Université du 7 novembre à Carthage
Ecole Polytechnique de Tunisie
Première année Année universitaire 2006-2007

Houcine Chebli

Travaux dirigés : Série 4

Exercice 1

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace de Hilbert. Montrer que l'application qui, à deux éléments x et y associe leur produit scalaire est une fonction continue sur $E \times E$.

Exercice 2

Soit $C([0,1])$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs complexes. On pose

$$\langle f,g \rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt$$

Montrer que cela fait de $C([0,1])$ un espace préhilbertien.

Soit (f_n) la suite définie par $f_n(x) = \inf\{n, t^{-\frac{1}{3}}\}$. Montrer que (f_n) est une suite de Cauchy pour la distance induite par le produit scalaire $\langle , \rangle$ mais ne converge pas vers une fonction de l'espace $C([0,1])$.

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, muni d'une norme qui vérifie l'identité du parallélogramme, à savoir

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Pour x et y dans E, on pose

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right)$$

(a) Montrer que $\varphi(x,y) = \overline{\varphi(y,x)}$ et que $\varphi(x,x) = \|x\|^2$.

(b) Montrer que $\varphi(x+z,y) = \varphi(x,y) + \varphi(z,y)$

(c) Montrer que $\varphi(\lambda x,y) = \lambda\varphi(x,y)$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

(d) En déduire que toute norme vérifiant l'identité du parallélogramme est induite par un produit scalaire.

Exercice 4

On désigne par $L^2((0,\infty);e^{-x}dx)$ l'espace de Hilbert des (classes de) fonctions mesurables et de carré intégrable sur $(0,\infty)$ pour la mesure de densité e^{-x} par rapport à la mesure de Lebesgue.

1) Calculer la norme de $p_n : x \to x^n$, pour $n = 0,1,2,\ldots$.

2) Calculer le produit scalaire $\langle p_n, p_m \rangle$.

Exercice 5

Dans l'espace $L^2(\mathbb{R};e^{-x^2/2}dx)$, on pose $c_n = \|p_n\|^2$.

(a) Montrer que $c_0 = \sqrt{2\pi}$

(b) Montrer par intégration par parties que $c_n = (2n-1)c_{n-1}$, $n \geq 1$.

(c) En déduire par récurrence que

$$c_n = \frac{(2n)!}{n!2^n}\sqrt{2\pi}$$

Exercice 6

Pour f dans l'espace $C([0,1])$ des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs complexes on pose

$$\|f\| = |f(0)| + \|f\|_1 = |f(0)| + \int_0^1 |f(t)|dt$$

Montrer que cela définit une norme sur $C[0,1]$. Soit F le sous-espace des fonctions qui s'annulent en 0 et soit f_0 la fonction constante égale à 1. Calculer la distance de f_0 à F. Existe-t-il $f \in F$ tel que $\|f_0 - f\| = \text{dist}(f_0,F)$?

Exercice 7

Calculer

$$\min_{a,b,c} \int_{-1}^{1} |x^3 - ax^2 - bx - c|^2 dx$$

et trouver le maximum de l'intégrale $\int_{-1}^{1} x^3 g(x)\,dx$ où g est supposée de norme 1 et soumise aux restrictions suivantes

$$\int_{-1}^{1} g(x)\,dx = \int_{-1}^{1} xg(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x^2 g(x)\,dx = 0,$$

Exercice 8

Calculer

$$\min_{a,b,c} \int_0^{\infty} |x^3 - ax^2 - bx - c|^2 e^{-x}\,dx$$

Exercice 9

Sur l'espace $L^2((0,\infty);e^{-x}dx)$ le produit scalaire est défini par

$$f,g = \int_0^{\infty} f(x)\overline{g(x)}e^{-x}\,dx$$

(i) Vérifier que, pour tout réel $a < 1/2$, la fonction définie par $\varphi_a(x) = e^{ax}$ est dans $L^2((0,\infty);e^{-x}dx)$

(ii) Démontrer que la distance entre φ_a et φ_b $(a,b < 1/2)$ est

$$\frac{\sqrt{2}|a-b|}{[(1-2a)(1-2b)(1-a-b)]^{1/2}}$$

(iii) Pour quelle constante α la fonction $x \to f(x) = \alpha x$ a-t-elle une norme égale à 1 ?

(iv) Pour quelle constante β la fonction $\to g(x) = x$ et la fonction $x \to h(x) = \beta - x$ sont-elles orthogonales ?

Exercice 10

Montrer que, sur l'intervalle $(-1,1)$, les fonctions $x \to f(x) = 1$ et $x \to g(x) = 2x^2 - 1$ sont orthogonales relativement au produit scalaire

$$f,g = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

mais non orthogonales relativement au produit scalaire suivant :

$$< f,g > = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$$

Exercice 11

Montrer que les polynômes définis par $p_0(x) = 1, p_1(x) = x, p_2(x) = 3x^2 - 1$ et $p_3(x) = 5x^3 - 3x$ sont deux à deux orthogonaux dans l'espace $L^2((-1,1),dx)$.

Exercice 12

Montrer que, dans un espace de Hilbert E, si (x_n) converge faiblement vers x et si (y_n) est une suite qui converge vers y, alors la suite (x_n, y_n) converge vers x, y.

Exercice 13

Soient $E = L^2[0,1]$ et $(f_n), n \in N$ une suite bornée d'éléments de E. On pose

$$F_n(x) = \int_0^x f_n(t)\,dt, \quad \text{où } n \in N$$

Montrer que la suite (f_n) converge faiblement vers 0 si, et seulement si, la suite (F_n) converge uniformément vers 0 sur $[0,1]$.
En déduire que (f_n) converge faiblement vers un élément f de E si et seulement si la suite (F_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers la primitive de f qui s'annule en 0.