n-1}H) = \frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\frac{d}{dx}\ x^{n-1}H$$

Comme n est strictement supérieur à 1, $x^{n-1}\delta = 0$ et il vient

$$\frac{1}{(n-1)!}\frac{d}{dx}\left(x^{n-1}H\right) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\delta + \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}H = \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}H$$

Par suite,

$$\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1}H\right) = \frac{1}{(n-2)!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(x^{n-2}H\right) = \cdots = \frac{d}{dx}(H) = \delta$$

Exercice 6. Soit $H_\lambda = e^{\lambda x}H$. Pour toute fonction test φ, on a

$$\langle H_\lambda', \varphi\rangle = -\langle H_\lambda, \varphi'\rangle = -\int_0^\infty e^{\lambda x}\varphi'(x)\,dx$$

Une intégration par parties donne

$$\langle H_\lambda', \varphi\rangle = \varphi(0) + \lambda\langle H_\lambda, \varphi\rangle = \langle \delta, \varphi\rangle + \lambda\langle H_\lambda, \varphi\rangle$$

D'où la relation $H_\lambda' - \lambda H_\lambda = \delta$. D'autre part, si l'on pose $T_\lambda = \sin(\lambda x)H$, on montre de même (après deux intégrations par parties) que, pour toute fonction test φ,

$$\langle T_\lambda', \varphi\rangle = \lambda\varphi(0) - \lambda^2\langle T_\lambda, \varphi\rangle$$

c'est-à-dire que $T_\lambda'' + \lambda^2 T_\lambda = \lambda\delta$.

Exercice 7.

1. Soit $K \subset \mathbb{R}^3$ un compact. Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ est à support dans K, on vérifie aisément qu'il existe une constante C telle que

$$|\langle E, \varphi\rangle| \leq C\,\|\varphi\|_\infty$$

   Ainsi, E est une distribution sur $\mathbb{R}^3$. De plus, il est clair que le support de E est le demi-espace $\{(t,x,y), t \geq 0\}$.

2. D'autre part, un calcul élémentaire montre que

$$(\partial_t\varphi + \alpha\partial_x\varphi + \beta\partial_y\varphi)(t,\alpha t,\beta t) = \frac{d}{dt}\left(\varphi(t,\alpha t,\beta t)\right)$$

Par suite, pour toute $\varphi \in D(\mathbb{R}^3)$,

$$\begin{aligned} PE,\varphi &= -\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}(\partial_t\varphi + \alpha\partial_x\varphi + \beta\partial_y\varphi - \lambda\varphi)(t,\alpha t,\beta t)dt \\ &= -\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}(\frac{d}{dt} - \lambda)(\varphi(t,\alpha t,\beta t))dt = \varphi(0,0,0) \end{aligned}$$

En d'autres termes, $PE = \delta$.

Exercice 9.

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, et dérivable pour $x = na$, $n \in \mathbb{Z}$, et sa dérivée est donnée par

$$f'(x) = \frac{2x}{a^2} - \frac{1}{a} \quad \text{pour } 0 < x < a \text{ et } x = na, n \in \mathbb{Z}$$

On en déduit que $T_{f'} = (T_f)'$.

2. Le saut de f en $x = na$ vaut $\sigma_f(na) = -2/a$. On en déduit que la dérivée au sens des distributions de f, c'est-à-dire $(T_f)'$, est donnée par

$$(T_f)' = \frac{2}{a^2} - \frac{2}{a}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{na}$$

ce qu'on écrit aussi

$$f' = \frac{2}{a^2} - \frac{2}{a}\Delta_a \quad \text{dans } D'$$

3. Les coefficients de Fourier $c_n(f)$ de f sont donnés par

$$c_n(f) = \frac{1}{a}\int_0^a \frac{x}{a}\left(\frac{x}{a} - 1\right) e^{-2i\pi nx/a}\,dx, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Deux intégrations par parties donnent

$$c_0(f) = -\frac{1}{6} \quad \text{et pour } n = 0,\ c_n(f) = \frac{1}{2\pi^2 n^2}$$

La série de Fourier de f est donc normalement convergente et on a

$$f(x) = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=0} \frac{e^{2i\pi nx/a}}{n^2}$$

4. En dérivant deux fois au sens des distributions les deux membres, il vient

$$f'' = -\frac{1}{a^2} \sum_{n=0} e^{2i\pi nx/a} \quad \text{dans } D'$$

En remplaçant le premier membre par son expression trouvée plus haut, il vient

$$\frac{2}{a^2} - \frac{2}{a}\Delta_a = -\frac{1}{a^2} \sum_{n=0} e^{2i\pi nx/a}$$

D'où la relation

$$\Delta_a = \frac{1}{a} \sum_{n\in Z} e^{2i\pi nx/a}$$

Cette relation représente, en quelque sorte, le développement en série de Fourier du peigne de Dirac de maille a.

5. On en déduit que, pour toute fonction test φ, on a

$$\sum_{n\in Z} \varphi(na) = \frac{1}{a} \sum_{n\in Z} \hat{\varphi}(n/a)$$

où $\hat{\varphi}$, noée encore $F\varphi$, désigne la transformée de Fourier de φ

$$\hat{\varphi}(\xi) = \int_R \varphi(x) e^{-2i\pi x\xi}\, dx$$

En effet, pour toute $\varphi \in D(R)$,

$$\langle \Delta_a, \varphi \rangle = \frac{1}{a} \sum_{n\in Z} \langle e^{2i\pi nx/a}, \varphi \rangle = \frac{1}{a} \sum_{n\in Z} \int_R \varphi(x) e^{2i\pi nx/a}\, dx$$

$$= \frac{1}{a} \sum_{n\in Z} \hat{\varphi}(-n/a) = \frac{1}{a} \sum_{n\in Z} \hat{\varphi}(n/a)$$

C'est la formule sommatoire de Poisson.

Exercice 10.

1. Par définition, (f_n) est une approximation de l'identité (voir l'exercice 2 de la section 2, du chapitre III du cours d'analyse hilbertienne). On en déduit en particulier que, pour toute fonction continue g, à support compact

$$\lim_{n\to\infty} \|g - f_n * g\|_\infty = 0$$

Cela implique que, pour tout $x \in R$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_R f_n(x-y)g(y)\,dy = g(x)$$

Soit φ une fonction test et prenons pour g, dans la relation précédente, la fonction définie par $g(x) = \varphi(-x)$. Il vient

$$\lim_{n\to\infty} \int_R f_n(x+y)\varphi(y)\,dy = \varphi(-x)$$

En changeant x en $-x$ on en déduit que, lorsque n tend vers l'infini, la suite $(\tau_x f_n)$ converge au sens des distributions vers δ_x.

2. En remplaçant n par $1/\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, on démontre de même que, lorsque ε tend vers 0, $\tau_x f_\varepsilon$ converge au sens des distributions vers δ_x. La démonstration de la question 2 est une application directe de la question 1.

Exercice 11. On ne peut pas appliquer la démarche adoptée dans l'exercice précédent, car la fonction $x \to f(x) = \sin(x)/x$ n'appartient pas à $L^1(R)$. Soit φ une fonction test et soit [a,b] un intervalle contenant le support de φ. On peut supposer que $a < 0$ et $b > 0$. Soit f_n la fonction associée à f comme dans l'exercice précédent. On a

$$\langle f_n, \varphi \rangle = \int_a^b \sin(x)\frac{\varphi(x)}{x}\,dx$$

Si l'on désigne par χ la fonction caractéristique de l'intervalle [a,b], on peut écrire

$$\langle f_n, \varphi \rangle = \varphi(0)\int_{na}^{nb} \frac{\sin y}{y}\,dy + \int_R \chi(x)\sin(nx)\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx$$

Lorsque n tend vers l'infini, la première intégrale du second membre converge vers π; la deuxième converge vers 0 d'après le lemme de Riemann-Lebesgue car $x \to \chi(x)[\varphi(x) - \varphi(0)]/x$ est une fonction intégrable sur R.