

Institut Supérieur de l'Education  
et de la Formation Continue

**ED 216**

***Didactique des mathématiques et formation des enseignants du premier  
cycle de l'école de base***

**Mr. Imed BEN KILANI**

## Sommaire

- Objectifs.....	p4
- Introduction.....	p5
<b>Première partie</b>	
I. Qu'est-ce que la didactique des mathématiques ?.....	p7
II. Pourquoi la didactique des mathématiques doit contribuer à la formation de l'enseignant des mathématiques.....	p8
III. Histoire de la didactique des mathématiques.....	p10
IV. Certains concepts et théories clés intervenants en didactique des mathématiques.....	p12
IV. 1. Le concept d'erreur et le concept d'obstacle.....	p12
IV. 2. La théorie des champs conceptuels.....	p14
IV. 3. La théorie des situations.....	p15
V. Les compétences indispensables pour les enseignants de l'école de base.....	p17
V. 1. Quelles compétences doivent acquérir les enseignants ?.....	p17
V. 2. La partie cachée du travail de l'enseignant.....	p19
V.3. Le travail et le rôle de l'enseignant dans la classe.....	p23
<b>Deuxième partie</b>	
VI. Les définitions dans la classe de mathématiques.....	p27
VII. La résolution des problèmes mathématiques.....	p29
VIII. Les particularités de la résolution des problèmes arithmétiques.....	p31
VIII. 1. La procédure de résolution prise comme objet d'enseignement.....	p31
VIII.1.1. L'apprentissage à la résolution de problèmes.....	p31
VIII.1.2. L'effet âge du capitaine : dysfonctionnement cognitif ou problème de contrat didactique ?.....	p32
VIII. 2. Quelques règles implicites du contrat didactique .....	p34
IX. L'enseignement des décimaux au premier cycle de l'école de base.....	p36
IX. 1. Comment explique t-on les difficultés d'apprentissage des nombres décimaux.....	p36
IX.1.1. Les obstacles didactiques.....	p36
IX. 1.2 Les obstacles épistémologiques.....	p37
IX. 2. Exemple d'Activités.....	p40
X. Les premiers apprentissage des nombres à l'école : Addition, soustraction et comparaison.....	p45
X. 1. La résolution de problèmes - le cas des situations de comparaison d'ensembles.....	p45
X. 2. Un modèle de développement de la compréhension.....	p46
X. 2. 1. Étude du cas de Caroline.....	p47
X. 2. 2. Étude de cas de Karine.....	p50
X. 2. 3. Étude du cas de Marijo.....	p53
X. 3. Discussion.....	p55
X.3.1 Comment s'élabore la compréhension des élèves rencontrées.....	p55
X.3.2. Les difficultés rencontrées par ces élèves.....	p55
X. 4. Les types de situation de comparaison.....	p56
X. 5. Apport de ce type d'accompagnement.....	p56
XI. Quelques réflexions sur les structures multiplicatives.....	p57
XI. 1. Les modèles de représentation de la multiplication et les conduites sous-jacentes.....	p58
XI. 1.1 Le modèle de représentation additif.....	p58
XI. 1. 2 Le modèle de représentation mixte.....	p60

XI. 1. 3 Le modèle de représentation multiplicatif.....	p62
XI. 2 Discussion au regard des construits des élèves.....	p64
XI. 3 Quelques considérations d'ensemble au regard des conduites observées.....	p64
XI. 4 Une didactique plus audacieuse sur le plan de la sollicitation cognitive des élèves.....	p66
XII. L'apport des interactions entre élèves dans l'enseignement des fractions.....	p68
XII.1 Description de la séquence d'activités.....	p68
XII. 2 conclusion.....	p74
XIII. L'enseignement de la géométrie à l'école de base.....	p75
XIII. 1. Connaissances spatiales et connaissances géométriques.....	p76
XIII. 2. Les différences entre connaissances spatiales et connaissances géométriques.....	p76
XIII. 2. 1. Leur genèse chez l'enfant.....	p76
XIII. 2. 2. Les types de problèmes.....	p76
XIII. 2. 3. Le vocabulaire.....	p77
XIII. 3. Les rapports entre connaissances spatiales et connaissances géométriques.....	p77
XIII. 4. Quelques caractéristiques de l'enseignement de la géométrie.....	p79
XIII. 5. Les pratiques les plus répandues .....	p79
XIII. 5. 1. L'ostension assumée.....	p79
XIII. 5.2. L'ostension déguisée.....	p81
XIII. 5.3. Les raisons de la persistance de l'ostension .....	p82
XIV. Quelques difficultés didactiques concernant les notions d'aire et de périmètre.....	p85
XIV. 1. Les étapes de l'apprentissage du calcul d'aire et de périmètre.....	p87
XIV. 2. Dissociation des concepts d'aire et de périmètre.....	p87
XIV. 3. Comparer ou/et mesurer.....	p87
XIV. 4. Types d'activités à proposer aux élèves afin de dissocier entre le concept d'aire et celui de périmètre.....	p88
XIV. 4. 1. La question de la mesure.....	p88
XIV. 4. 2 La construction de formules.....	p89
Dictionnaire des mots clés.....	p90
Bibliographie .....	p91

## **Objectifs**

- Cerner les concepts didactiques spécifiques aux mathématiques.
- Mettre en évidence l'apport spécifique de la didactique des mathématiques à l'acte enseignement-apprentissage des mathématiques
- Mettre en évidence l'apport spécifique de la didactique des mathématiques dans la formation des enseignants de l'école de base
- Préciser certains aspects épistémologiques du domaine des mathématiques
- Aider l'enseignant à mobiliser les concepts de la didactique des mathématiques dans l'enseignement de cette discipline.
- Sensibiliser les enseignants de la nécessité de la prise en considération lors de leurs enseignement de la complexité du phénomène d'apprentissage chez les élèves et notamment les plus jeunes d'entre eux, et ce même pour des concepts mathématiques qui semble, pour eux, être transparents.

## Introduction

Depuis quelques années le Ministère de l'Éducation tunisien a entré dans un processus de requestionnement de son système éducatif : l'installation d'un enseignement obligatoire qui s'étale sur les neufs premières années de l'enseignement et qui correspond à l'école de base, des socles de compétences et des compétences terminales ont été fixés à différents moments du premier cycle de l'école de base et qui vont se fixer dans les années à venir dans les niveaux supérieurs.

Le but poursuivi, en introduisant ces réformes, est d'assurer un enseignement de qualité, visant à garantir les mêmes chances aux élèves devant la formation et à promouvoir la réussite scolaire à la majorité d'entre eux. Les changements et l'évolution introduites au niveau du cadre institutionnel de l'école ont vu le jour à un moment où le public scolaire a changé lui aussi. Maintenant que les apprenants ont un large accès aux médias, ils n'attendent plus de l'école une simple transmission d'informations. Les enseignants doivent désormais accompagner les élèves dans leurs apprentissages et s'adapter en permanence à l'hétérogénéité des classes. De ce fait, une question s'est imposé : Doit-on former des mathématiciens qui feront de l'enseignement ou des enseignants qui enseigneront les mathématiques ? Une formation académique purement mathématiques mène-t-elle à une trop forte spécialisation et donc à une vision formaliste et trop axée sur la rigueur et sur la structuration axiomatique ?

L'enseignement universitaire est souvent très formel. Il privilégie, des connaissances pointues, une démarche d'enseignement essentiellement transmissive et une présentation des connaissances sous la forme de "théories achevées".

Cette forme d'enseignement peut s'avérer efficace et permet une avance rapide pour les quelques étudiants qui deviendront éventuellement des chercheurs en mathématiques. Cependant, nombreux sont ceux qui se réfugient dans un apprentissage par cœur, pour les examens, seul moyen pour eux de "réussir". La représentation de ce que sont les mathématiques, de la façon dont elles se construisent, se structurent, se présentent ou s'enseignent se trouve fréquemment biaisée. Cela se révèle notamment lors des examens ou dans les cours de didactique, lorsque les étudiants doivent "se dévoiler". Sans vouloir la condamner, nous pensons que cette forme d'enseignement n'est sûrement pas idéale si l'on vise à former des enseignants. Selon nous, un réel effort doit être entrepris pour la formation des futurs enseignants vers des contenus moins techniques, en cherchant à leur

donner une vision large de la structure des mathématiques, une vision réaliste de la façon dont on les "fait", une vision de leur sens, de leur rôle et de leur histoire.

Ce présent cours se compose de deux grandes parties : la première concerne le rôle et les spécificités de la didactique des mathématiques ainsi qu'une introduction des principaux concepts de la didactique des mathématiques,. Quant à la deuxième partie elle traite de l'enseignement et l'apprentissage de quelques concepts mathématiques et para-mathématiques , vue selon une perspective didactique, figurants au niveau du premier cycle de l'école de base.

## **Première partie**

### **I. Qu'est-ce que la didactique des mathématiques ?**

La didactique des mathématiques, s'est constituée depuis plus de 30 ans en tant que science nouvelle. C'est un champ de savoir qui s'intéresse à l'étude de la transmission intentionnelle des savoirs mathématiques. Elle étudie les caractéristiques des situations didactiques. La connaissance de ces caractéristiques donne des indications sur les potentialités d'apprentissages des situations. Elle fournit également des critères de décision pour l'enseignant.

Les questions qui étaient à l'origine du développement de cette science étaient de plusieurs ordres. Principalement, il s'agissait de mieux comprendre comment fonctionnent les processus de transmission et d'acquisition des savoirs mathématiques, particulièrement en situation scolaire. De là, des questions se sont posées :

- Comment ce savoir mathématique s'est-il construit ?
- Quelles sont les attentes d'une société par rapport à ce savoir mathématique et à la façon de l'acquérir ?
- Quel rôle institutionnel le professeur doit-il tenir ?
- Les élèves arrivent-ils avec une tête vide qu'il suffirait de remplir ?

Ces questions montrent qu'une formation à l'enseignement des mathématiques ne saurait se réduire ni à l'acquisition de contenus mathématiques, ni à un discours de pédagogie générale qui, par nature exclut l'étude des contenus.

## II. Pourquoi la didactique des mathématiques doit contribuer à la formation de l'enseignant des mathématiques

Il est aujourd'hui généralement connu que le savoir de l'enseignant ne saurait s'identifier à celui enseigné à l'élève auquel il s'adresse, pas seulement pour des raisons évidentes de compétence disciplinaire minimale, mais parce que les mathématiques dont a besoin le professeur pour enseigner les mathématiques sont spécifiques. Cette spécificité a, au moins, deux conséquences :

1) Lorsque les contenus mathématiques sont jugés triviaux par les enseignants, ceux-ci n'envisagent pas spontanément d'autre action d'enseignement que celle de l'ostension<sup>1</sup>.

2) Lorsque les contenus sont jugés difficiles (décimaux, fractions...) alors l'inquiétude du point de vue de la maîtrise des savoirs réduit toute action à une approche didactique.

Dans le cas où l'enseignant expose les savoirs, on parlera d'*ostension*, sans plus. Dans le cas où il propose des activités qui montrent ces savoirs dans des occurrences simples, on parle d'*ostension déguisée*. L'ostension déguisée est le plus souvent pratiquée au premier cycle de l'école de base : l'enseignant présente directement des connaissances en s'appuyant sur l'observation dirigée d'une réalité sensible ou d'une de ses représentations et suppose l'élève capable de se les approprier et d'en étendre l'emploi à d'autres situations. Exemple en géométrie: dans un premiers temps, les propriétés visées sont mises en évidence dans un cas facile à voir. L'observation doit permettre à l'apprenant de s'approprier cette marque du savoir. Dans un deuxième temps, il est demandé aux élèves d'utiliser ce savoir dans les différents exercices dont la proximité avec les premiers n'est pas souvent contrôlée.

D'autre part, de récents travaux de recherche en didactique des mathématiques ont montré que le partage des responsabilités, si important dans le fonctionnement de la classe, ne prenait pas en compte le phénomène suivant : dans certaines situations, l'élève a besoin de connaissances qui ne lui sont pas enseignées, mais qu'il doit pourtant mettre en oeuvre, pour apprendre ou pour utiliser ce qu'il a appris. Ces travaux mettent en évidence une autre façon d'étudier le partage possible des responsabilités entre l'enseignant et l'élève : il existe des connaissances nécessaires à des pratiques scolaires et relatives à un certain savoir, et qui ne sont pas des objets d'enseignement. Elles sont donc sous la responsabilité de l'élève. Par exemple, la logique qui intervient dans l'activité mathématique ne fait pas l'objet d'un enseignement à l'école de base bien qu'elle est omniprésente.

---

<sup>1</sup> "L'ostension est la donnée par l'enseignant de tous les éléments et relations constitutifs de la notion visée" (1977 Ratsimba-Rajhon).



Ainsi, une formation axée exclusivement sur le savoir mathématique ne saurait être suffisante pour bien rendre compte de la complexité de l'enseignement des mathématiques notamment à l'école de base.

### III. Histoire de la didactique des mathématiques

Vers les années 70, les congrès internationaux sur l'enseignement des mathématiques ne parlaient que de "curriculum " c'est-à-dire, en quelque sorte, du programme :

- fallait-il placer telle question de mathématiques avant ou après telle autre ?
- Fallait-il enseigner telle partie des mathématiques ou non , ce que l'on appellerait maintenant le passage du savoir savant au savoir enseigné.

Mais, dans tout cela l'élève n'apparaît pas.

Les didacticiens, ont pris ensuite conscience qu'il fallait s'occuper des "obstacles épistémologiques". Cette conscience provient du fait qu'historiquement certaines parties des mathématiques avaient posé plus de problèmes que d'autres aux chercheurs : on restait toujours dans la discipline mathématique, l'élève était toujours absent mais on introduisait l'histoire, le temps, autrement dit l'humain.

Ensuite l'élève a commencé à apparaître dans la didactique mais uniquement par ses résultats aux exercices. Ce fut l'époque de la didactique statistique où on cherchait, pour un même exercice, la fréquence d'apparition de différents résultats, faux ou vrais.

On considérait l'élève comme une boîte noire avec un input, qui était l'exercice proposé et un output qui était le résultat qu'il donnait.

Cette boîte noire a suscité la curiosité des didacticiens, ils ont essayé de poser des hypothèses sur son fonctionnement en étudiant non seulement les résultats mais en cherchant à comprendre les différentes "stratégies " qui aboutissaient à ces résultats. Pour ce faire, ils relevaient, au besoin, les brouillons des élèves pour voir comment ils avaient procédé ; et ces brouillons permettaient d'étudier les diverses stratégies utilisées face à un même exercice. L'élève était toujours une boîte noire muette.

Par la suite les chercheurs en didactique ont pris conscience que les élèves pouvaient en fait parler ! ils ont recommencé donc à étudier les stratégies mais cette fois en demandant aux élèves comment ils se sont pris pour résoudre l'exercice. On a eu alors des relevés d'explications qui permettaient de prendre conscience de l'importance de la parole de l'élève.

Un grand pas fut fait par une didacticienne de physique (Viennot) qui montra, en étudiant ce que disaient les élèves, que ceux-ci avaient effectivement une logique à eux, qu'ils construisaient des "théorèmes spontanés " qui, bien que non exacts, leur servaient à résoudre les questions posées. En d'autres termes, les élèves avaient des "représentations "

(des conceptions) des différents points abordés, que la logique mathématique n'était pas la seule à intervenir dans un raisonnement d'élève mais qu'il existait une autre logique.

Il ne restait plus donc qu'à prendre en compte l'imaginaire de l'élève pour prendre conscience de la complexité de sa personne.

D'autres chercheurs montrent également que l'élève n'est pas seul mais que le groupe classe (dans **le contrat didactique**) a son importance dans les phénomènes d'apprentissage, autrement dit que le psychisme individuel est pris dans des phénomènes de groupe.

Cette brève histoire de la didactique des mathématiques est un exemple qui illustre bien le travail de complexification que nous avons à faire lors de l'enseignement-apprentissage des mathématiques à nos élèves et notamment les plus jeunes d'entre eux.

## **IV. Certains concepts et théories clés intervenants en didactique des mathématiques**

### **IV. 1. Le concept d'erreur et le concept d'obstacle**

Au cours de ces deux dernières décennies on a assisté à un changement profond du statut de l'erreur dans l'enseignement des mathématiques à la suite des travaux qui se sont développés dans le domaine de la recherche en didactique des mathématiques.

Les conceptions que les élèves se sont construites pour organiser le monde dans lequel ils vivent sont souvent différentes des conceptions scientifiques. Elles persistent fréquemment après l'apprentissage, car elles prennent leurs racines très tôt dans le développement de l'enfant, s'intègrent dans un registre affectif relevant de la magie, du rite, ou dans un système explicatif qui, même s'il est erroné d'un point de vue scientifique, s'avère efficace pour l'enfant dans sa vie quotidienne.

Les conceptions constituent souvent des obstacles à l'apprentissage. Le fait de les connaître permet à l'enseignant d'adapter les activités pour mieux les travailler. Il est souvent préférable de faire "avec" les conceptions en tentant de les faire évoluer, plutôt que d'essayer à tout prix d'aller "contre".

Ainsi, le statut de l'erreur a évolué dans le sens d'une atténuation de la notion de culpabilité : les erreurs commises par ceux qui apprennent ne sont ni des fautes condamnables, ni des manifestations pathologiques, mais font partie d'un processus normal d'apprentissage. L'erreur n'est donc plus indicateur de sanction, mais source de réflexion. En effet, elle permet de rectifier son point de vue "naturel", sa compréhension d'un phénomène ainsi que son raisonnement. L'erreur passe ainsi d'un statut très fortement négatif à un statut plus positif dans lequel elle constitue un point d'appui pour la construction de nouvelles connaissances et devient partie intégrante de ce processus.

Dans cette perspective, on peut envisager une typologie des principaux types d'erreur rencontrées dans l'enseignement des mathématiques:

**A/** L'erreur se situe par rapport au savoir de référence ou au savoir scolaire, on pourra parler d'erreur *conceptuelle*. Il en est ainsi par exemple de la confusion entre l'aire et le périmètre qui est une erreur récurrente à l'école de base semble-t-il.

L'erreur peut aussi, dans ce cas, trouver son origine dans le savoir de référence lui-même. Il en est ainsi de ce que Bachelard nommait *obstacle épistémologique* : notion d'infini, de nombre relatifs etc.

**B/** L'erreur se situe par rapport au savoir enseigné. Dans ce cas c'est le processus d'enseignement mis en œuvre par l'enseignant qui a engendré un obstacle que Guy Brousseau a proposé d'appeler *obstacle didactique* par analogie avec l'obstacle épistémologique engendré par le savoir lui-même. C'est ainsi que la méthode classique d'introduction des nombres décimaux à l'école de base à partir de la mesure des grandeurs et des changements d'unités engendre un obstacle didactique qui conduit les élèves à penser qu'un nombre décimal se comporte comme deux nombres entiers séparés par une virgule. Ceci conduit à des erreurs bien connues du type:  $2,3 \times 4,2 = 8,6$  ou  $4,5 + 6,7 = 10,12 \dots$

**C/** L'erreur se situe par rapport au savoir de l'élève. C'est ainsi, et c'est assez fréquent, lorsque l'élève s'est construit une *conception erronée* d'une notion. Il est assez classique de rencontrer des élèves qui, lorsqu'on leur demande d'agrandir une figure géométrique pour en obtenir une autre et pour lesquelles quelques dimensions sont données, ajoutent des quantités aux longueurs de départ (quantités déduites de la différence de deux mesures correspondantes sur les deux figures) au lieu de multiplier les dimensions de la première figure par le coefficient déduit de la comparaison de deux mesures correspondantes. L'origine de cette erreur se situe dans la conception construite par les élèves à l'école de base selon laquelle "agrandir c'est ajouter".

On trouve également dans ce type d'erreur ce que Gérard Vergnaud a appelé des *théorèmes en actes* qui sont des règles que se sont construit les élèves dans un certain domaine de validité et qu'ils transfèrent illégitimement à un autre. Il en est ainsi, par exemple, pour le théorème en acte "la multiplication fait grandir" (vrai pour les nombres entiers) lorsqu'il est appliqué aux nombres décimaux.

**D/** L'erreur se situe par rapport à la *compréhension* de la tâche. C'est ainsi qu'on peut observer, dans une épreuve écrite, les réponses d'un élève qui pourrait être à l'aise dans le maniement des fractions :

Observe:  $23/7 = 3 + 2/7$

Complète de même:  $15/4 = \dots$  (réponse  $5 + 1/4$ ) !

$17/3 = \dots$ (réponse  $7 + 1/3$ ) !

Nous ne pouvons pas imaginé une seule seconde que le choix des nombres dans l'exemple donné pourrait conduire à un tel résultat.

**E/.** l'erreur se situe par rapport au *contrat didactique*, c'est-à-dire par rapport aux attentes réciproques du maître et des élèves. C'est l'exemple classique, en didactique des mathématiques, du problème "l'âge du capitaine", problème (qu'on analysera en détail

plus loin) absurde auxquels les élèves donnent une réponse parce que le contrat, tel qu'ils le vivent, veut qu'un problème ait toujours une réponse numérique et une seule. C'est aussi l'exemple classique du carré dessiné "sur la pointe" et qui n'est plus reconnu comme un carré mais comme un losange!

F/ L'erreur se situe par rapport au *raisonnement* de l'élève. Elle est alors très difficile à expliquer si l'on ne dispose pas du brouillon.

Un élève répond à :  $5/3 + 2/3 = \dots$  (réponse  $7/6$ )! On peut penser à l'erreur classique et automatique attendue, mais si on regarde de près le brouillon de cet élève, on trouve une suite d'opérations posée qui révèlent son raisonnement :

$$5 : 3 = 1,6$$

$$2 : 3 = 0,6$$

$$1,6 + 0,6 = 1,12$$

$$7 : 6 = 1,1$$

$$\text{donc } 5/3 + 2/3 = 7/6 !\dots$$

Selon le type d'erreur auquel on est confronté, les procédures de remédiation envisagées devront nécessairement être souvent très différentes. On peut envisager quelques ébauches de solutions possibles :

- dans le premier cas il faudra envisager une reconstruction de l'apprentissage qui permette d'affronter et de lever l'obstacle,
- dans le deuxième cas il faudra envisager un nouveau processus d'apprentissage qui ne conduise pas à cet obstacle,
- dans le troisième cas il faudra d'abord identifier la conception erronée puis reconstruire une connaissance correcte. L'agrandissement d'un puzzle, par exemple, permettra de mettre aisément en défaut la conception erronée.
- dans le quatrième cas il faudra relativiser l'importance de l'erreur et retravailler la définition de la tâche,
- dans le cinquième cas il faudra envisager une reconstruction du contrat qui n'engendre pas ce type de phénomène,
- le sixième cas enfin relève d'une gestion très fine et individualisée qui n'est pas facile à mettre en œuvre dans une classe.

#### **IV. 2. La théorie des champs conceptuels**

La didactique des mathématiques doit beaucoup à la théorie des champs conceptuel de Gérard Vergnaud (1991). Cette théorie se préoccupe de l'analyse des liaisons entre les

connaissances du point de vue de leur contenu conceptuel et montre, entre autres, que la formation des concepts dépend du traitement d'un ensemble de situations-clés, de tâches ou de problèmes diversifiés. La formation des concepts ne peut donc dépendre de la résolution de quelques problèmes de même style dans un temps prédéterminé ou, encore, se réduire à la maîtrise d'algorithmes, de procédures ou de formules. L'activité de conceptualisation est fonction des réalisations du sujet et procède d'une construction originale à partir des schèmes qu'il élabore, schème défini par Vergnaud comme étant une organisation invariante de la conduite pour une classe de situations donnée. Le concept de *représentation* est aussi fondamental pour comprendre la formation des connaissances. Ce concept ne peut toutefois être assimilé à quelque état statique formé d'images mentales auquel le sujet accéderait «après coup» une fois qu'il a agi sur le réel, pas plus qu'il ne peut être réduit au langage ou aux procédures utilisés. Ainsi comme le précise Vergnaud (1991), les représentations sont traduites par divers signifiants, tels le langage naturel, les gestes, les dessins et autres systèmes mais elles sont aussi structurées par des signifiés, tels les règles d'actions, les inférences, les prédictions ou les invariants opératoires implicites dans les conduites en situation. Le sujet forme et construit ses représentations dans ses interactions avec son environnement et les événements, en lien avec les objets, mais il est aussi influencé et guidé dans ses actions par de telles représentations.

Vergnaud (1991) a notamment éclairé les deux grandes classes de problèmes qui sont à la base de nombreux apprentissages en mathématiques : les structures additives et les structures multiplicatives. Dans ce cours, nous analyserons en détails ces deux structures.

#### **IV. 3. La théorie des situations**

La « théorie des situations » est l'une des théories fondamentales en didactique des mathématiques. On la doit à Guy Brousseau. Cette théorie distingue trois types de «situations» sur le plan des rapports que l'élève établit avec l'objet de savoir et le système éducatif :

- l'élève peut être placé en «**situation d'action**» par rapport au problème ou à la tâche, sans pour autant qu'il ait à s'expliquer ou à se questionner sur le sens de ses actions ;
- Il peut aussi être placé en «**situation de formulation**» et être amené à échanger avec ses pairs ou avec l'enseignant pour produire ses actions, et donc à utiliser le langage, sans qu'il lui soit pour autant nécessaire de les justifier ;

- Finalement, il peut être placé en «**situation de validation**», ce qui l'amène à produire des énoncés déclaratifs par rapport à son activité, énoncés dépassant le simple échange d'informations pour prendre la forme de jugements, de justifications ou d'auto-validation de son point de vue.

La théorie des situations prévoit une quatrième phase que Brousseau nomme phase d'institutionnalisation. Mais cette phase qui est si importante est du sort de l'enseignant beaucoup plus qu'elle est du sort de l'élève. Elle fixe entre autres ce qu'il faut retenir de la situation globale.

**Fonctions du savoir dans une situation  
 (d'après Guy Brousseau)**

<b>phase d'action</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• réussir la tâche en élaborant une connaissance " outil " qui permet d'agir, de prévoir, de décider ;</li> <li>• utiliser des savoir-faire contextualisés.</li> </ul>
<b>phase de formulation</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• permettre la formulation d'éléments de solution;</li> <li>• échanger des informations ;</li> </ul>
<b>phase de validation</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• permettre d'argumenter, de convaincre, de prouver ;</li> <li>• élaborer une " vérité " collectivement.</li> </ul>
<b>phase d'institutionnalisation</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• donner un statut social et scientifique à la connaissance ;</li> <li>• fixer les conventions, les notations.</li> <li>• pointer ce qu'il faut retenir.</li> </ul>



## **V. Les compétences indispensables pour les enseignants de l'école de base**

Les mutations continues que vit le monde aujourd'hui notamment dans le secteur éducatif amène les enseignants aujourd'hui, plus qu'il en été avant, à acquérir un certain nombre de compétences indispensables au bon accomplissement de leurs nouvelles missions.

Ceci ne devrait pas être compris dans le sens de faire table rase de ce qui déjà existe comme pratique. Au contraire, il faut valoriser et expliciter les pratiques existantes lorsqu'elles favorisent les compétences souhaitées ceci d'une part. D'autre part, il nous semble qu'il faut enrichir les connaissances des enseignants et définir certaines compétences pour eux, ce qui accroîtrait la dimension professionnelle de leur travail. Ceci les permettrait d'avoir un regard critique et constructif de certaines de leurs pratiques de classe.

### **V.1 Quelles compétences doivent acquérir les enseignants ?**

La première compétence disciplinaire dont doivent faire preuve tous les enseignants, quelle que soit l'orientation qu'ils ont choisie, est la maîtrise de la langue d'enseignement. Elle est la base de tout message d'enseignement et de tout processus d'apprentissage.

Loin de se limiter à la matière qui est au programme des élèves, les enseignants doivent avoir également une connaissance assez approfondie des concepts mathématiques enseignés. Ils doivent valoriser la dimension interdisciplinaire lors de la manipulation dans la classe de ces concepts.

La connaissance des disciplines doit absolument être reliée de celle des outils didactiques, spécifiques à la discipline ou au champ disciplinaire leur permettant, non seulement, de transmettre des connaissances, mais d'accompagner activement l'apprentissage de leurs élèves.

Poser un diagnostic rapide en situation scolaire, initier, gérer et réguler des situations d'apprentissage, choisir une méthode d'enseignement, planifier une action pédagogique sur une certaine durée, identifier les obstacles... sont autant de tâches qui demandent à l'enseignant un grand savoir pédagogique et didactique centré à la fois sur l'apprenant et sur le contenu disciplinaire. En tant que didacticien des mathématiques, Il nous semble alors que les cinq compétences suivantes sont indispensables pour les enseignants de l'école de base et notamment lorsqu'il s'agit d'enseigner un concept mathématique.

1. Maîtriser le savoir mathématique en jeu dans les différents niveaux du premier cycle de l'école de base ;
2. Maîtriser certains concepts de la didactique des mathématiques afin de guider l'action pédagogique ;
3. Concevoir des dispositifs d'enseignement, les tester, les évaluer et les réguler
4. Entretenir un rapport critique et autonome avec le savoir scientifique passé et à venir
5. Planifier, gérer et évaluer des situations d'apprentissage

Tout ceci n'exclut aucunement la nécessité de compléter cette formation par d'autres types de formation étant donné la complexité de la réalité de la classe.

Le travail de l'enseignant et notamment celui de l'école de base dans la classe avec ses élèves n'est en réalité et souvent que la partie visible d'un colossal iceberg dont l'activité des préparations et des corrections constitue la partie immergée.

Préparer les activités mathématiques pour ses élèves exige en fait la réponse aux questions suivantes :

- Quel compétence terminale vise cette leçon ? quels sont les socles de compétence en jeu qui permettent d'atteindre cette compétence terminale ?
- Comment relier le savoir mathématique passé avec le savoir à introduire ?
- Quelle (s) situation (s) didactique faut-il construire et mettre en place et quel dispositifs matériels faut-il utiliser?
- Comment tester, évaluer et éventuellement réguler la situation et les dispositifs prévus ?
- Comment gérer la situation ?
- Comment ne rien oublier ?
- Quelle part laisser à l'imprévu ?
- Comment gérer l'inattendu ?
- Comment évaluer les élèves en fonction des objectifs, préalablement fixés, de la leçon?

Le traitement de ces questions par rapport à un contenu mathématique bien déterminé se fait à deux niveaux : le premier se place avant le commencement de l'activité dans la classe et le deuxième se place au cours de l'activité avec les élèves dans la classe.

## **V.2 La partie cachée du travail de l'enseignant**

Il est clair que le travail de préparation des activités mathématiques par l'enseignant conditionne le succès du travail dans la classe. Ce travail se compose de plusieurs étapes qui respectent en général une certaine succession chronologique laquelle est adaptée aux besoins contextuels et au goût personnel de chaque enseignant.

### **1<sup>ère</sup> étape :**

#### **Consultation préalable du programme officiel :**

Cette étape permet, en fonction du niveau, de définir les grandes orientations de l'enseignement des notions mathématiques tout au long de l'année. Toutes les parties du programme doivent être étudiées au début de l'année scolaire.

### **2<sup>ème</sup> étape :**

Pour se lancer dans l'enseignement d'une notion mathématique à l'école, il suffit parfois dans un premier temps de partir d'une activité dont les élèves sont capables de faire en classe. Si cette immersion directe dans l'action paraît nécessaire, elle n'est cependant pas toujours suffisante. En effet, les activités mathématiques pendant le premier cycle de l'école de base par exemple ne se conçoivent pas indépendamment les unes des autres, faute de quoi, elles risquent d'avoir un impact limité auprès des élèves. Elles peuvent paraître suffisantes mais risquent d'être sans effet pour l'apprentissage à long terme.

La lecture des programmes officiels permet d'avoir une idée des grands domaines à aborder selon le niveau. Mais elle n'indique pas avec précision ce qui peut ou doit être fait à chaque leçon. Les manuels scolaires et les guides méthodologiques de l'enseignant constituent une aide précieuse que l'on peut suivre "à la lettre" quand on aborde ces programmes pour la première fois. Cependant, une fois l'enseignant se sent assez bien armé, il est préférable d'engager une démarche personnelle d'appropriation des notions mathématiques listées dans les programmes officiels. Un procédé qui pourrait être efficace consiste à recomposer les programmes : il s'agit en fait de retravailler le programme à sa façon. Ce travail personnel, qui n'est d'ailleurs pas aisé, permet d'une part de comprendre la logique d'avancement des programmes et d'autre part de se plonger dans les contenus de ces programmes. Il en résultera l'élaboration d'une progression personnelle que l'enseignant maîtrisera d'autant plus facilement qu'elle est le fruit de sa propre logique. Ainsi il sera plus aisément guidé dans le choix des situations d'apprentissage.

### **3<sup>ème</sup> étape :**

Cette étape consiste à bien définir les objectifs d'apprentissages que vise l'enseignant à travers la leçon à enseigner. Elle est d'une importance capitale car l'action de l'enseignant

dans sa classe doit être guidée par les finalités de ces objectifs. Pour bien définir ces objectifs l'enseignant a à se poser les questions-clés suivantes :

- Quels sont les contenus à faire construire ?
- Quels sont les savoir-faire à faire acquérir ?
- Quelles sont les démarches à travailler ?
- A quels obstacles risque-t-on d'être confronté ?
- Comment organiser la progression ?

#### **4<sup>ème</sup> étape :**

Une progression sur une notion comporte plusieurs étapes souvent nommées « séquences » et qui soient ordonnées. Le déroulement d'une séquence, au niveau de l'enseignement de base, nécessite selon les cas une ou plusieurs séances. On s'inspirera des programmes officiels, du guide méthodologique et éventuellement du manuel scolaire pour définir le contenu et le nombre de séquence à envisager pour l'enseignement d'une notion à un certain niveau d'enseignement.

L'ensemble de tous les objectifs des séquences qui composent la progression sur une notion bien particulière peut être consigné dans un tableau général qui sera enrichi tout au long de l'année. Il permettra ainsi de bien visualiser la cohérence des apprentissages tout en veillant à couvrir la totalité du programme.

#### **Etape 5 :**

Après avoir partagé l'enseignement d'une notion mathématique en séquences ordonnées, l'enseignant devrait se poser la question suivante et ce pour chaque séquence :

Qu'est-ce que les élèves ont besoin de connaître pour entrer dans la séquence d'apprentissage ?

En fait, les élèves arrivent dans une séquence d'apprentissage munis d'un certain bagage intellectuel et pratique. Voici quelques questions à se poser pour préparer les activités mathématiques:

- Qu'ont-ils besoin de connaître pour s'investir dans les activités proposées en classe?
- Qu'ont-ils déjà étudié?
- Que savent-ils déjà sur l'objet de la séquence?

Il est souhaitable parfois au début de la séquence d'apprentissage de procéder par un pré-test dans le but de recueillir les représentations initiales des élèves, afin de mieux adapter sa progression et son contenu. Cette étape n'est pas une perte de temps. En fait, les élèves ont

une expérience vécue du monde qui les entoure. Ils ont construit des représentations qui organisent et expliquent leurs actions. Certains faits les surprennent parce qu'ils ne s'intègrent pas dans leur système explicatif; d'autres faits sont considérés comme " allant de soi". Tout seul, l'élève ne parvient pas à sur-dépasser ces propres représentations. C'est en créant des situations didactiques adaptées qu'on l'aidera à construire une nouvelle représentation en adéquation avec le savoir mathématique.

### **Etape 6 :**

Il est certes que l'enseignant du premier cycle de l'école de base n'est pas un spécialiste en mathématiques, toutefois il devrait en savoir un peu plus que ses élèves. Il devrait savoir au moins le genre de questions qui peuvent se poser par ses élèves et savoir comment se documenter afin de trouver des éléments de réponse à ses questions. Les questions suivantes peuvent l'orienter dans ses réflexions :

- Qu'est-ce que je veux que mes élèves retiennent ?
- Que me faut-il savoir pour les aider et les guider ?
- Y a-t-il un ordre pour introduire les notions visées ?

Voici également quelques remarques qui semblent être fondamentales et qui pourront améliorer l'acte d'enseignement-apprentissage des mathématiques notamment au premier cycle de l'école de base :

- Le nombre de mots du lexique mathématique introduits à chaque séance doit être limité ;
- Définir un vocabulaire et s'y tenir est indispensable car un langage approximatif risque par la suite d'entraîner des confusions néfastes.
- Pour familiariser les élèves aux particularités du discours mathématique il est conseillé d'utiliser des constructions de phrases qui soient simples et qui permettent à l'élève de plonger sans beaucoup de difficultés dans l'univers particulier des mathématiques.

### **Etape 7 :**

Quel est le matériel nécessaire pour le travail envisagé en classe? De quoi dispose-t-on dans la classe ? Comment se procurer ce qui manque ?

Il est généralement facile de se procurer du matériel nécessaire. Souvent des adaptations, des modifications sont indispensables, pour tenir compte des ressources locales.

### **Etape 8 :**

La progression nécessite des choix; parmi de multiples cheminements possibles, il faudra choisir celui qui satisfait le mieux à un ensemble de contraintes plus ou moins maîtrisables. Etablir une progression revient en quelque sorte à construire un scénario pédagogique articulant les activités proposées aux élève.

Voici quelques questions que l'on peut utilement se poser à cette occasion:

- Combien de séances prévoit-on et de quelle durée chacune ?
- Quelles sont les compétences visées pour chaque séance?
- Comment s'articuleront les séances si l'on souhaite respecter une progression logique ?
- Quel situation mathématique faut-il mettre en place?
- Quelles sont les difficultés connues auxquelles les élèves risquent d'être confrontés?
- Comment faut-il organiser les débats dans la classe?

Concernant cette dernière question nous soulignons que les débats dans la classe ont pour rôle principal la permission à chacun des élèves à expliciter son point de vue. Ceci permet de faire ressortir les désaccords éventuels pour les résoudre si possible. Le débat en classe ne doit pas être fondé sur les bases du débat démocratique. En effet, ce n'est pas par un vote que se résout un conflit scientifique mais par l'adhésion à un point de vue commun, sur la base d'une argumentation reconnue comme valide.

Pour atteindre l'objectif final de la séquence, il est nécessaire de prévoir:

- Les connaissances à acquérir ;
- Les savoir-faire (différentes techniques, utilisation d'instruments, schématisation...)
- Les méthodes (formuler un problème, des hypothèses, observer, se documenter, identifier des variables...)
- L'attitude scientifique à développer tel que la curiosité (faculté de s'étonner devant un résultat), la vérification des résultats, la distinction entre les données et ce qui est demandé, l'efficacité (soin et qualité du travail, l'organisation et la gestion de l'espace, travail en groupe...).

### **Etape 9 :**

L'évaluation ne s'improvise pas. En fait, l'évaluation peut être faite "en situation d'action" ou par un contrôle écrit, en prenant soin de laisser aux enfants le temps d'apprendre. Tous n'ont pas le même rythme. L'évaluation sert à leur faire repérer leurs progrès ou leurs manques. Elle permet au maître d'ajuster sa progression, de revenir sur des méthodes ou

des contenus mal assimilés.

Si l'évaluation se prévoit à l'avance pour mieux définir les apprentissages visés, il est toujours nécessaire de l'adapter pour tenir compte de ce qui s'est passé dans la classe. Il est nécessaire aussi d'explicitier ce que l'on souhaite évaluer :

- l'attitude
- le comportement dans la classe, avec les autres élèves, à l'occasion de l'activité
- le savoir-faire
- les connaissances mathématiques
- les méthodes d'investigation...

### **V. 3 Le travail et le rôle de l'enseignant dans la classe**

Etant donné que les connaissances, pas plus que les compétences d'ailleurs, ne se transmettent pas par simple contamination et que la transmission des savoirs n'obéit pas à des règles simples (la logique d'exposition de l'enseignant n'est pas forcément la logique d'appropriation de l'élève), le rôle de l'enseignant consiste à créer les conditions nécessaires pour que les élèves ne soient pas des spectateurs passifs, mais qu'ils deviennent des acteurs à part entière, capables de construire leurs connaissances, de les organiser en leur donnant du sens. Pour faire son travail dans les meilleures conditions, l'enseignant est appelé à :

#### **a- Organiser la communication dans la classe :**

Si le professeur veut être médiateur entre la notion mathématique visée et ces élèves, il faut qu'il soit accepté en tant que tel par ces élèves. Or, pour les élèves, il est avant tout tenant et représentant du savoir. Il lui faudra donc s'efforcer d'être peu partisan, de prendre en compte les opinions de chacune des parties afin d'aboutir à les concilier ou encore en laissant aux élèves la possibilité de se tromper, de refaire, de reprendre un parcours, un raisonnement sans que cela n'entraîne des sanctions. Son rôle est alors, et avant tout, d'organiser la communication en apparaissant le moins possible comme partie prenante. Et cependant, il ne doit pas perdre de vue son objectif. Ainsi, l'enseignant est amené à organiser la communication entre les élèves. Il reprend, reformule, répète mais aussi distribue les rôles. L'élève n'est plus un simple observateur il doit être conscient de ce qu'il fait et pourquoi il le fait.

#### **b- Guider l'action des élèves :**

Guider l'action ne signifie pas "souffler la bonne réponse" et dire aux élèves ce qu'ils doivent faire, mais c'est faire en sorte que les activités des élèves soient organisées, suivies, productives, orientées vers un objectif maîtrisable.

Guider l'action, c'est proposer des situations d'exploration, c'est faire en sorte que la question d'un élève devienne celle de la classe.

Guider l'action, c'est faire également apprendre les élèves à questionner et à organiser leur action pour pouvoir proposer une réponse. Le passage d'une question initiale à une question opérationnelle demande un travail de reformulation. Ce travail nécessite un détour par une recherche d'informations, par une recherche des moyens disponibles pour essayer de répondre. Il s'agit d'apprendre à être scientifique, d'apprendre à ne pas se contenter de réponses dogmatiques mais à rechercher la compréhension de la construction de la réponse.

#### **c- Favoriser le travail en groupe :**

Le travail en groupe ne s'établit pas spontanément en classe. Le fait de travailler ensemble permet de confronter les idées, mais rend aussi parfois la gestion de la classe plus délicate pour l'enseignant. Il s'agit de favoriser les investigations, les échanges verbaux et procéduraux entre élèves, d'aider les élèves à émettre des hypothèses, à les tester, à observer, à expliquer en argumentant, à faire des recherches documentaires. Travailler en groupe exige de la part de chaque élève non seulement d'être capable d'exposer son point de vue en l'argumentant mais aussi d'être à l'écoute de l'autre.

Un travail en groupe d'élèves suppose une répartition des tâches entre eux et une distribution des rôles : par exemple, un secrétaire, un responsable du matériel, un communicateur ou rapporteur du groupe, un responsable des actions ou discussions que le groupe mène, etc.... Cette répartition responsabilise chaque élève à l'intérieur du groupe. Il faut tout de même que les rôles tournent à l'intérieur d'un groupe. Un travail en groupe n'implique pas les élèves de la même façon qu'un travail individuel. Ceci étant, ce type d'organisation et de travail n'est pas immédiat, car il est rare que tout se passe bien au début, mais en usant de persévérance et de patience, on finit normalement par obtenir des résultats satisfaisants.

#### **d- Organiser les Discussions**

A travers les discussions organisées dans la classe, les buts recherchés sont multiples et concernent tant des aspects sociaux que des aspects cognitifs. L'enseignant qui anime la discussion fait en sorte que les élèves parviennent à :

- 1° réfléchir sur ce qu'ils connaissent déjà et éventuellement à identifier ce qu'ils aimeraient savoir sur le sujet abordé ; ;
- 2° poser des questions ; ;
- 3° expliciter leurs hypothèses et explications ; ;
- 4° écouter les autres ; ;



5° communiquer et à argumenter. Cet exercice qui consiste à rendre sa pensée communicable permet à l'élève de la préciser et d'en maîtriser les différents aspects;  
6° échanger des arguments avec ceux des autres. Deux types de confrontations interviennent dans la classe : celles des idées des élèves à l'intérieur de chaque groupe et celle des idées de l'ensemble des groupes à l'intérieur de la classe, ce qui exige à chaque fois, de la part des uns et des autres, un effort de cohérence, de tolérance et de courtoisie;

En classe, le maître anime mais aussi participe à la discussion; il pose des questions aux élèves en les encourageant à faire des rapprochements et à constater par eux-mêmes la cohérence de ce qu'ils affirment.

Il aide les élèves à exprimer leurs idées et à découvrir eux-mêmes les mots adaptés à la situation décrite. Pour être solide, une connaissance doit être bien structurée et complète. Le flou, l'ambiguïté, le non-dit sont souvent sources d'erreur.

Il donne de l'importance à chaque intervention d'élèves, même si, à première vue, l'intervention semble éloignée du sujet (à condition qu'elle concerne un concept mathématique). Il ne faut pas se contenter de répondre à une question qui provient d'un élève, il faut se demander pourquoi cette question a été posée.

#### **e- Engager les élèves dans l'écriture personnelle :**

L'écrit personnel aide l'élève à structurer sa pensée. Lors du passage à l'écrit, l'élève s'interroge sur ce qu'il a fait et ce qu'il veut faire ; il analyse la chronologie des événements passés ou à prévoir. Ce passage à l'écrit peut lui permettre de se poser des questions initialement non prévues.

## **Deuxième partie**

Dans cette deuxième et dernière partie nous nous proposons d'exposer certains travaux et résultats menés dans le cadre de la didactique des mathématiques. Loin d'être exhaustive, cette partie traite certains concepts et notions mathématiques en jeu à l'école de base non du point de vue purement mathématique mais plutôt du point de vue de leur enseignement à un niveau bien déterminé. Ceci permettra de prendre du recul par rapport à certaines pratiques enseignantes existantes et pourrait expliquer certaines difficultés repérer parfois chez certains élèves. Ainsi, nous traiterons dans cette partie du statut de la définition dans la classe de mathématiques, de la résolution des problèmes mathématiques, de l'enseignement des décimaux, des particularités de la résolution des problèmes arithmétiques, des premiers apprentissage des nombres à l'école (les structures additives), des structures multiplicatives, de l'enseignement des fractions, de l'enseignement de la géométrie en général et de l'enseignement des notions d'aire et de périmètre en particulier.

## VI. Les définitions dans la classe de mathématiques

Le concept de contrat didactique, introduit par G.Brousseau en 1978, se présente comme les droits et les devoirs implicites des élèves et de l'enseignant à propos d'objets de savoir mathématique et paramathématique<sup>2</sup> enseignés. Parmi les objets paramathématiques en jeu dans l'activité mathématique apparaisse la notion de définition. Cette notion bien qu'elle puissent paraître transparente pour les uns ne manque pas de flou pour beaucoup d'élèves et notamment les novices, d'entre eux, à l'activité mathématique dans le cadre scolaire. Ainsi, émerge la question suivante : N'y a-t-il pas des implicites qui conditionnent l'apprentissage des définitions ?

Il semble qu'élèves et enseignants s'accordent souvent pour attribuer l'exclusivité du savoir à " l'enseignant de la classe ". De ce fait, seules les définitions données par le professeur sont valables, il faudrait donc les mémoriser au mot près pour bien apprendre. Dans cette optique il est inconcevable que l'élève participe à l'élaboration de la définition ou que le vocabulaire soit le sien. Doit-on connaître une définition ou doit-on se l'approprier ? Britt-Mari Bart (1993) regrette que l'on ait trop souvent une conception figée du savoir et que nos cours soient organisés en fonction des savoirs du professeur (des programmes) et non des réels savoirs des élèves.

La conception qu'ont souvent les élèves de la définition montrent qu'implicitement le contrat instauré dans la classe et notamment celle des mathématiques privilégie la mémorisation des définitions, plutôt que leur appropriation par les élèves. D'autre part, le travail de récitation est fréquent à l'école de base. C'est sans doute une des raisons pour lesquelles les enseignants trouvent du mal à déclencher une rupture avec ce fonctionnement. Le contrat didactique entre la classe et le professeur pourrait être " renégocié " afin d'aider les élèves à mieux intégrer les définitions dans leurs savoirs.

### Apprentissage des définitions

Poincaré (1908) écrit : " nous sommes dans une classe de 4<sup>ème</sup> ; le professeur dicte : le cercle est le lieu des points du plan qui sont à la même distance d'un point intérieur appelé centre. Le bon élève écrit cette phrase sur son cahier ; le mauvais élève y dessine des bonhommes ; mais ni l'un ni l'autre n'ont compris. Au moment où le professeur prend sa craie et trace un cercle sur le tableau, beaucoup d'élève et non moindre estiment qu'il

---

<sup>2</sup> Selon Chevallard (1985) « Les notions paramathématiques...ne font pas l'objet d'un enseignement : ce sont des objets de savoir « auxiliaires » nécessaires à l'enseignement (et à l'apprentissage) des objets mathématiques proprement dit. Ils doivent être « appris » (ou plutôt « connus »), mais ils ne sont pas « enseignés » (selon le plan d'enseignement) ».

complique la vie et qu'il aurait dû dire tout simplement qu'un cercle est un rond et là nous avons pu comprendre ces propos sans difficultés". De même, beaucoup d'élèves estiment que, par exemple, la définition de la médiatrice d'un segment qui se présente sous la forme suivante « c'est l'ensemble des points du plan qui sont à égal distance des deux extrémités du segment » n'est qu'une complication de la définition basée sur la perception à savoir que « c'est la droite qui coupe le segment en son milieu perpendiculairement »

Sans doute c'est le professeur qui a raison. La définition des élèves n'aurait rien valu puisqu'elle n'aurait pu servir à beaucoup de démonstrations d'une part, et puis surtout puisqu'elle n'aurait pu leur permettre d'analyser leurs conceptions spontanées. Mais il faudrait leur montrer qu'ils ne comprennent pas ce qu'ils croient comprendre, les amener à se rendre compte de la grossièreté de leurs concepts primitifs.

Présenter des activités dans lesquelles il y a de simple raisonnements mais qui soient erronés, amener les élèves à détecter les erreurs, à "décortiquer" certaines définitions mathématiques, permet de mieux comprendre la signification de la définition. Une fois que le sens de chaque phrase mathématique est établi, il faut le comparer aux textes du cours et donc trouver les significations des définitions.

Ainsi, Pour qu'un élève s'approprie une définition, il doit faire un « effort d'analyse » et de lecture du texte de la définition. Etre capable de mener une lecture détaillée d'un texte ou d'une question est une compétence indispensable à chaque élève même à celui de l'école de base.

## VII. La résolution des problèmes mathématiques

Souvent, la difficulté avec les élèves provient de la consigne écrite, et non orale, car celle-ci peut être immédiatement reformulée. Il ne faut pas confondre consigne et énoncé du problème : la consigne contrairement à l'énoncé suppose un verbe d'action. Les actions nécessaires pour comprendre et exécuter une consigne sont :

### 1- Identifier la présence d'une consigne

L'identification de la consigne peut poser problème : l'élève doit la distinguer de l'énoncé lui-même, en s'appuyant en particulier sur la présence d'un verbe d'action, souvent à l'impératif ou à l'infinitif. Mais la consigne est parfois « cachée » sous une forme linguistique différente : phrase interrogative (Quelle est la nature du triangle ABC ?) , ou phrase déclarative (Vous montrerez que...). La consigne est même parfois à construire soi-même, dans des formulations telles que « Que pouvez-vous dire de la droite D ? »

### 2. Connaître le sens des mots

Le sens des mots peut poser problème pour beaucoup d'élèves. En effet, certains mots sont polysémiques, et sont utilisés dans une discipline dans un sens spécifique, tout à fait différent du sens courant ; par exemple en mathématiques : angle, surface, courbe...

Pour amener les élèves à bien distinguer le sens des mots, il est recommandé d'effectuer avec eux une compilation de phrases illustrant les différents sens d'un même mot ; exemple : « Quelle est la valeur de l'angle ABC », « Il faut que l'avion prenne davantage d'angle pour monter rapidement », « Je vais le photographe sous un autre angle »...

Les verbes d'action les plus courants dans les consignes doivent être étudiés. Ainsi, il semble intéressant de faire avec les élèves des relevés de verbes présents dans les consignes, s'entraîner systématiquement à exécuter une action donnée, retrouver la consigne qui a permis d'obtenir tel résultat, inventer des consignes à partir d'un énoncé, faire des tris de consignes...

### 3. Passer du lire au faire

Transformer le texte en acte n'est pas forcément évident. En effet, on peut distinguer, comme le souligne Alain Bentolila (1996), 3 attitudes fondamentales de lecture :

- Lire pour rêver, imaginer : roman, poésie...

Le texte impose évidemment un cadre, mais dans lequel le lecteur va aussi apporter ses visions propres ; le texte est un tremplin à l'imaginaire.

- Lire pour s'informer : textes informatifs, explicatifs, descriptifs, documentaires.

Il s'agit de mettre très précisément les données du texte en relation aussi précise que possible avec le monde réel ; l'interprétation personnelle est donc exclue.

- Lire pour faire : textes prescriptifs (modes d'emploi, fiches techniques, consignes).

Cette dernière attitude de lecture pose le problème de l'existence d'un lien entre l'acte de lecture et une action physique ou intellectuelle ordinairement détachée de la lecture. Même si l'élève sait parfaitement lire le texte de la consigne et en comprend tous les mots, même si d'autre part il est parfaitement capable d'exécuter les tâches demandées, il peut néanmoins ne pas faire suivre la lecture de la consigne de l'exécution de la tâche demandée. Ce lien est difficile à mettre en place, on doit apprendre à l'élève à le faire s'il est en difficulté.

#### Les types d'aide :

- Seul avec l'élève, lui demander de verbaliser ce qu'il lit, ce qu'il croit comprendre...

- Accompagner l'élève dans la lecture, la compréhension des mots, l'interprétation de la phrase, et surtout dans la réalisation de la consigne.

- Montrer à l'élève l'exécution de la consigne, c'est à dire faire à sa place, devant lui, en commentant les actions, leur enchaînement, leur sens.

### **Se représenter mentalement les opérations à faire, leur succession, la forme du résultat**

Il faut d'abord que la tâche à exécuter fasse sens pour l'élève, qu'il sache le but de l'activité (pour apprendre quoi ?).

Pour réaliser correctement une consigne, il importe que l'enfant ait une anticipation sur la forme du résultat, sur les opérations à réaliser, sur le matériel nécessaire. Tous ces aspects peuvent être l'objet d'un travail systématique : verbalisation, exercices d'appariement entre consigne et résultats etc.

## **VIII. Les particularités de la résolution des problèmes arithmétiques**

A l'école de base, les élèves sont souvent confrontés à des problèmes d'arithmétique à résoudre. Quelque que soit la nature de la situation, l'enseignant fait souvent le constat que certains élèves ne parviennent pas à résoudre le problème ou à surmonter le problème qui leur a été dévolu. Il peut alors faire le choix d'expliquer le "*comment faire*" ou bien de demander à un élève ayant réussi d'explicitation la procédure de résolution, ou le modèle implicite de l'action. Mais ce discours de l'enseignant ou de l'élève n'est pas toujours pertinent pour l'élève ayant échoué, et n'est pas toujours suivi d'apprentissage. L'enseignant peut alors décider de faire de la procédure de résolution l'objet de son enseignement : il met en place un enseignement visant l'apprentissage du "*comment faire pour*" afin d'aller plus loin qu'une simple explication.

L'apprentissage de la résolution de problèmes d'arithmétique fait de la résolution de problèmes un objet d'enseignement. L'enseignant faisant ce choix a donc pour objectif de faire acquérir des compétences permettant à l'élève de surmonter ses difficultés.

Mais faire de la résolution de problèmes un objet d'enseignement est-il pertinent ? Ce choix est-il une bonne réponse au problème de l'inefficacité de l'explicitation de la démarche à suivre ? Pourquoi l'explicitation de la procédure à suivre n'est pas toujours pertinente ? Quelles sont alors les conditions qui favorisent la pertinence de cette explicitation ?

### **VIII. 1 La procédure de résolution prise comme objet d'enseignement**

#### **VIII. 1. 1 L'apprentissage de la résolution de problèmes**

L'apprentissage de la résolution de problèmes est-il pertinent ? Avant de voir en quoi une telle pratique est intéressante ou non, on peut se demander quels phénomènes d'enseignement peuvent la légitimer.

Ainsi, dans un premier lieu, nous présenterons ce qui est nommé chez les didacticiens de mathématiques "*l'effet âge du capitaine*" qui accrédiata certaines conceptions sur l'enseignement comme cette volonté de réaliser un apprentissage à la résolution de problèmes et qui s'appuient sur une analyse du phénomène comme étant dû à un dysfonctionnement cognitif des élèves. Nous verrons que d'autres chercheurs s'opposent à cette analyse du phénomène qui s'expliquerait par un problème lié au contrat didactique.

### **VIII. 1. 2 L'effet âge du capitaine : dysfonctionnement cognitif ou problème de contrat didactique ?**

Le problème « âge du capitaine », est un problème classique en didactique des mathématiques : « *Un bateau transporte 20 vaches et 16 cochons. Quel est l'âge du capitaine ?* »

Une réponse à ce problème (qui d'ailleurs n'a pas de réponse), proposée à certains élèves de 7-8 ans dans le cadre scolaire est « *le capitaine a 36 ans* ».

Comment pouvons-nous alors expliquer cette erreur ? Faut-il y voir un dysfonctionnement cognitif chez ces élèves ? Ou bien faut-il chercher l'explication de cette étrange affaire, quelque part où la situation de passation du problème aurait une influence sur sa résolution ?

Plusieurs thèses vont ainsi s'opposer, certains prétendront que « *l'effet âge du capitaine* » pose le problème du dysfonctionnement cognitif de certains élèves, d'autres montreront que ce problème est lié au contrat didactique :

#### **A. « L'effet âge du capitaine »**

« *L'effet âge du capitaine* » se traduit par le fait que de nombreux élèves donnent une réponse à des problèmes insolubles, argumentant même parfois pour prouver la véracité de leur réponse.

Notons qu'un certain nombre de problèmes pourraient être considérés comme insolubles, mais pourtant, ils sont considérés comme admettant une solution par l'enseignant, et même par de nombreux élèves. Prenons par exemple le problème suivant : « *Un automobiliste fait le trajet Tunis / Bizerte soit 60 km. Il consomme 5 litres de super. Il fait ensuite le trajet Bizerte / Tabarka, soit 240 km. Combien a-t-il consommé de litres de super en tout ?* »

La réponse attendue est bien sûr 25 litres de super. Pourtant on est en droit d'accepter une réponse du style : « *c'est impossible car la voiture ne consomme pas la même quantité d'essence en montagne qu'en autoroute.* » Mais il est couramment admis que ce genre de problème a une réponse.

#### **B. L'effet âge du capitaine – Les différentes analyses**

Comment expliquer alors que certains élèves donnent des réponses à des problèmes insolubles par nature ? De nombreuses thèses tentent d'expliquer ce phénomène, nous nous limitons ici à présenter deux d'entre elles :



1° Le point de vue de l'équipe de l'IREM<sup>3</sup> de Grenoble

En 1979, l'équipe de l'IREM de Grenoble propose à des élèves âgés de 8 à 9 ans le problème de l'âge du capitaine. Les chercheurs ont alors pu observer que ceux-ci sont nombreux à chercher et à donner une réponse à ce problème insolvable. Ils ont alors conclu que ce phénomène était dû à un dysfonctionnement cognitif des élèves. Pourtant, à cette époque, les travaux de Guy Brousseau et d'Yves Chevallard permettaient d'expliquer ce phénomène comme un effet de contrat didactique

2° « L'effet âge du capitaine » : rupture du contrat didactique

Avant d'aborder l'explication du phénomène en se plaçant dans le champ de la didactique des mathématiques, nous proposons de définir rapidement ce qu'est « le contrat didactique » :

*« On appelle **contrat didactique**, l'ensemble des comportements de l'enseignant qui sont attendus de l'élève, et l'ensemble des comportements de l'élève qui sont attendus de l'enseignant. Ce contrat est l'ensemble des règles qui déterminent explicitement pour une petite part, mais surtout implicitement, ce que chaque partenaire de la relation didactique va avoir à gérer et dont il sera, d'une manière ou d'une autre, redevable devant l'autre » .*

A travers cette définition, on comprend que le contrat didactique est l'ensemble des attentes, des élèves et de l'enseignant, qui régie la relation didactique, et uniquement cette relation.

Afin de clarifier cette définition, nous proposons un exemple de situation dans laquelle un malentendu va naître entre un élève et son enseignant, malentendu directement lié au fonctionnement du contrat didactique.

L'extrait de la séquence qui suit a été mise en place en France par un enseignant stagiaire qui avait la classe depuis quelques semaines. Les élèves avaient pour tâche de ranger une série de nombres par ordre croissant : 38, 24, 49, 46, 51. Après un temps de recherche individuelle, il note la solution au tableau :

<b>L'enseignant</b>	<b>L=élève A</b>	<b>L=élève B</b>
<i>Pourquoi a-t-on mis 46 et 49 ? [sous entendu : dans cet ordre]</i>	<i>Parce que sinon ça aurait été trop facile s'il n'y avait eu que les autres !</i>	

<sup>3</sup> Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques.

<p>[D'un ton ferme] <i>Ce n'est pas ce qu'on te demande !...Alors ?</i> [A toute la classe]</p>	<p>[D'un ton timide] <i>Je ne sais pas...</i></p>	<p>Parce que 46 est plus petit que 49.</p>
<p><i>Très bien !</i> [il écrit le signe &lt; entre les deux nombres et poursuit sa correction].</p>		

Comment expliquer la réponse de l'élève A ? A-t-il répondu réellement de façon incongrue comme semble l'affirmer l'enseignant ?

En fait, il faut analyser cette situation d'évaluation en se plaçant dans le champ de la didactique : c'est une rupture du contrat didactique. En effet, cet exercice paraissait trop simple pour cet élève qui avait trouvé la bonne solution. La question de l'enseignant était alors trop évidente : « *il attendait sûrement une réponse autre que le simple fait de constater que 46 est plus petit que 49 !* » La réponse attendue ne correspondait pas à l'idée que se faisait cet élève de l'exigence implicite de l'enseignant. Nous sommes là confrontés à un problème de rupture du contrat didactique, que l'enseignant n'a pas analysé en tant que tel. Ainsi, et ce n'est pas propre seulement à l'activité scolaire mathématique, l'élève développe au fur et à mesure un certain nombre de règles implicites dans la classe qui peuvent gouverner ses actions et qu'on pourrait les rattacher au contrat didactique.

### **VIII. 2 Quelques règles implicites du contrat didactique**

Lorsqu'un élève est confronté à un énoncé de problème, selon le type d'enseignement auquel il est habitué, il considère certaines règles (ces règles ont été fixées par l'IREM de Besançon) :

- En mathématiques, un problème se résout en faisant des opérations. La tâche est de trouver la bonne opération et de la faire sans erreur. Par l'usage de certains petits mots, l'énoncé permet de deviner l'opération à faire.
- Les questions posées n'ont en général rien à voir avec la réalité quotidienne, même si elles font semblant par un habillage astucieux. En fait elles ne servent qu'à voir si les élèves ont compris.
- Pour résoudre un problème, il faut trouver les données dans l'énoncé. Toutes les données nécessaires doivent y figurer et il n'y en a pas de superflues.

- Les nombres sont simples, et les solutions doivent l'être aussi, sinon il est possible qu'on se soit trompé.
- De toute manière, il y a toujours une réponse à une question de mathématiques et l'enseignant la connaît. On doit donc toujours donner une réponse qui sera éventuellement corrigée.
- Si l'enseignant me demande de résoudre un problème, c'est que j'en suis capable.

### Remarque

Tous les contrats didactiques ne renferment pas forcément toutes ces règles énoncées : on peut en effet avoir affaire à un enseignant qui pose souvent des énoncés de problèmes insolubles, ou avec des données non pertinentes...

A la vue de ces différentes règles implicites et même s'il ne faut pas toutes les généraliser, une interrogation semble émerger : l'effet « *âge du capitaine* » ne pourrait-il pas s'expliquer par une rupture du contrat didactique ?

Les conditions de passation d'un énoncé de problème influencent directement ce que les élèves vont répondre, le statut des personnes donnant le problème, leurs propos... sont autant de variables qui rendent la situation fondamentalement différente aux yeux des élèves qui ne vont pas réagir de la même façon face à un problème arithmétique dans la classe de mathématique.

Comment l'élève réagit alors face à un problème insoluble du style « *l'âge du capitaine* » ? Soit il ne répond rien et pense alors ne pas être capable de répondre, soit il considère que le problème n'est pas soluble, soit il « calcule » une réponse. Une troisième réaction mérite d'être ici énoncée : parfois l'élève tente de justifier sa réponse. Ainsi, un élève pourrait donner l'âge du capitaine en se justifiant comme suit : « *il a acheté une vache à chaque anniversaire puis un cochon. Il a donc 36 ans* ». C'est « *une manière détournée et habile d'intervenir en manifestant à l'auteur du problème l'incomplétude de son texte.* »

Les solutions parfois surprenantes des élèves à un problème du style « *l'âge du capitaine* » ne proviendraient donc pas d'un dysfonctionnement de l'enseignement et encore moins d'un dysfonctionnement cognitif des élèves. Ce serait un problème de contrat didactique. En fait, « *l'âge du capitaine* » traduit l'effet d'une rupture de ce dernier : l'élève (selon le style de l'enseignant) ne s'attendait pas à avoir à résoudre un problème insoluble puisque « *ça ne fait pas partie du contrat didactique noué entre l'auteur d'un énoncé, un destinataire, dans un lieu social particulier, à propos d'un but déterminé* ».

## **IX. L'enseignement des décimaux au premier cycle de l'école de base**

Les nombres décimaux font l'objet d'un enseignement explicite dans le premier cycle de l'école de base. Ils sont enseignés sur plusieurs années. Les élèves et concernant ce thème sont appelés à maîtrisés entres autres :

- le passage d'une écriture à virgule à une écriture fractionnaire ;
- la comparaison de nombres décimaux ;
- les opération +, -, x, intervenants les nombres décimaux ;
- le rangement dans l'ordre et l'intercalation ainsi que le calcul des distances ;
- l'usage des décimaux lors de la résolution des problèmes

Or, beaucoup de travaux de didactique des mathématiques ont mis en évidence aujourd'hui un certains nombre de difficultés, chez les élèves, dans le maniement des nombres décimaux. Des difficultés qui trouvent leur origine dans des conceptions erronées dont les origines sont multiples Voici un certain nombre de conceptions erronées concernant les nombres décimaux :

- un nombre décimal est constitué par deux entiers séparés par une virgule ;
- Tout comme pour les entiers, un nombre décimal est d'autant plus grand qu'il a un plus grand nombre de chiffres;
- Tout comme les entiers naturel, multiplier fait toujours augmenter. En revanche, diviser fait toujours diminuer.

### **IX. 1 Comment explique t-on les difficultés d'apprentissage des nombres décimaux**

Les difficultés des élèves dans le maniement des nombres décimaux peuvent s'expliquer en termes d'obstacles. Nous traitons dans ce qui suit les obstacles de nature didactique ainsi que ceux de nature épistémologique.

#### **IX. 1. 1 Les obstacles didactiques**

En recourant exclusivement au recodage d'entiers pour introduire les décimaux, l'enseignement favorise l'idée que les décimaux sont constitués d'une partie entière et d'une partie fractionnaire qui se traitent comme des entiers. Par conséquent, il n'est pas surprenant que des enfants écrivent  $1,38 < 1,275$ . L'intercalation n'a pas également de sens pour les élèves, puisqu'ils croient travailler avec des entiers. Le recours au tableau décimal facilite les exercices de conversion d'unités de grandeurs, mais il présente l'inconvénient de masquer l'algèbre sous-jacente. En effet, la multiplication des nombres est compensée par la division de l'unité de mesure comme ci-après :

$$123,45 \text{ m} = 12345 \text{ cm}$$

La multiplication par 100 de 123,45 est compensée par la division de l'unité-mètre par 100. En introduisant les décimaux par les codages de points sur une droite (ordre lexicographique), la comparaison de décimaux est facilitée ainsi que le principe de l'intercalation indéfinie. Mais la liaison avec les opérations est difficile à établir.

Dans un article de Claude Comiti et Robert Neyret (1979), les auteurs ont proposé, et concernant les nombre décimaux, "quelques lignes directrices" permettant de questionner nos pratiques enseignantes :

- Les décimaux sont de nouveaux nombres. (...) Il faudrait abandonner la présentation à l'aide des mesures ou à l'aide des changements d'unités (...)
- Entre deux décimaux, on peut toujours en intercaler un autre. (...) L'emboîtement des différentes graduations devrait être un axe important de toute étude des décimaux. (...)
- L'ordre sur les décimaux n'est pas le même que celui des entiers. (...) Un travail minimum sur les fractions est nécessaire à un moment ou à un autre. (...)
- Les décimaux servent pour approcher d'autres nombres. (...)

### **IX. 1. 2 Les obstacles épistémologiques**

Grâce aux travaux de Guy Brousseau et Régine Douady, on explique actuellement les difficultés d'apprentissage sur les décimaux par un ensemble de facteurs :

- Les règles de fonctionnement des entiers ne peuvent être étendues aux décimaux. Elles ne sont pas supprimées pour autant, d'où instabilité pour les élèves. Par exemple, un entier est d'autant plus grand qu'il a un plus grand nombre de chiffres (faux pour les décimaux) ; multiplier augmente (parfois vrai, parfois faux pour les décimaux) ; diviser diminue (parfois vrai, parfois faux pour les décimaux).
- On peut facilement fabriquer une collection de 1000 à 3000 objets ; on peut la mettre à côté d'une collection de 3 objets, de 150 objets, etc. Il est très difficile de fabriquer en même temps des objets dont les mesures seraient 13; 13,5; 13,05; 1,035 (les grandeurs que nous utilisons de manière quotidienne ne permettent pas cette précision). Les décimaux sont une construction d'abord mentale et non physique.
- Les élèves utilisent des algorithmes qui sont performants pour tous les décimaux de la vie quotidienne, mètres et centimètres, mètres et kilomètres, grammes et kilogrammes, etc. : ce sont leurs pratiques sociales de référence, pour reprendre l'expression de J. L. Martinand. Ils traitent par exemple les mètres d'un côté et les

centimètres de l'autre, puis font les conversions. C'est aussi comme cela que sont traitées les opérations sur les durées exprimées en heures, minutes et secondes.

Ils généralisent et traitent séparément la partie entière et la partie décimale :

$0,3 \times 0,3 = 0,9$  (faux)  $0,3 \times 0,4 = 0,12$  (vrai)

Pour comparer des nombres décimaux, ils comparent d'abord la partie entière  $13,45 < 123,45$ . Mais à partie entière égale, ils comparent les parties décimales comme pour des entiers. L'étude de Robert Neyret (1991) montre que les élèves caractérisent souvent la partie décimale en utilisant le vocabulaire de la partie entière : dans  $13,475$ , 4 est pris assez souvent pour le chiffre des centaines. D'ailleurs la numération orale tant française qu'arabe dit : *treize virgule sept et treize virgule quatre cent soixante-quinze*. On comprend alors pourquoi tant d'enfants jugent  $13,7$  plus petit que  $13,475$ .

Les décimaux et les fractions font partie, mathématiquement, à un même champ conceptuel. La question qui s'impose est : Est-ce qu'il faut enseigner les décimaux avant les fractions (rationnels) ou l'inverse ? Depuis les années 70, on n'arrive pas à trancher sur la question en raison que les arguments invoquées par les uns et les autres n'étaient pas suffisamment convaincantes. Certains se demandent même si on pouvait inverser le cheminement qui a été celui de l'histoire des sciences : les propriétés des fractions comme rapports de grandeurs commensurables étaient connues au VI<sup>ème</sup> siècle avant J.C. ; alors qu'on date la "naissance" des décimaux près de 20 siècles plus tard. De notre part, nous estimons, en référence à plusieurs travaux de recherche en didactique des mathématiques sur la question, qu'il est bien de se référer à ces quelques règles.

- Il est inutile de travailler sur les décimaux si les propriétés de la numération sont "flottantes" pour des entiers : multiplier par 10, 100, 1000 ou par 20, 300, 4000, doit se faire sans erreur. De même, en calcul mental, la recherche des quotients et restes dans les divisions par 10, 100, 1000 doit être un exercice banal ; en calcul rapide écrit, celle des quotients et restes dans les divisions par 2, 5, 25, 50, 125, 250, etc...doit être conduite dans des temps "raisonnables".
- L'entraînement au calcul préalable de l'ordre de grandeur doit devenir réflexe :  $132 \times 42$  est proche de 5000. Cela servira également à contrôler des calculs du genre de  $47,5 - 12,923$  (erreur par alignement par le dernier chiffre à droite) ou  $128,453 - 3,7$  (erreur par soustraction séparée des parties entières et décimales).

- Le recours à la droite numérique doit utiliser à la fois le codage de points et le codage de longueurs, pour mettre en évidence la structure additive sous-jacente (et donc les mesures d'écart).
- On pourra travailler sur les "décimaux dans la vie sociale", car ils donneront des points de contrôle partiels pour les "vrais décimaux", mais ils présentent l'inconvénient d'assimiler les premiers décimaux rencontrés avec des entiers, source d'erreurs répétées. En parallèle, il sera indispensable d'aborder les divergences de points de vue entre la mesure (physique) et le calcul. Par exemple, quand on mesure la diagonale d'un carré (dessiné), le nombre obtenu est décimal ; quand on calcule la longueur de la diagonale d'un carré de 10 cm de côté, le nombre obtenu n'est pas un décimal, mais un irrationnel.

Dans ce qui suit nous résumons certaines des erreurs et représentations des élèves concernant les nombres décimaux et nous proposons par la suite certaines activités qui peuvent favoriser le dépassements de ces erreurs :

- **Le décimal est perçu comme un entier**

Ainsi, par exemple :

- il n'y a pas de décimal entre 2,46 et 2,47
- 3,6 est différent de 3,60
- 5,64 est le successeur de 5,63

- **Le décimal est perçu comme la juxtaposition de deux entiers**

Ainsi, par exemple :

- $7,21 > 7,4$  car 21 est plus grand que 4
- $2,6 \times 3,4 = 6,24$  ou  $15,7 + 12,6 = 27,13$

- **Règles erronées implicites pour la comparaison des décimaux**

Voici trois règles erronées qui fournissent parfois la bonne réponse pour comparer des nombres décimaux ayant la même partie entière :

**règle 1** Elle applique la règle de comparaison des entiers aux parties décimales considérées isolément.

**règle 2** Elle range les décimaux en ordre inverse de la longueur de leur partie décimale.

**règle 3** Le plus petit nombre est celui dont la première décimale est un zéro, les autres nombres étant rangés selon la règle 1.

**Exemple :** ranger dans l'ordre croissant les nombres : 4,249 - 4,3 - 4,06

Les trois règles amènent comme réponses :

**règle 1** :  $4,3 < 4,06 < 4,249$

**règle 2** :  $4,249 < 4,06 < 4,3$

**règle 3** :  $4,06 < 4,3 < 4,249$

\* La règle 1 donne la bonne réponse quand les parties décimales ont la même longueur.

\* Lorsque les règles 1 et 2 sont susceptibles d'être appliquées, elles sont contradictoires et l'une d'elles donne la bonne réponse.

\* La règle 3 donne toujours la bonne réponse lorsqu'elle est applicable.

Les élèves sont généralement capables de résoudre un problème portant sur la comparaison de deux nombres et commettent des erreurs lorsque la tâche porte sur des séries plus longues. Il semble donc important d'identifier les bonnes réponses correspondant à l'application de règles fausses afin de pouvoir agir sur la cause et construire des situations didactiques appropriées.

Des chercheurs en didactique des mathématiques ont proposé une épreuve permettant de mettre en évidence des modes de fonctionnement conduisant à des raisonnements erronés.

Il s'agit d'ordonner par ordre croissant cinq listes de nombres.

- \* un couple (deux décimaux de même partie entière)
- \* un triplet (trois décimaux de même partie entière)
- \* un quintuplet (cinq décimaux de même partie entière)
- \* une liste de cinq nombres composée d'un couple mêlé à un triplet
- \* une liste de dix nombres composée de : un couple, un triplet, un quintuplet.

## **IX. 2 Exemple d'Activités**

Ordonner des décimaux : exemple de fiche

**Les décimaux : exemple de fiche**

Non : .....

Prénom : .....

Classe : .....

Votre travail va consister à ordonner des nombres par ordre croissant, c'est-à-dire à les ranger **du plus petit au plus grand**.

Répondez aux questions dans l'ordre; ne revenez pas en arrière.

Ne vous servez pas de brouillon; écrivez sur la feuille.

Ne gomez pas; si vous vous êtes trompé, rayez et écrivez de nouveau.

-----



**Ordonnez par ordre croissant (du plus petit au plus grand) les cinq nombres :**

7,609 8,98 7,55 8,898 7,5

*Réponse :*

.....

**Ordonnez par ordre croissant (du plus petit au plus grand) les dix nombres :**

19,1 12,7 19,02 12,6 12,8 16,12 16,734 12,49 16,72 12,344

*Réponse :*

.....

**Ordonnez par ordre croissant (du plus petit au plus grand) les cinq nombres :**

15,5 15,078 15,379 15,41 15,069

*Réponse :*

.....

**Ordonnez par ordre croissant (du plus petit au plus grand) les deux nombres :**

17,2 17,23

*Réponse :*

.....

**Ordonnez par ordre croissant (du plus petit au plus grand) les trois nombres :**

18,65 18,8 18,067

*Réponse :*

.....

-----

### **Activités à propos de la multiplication des décimaux**

#### **Objectifs**

Réactiver quelques règles et leur donner du sens et pratiquer du calcul mental

#### **Thème**

Éliminer des résultats faux de produits en utilisant :

- \* un calcul approché
- \* le dernier chiffre
- \* le nombre de chiffres après la virgule

-----

### Séquence 1 – Présentation

Produit	Résultats			
30,5 x 19,9	0,565	606,95	60,95	570,4

Pour ce produit, voici quatre résultats et parmi ceux-ci figure la bonne réponse alors que les trois autres sont faux.

Sans poser d'opération et sans utiliser la calculatrice, il faut essayer de trouver le bon résultat et expliquer la méthode utilisée.

### Travail individuel ou par petits groupes

Produits	Résultats			
20,3 x 0,05	1,015	100,15	1 000,15	0,01015
0,006 x 28	0,0168	1,68	1,248	0,168
0,9 x 72	0,697	64,8	65,7	7,28
0,04 x 125	0,05	0,5	5	500
241 x 5,7	133,7	1 373,7	13 773,7	246,7

### Synthèse

Formulation de quelques règles proposées par les élèves

Pour éliminer ou choisir un résultat, je peux utiliser :

- \* un calcul approché (règle a)
- \* le dernier chiffre écrit (règle b)
- \* le nombre de chiffres après la virgule (règle c)

### Institutionnalisation

-----  
Par défaut - par excès

#### Les décimaux : par défaut - par excès

#### Savoir déterminer les valeurs approchées pour un produit

On veut calculer le produit des nombres 12,327 et 15,486.

Pour gagner du temps, on le fait sur une calculatrice.

1. Quel est le résultat affiché sur la calculatrice ?
2. Est-ce la valeur de ce produit est exacte? Pourquoi ?
3. Compléter le tableau des valeurs approchées

Par défaut		Par excès	
A la dizaine		A la dizaine	
A l'unité		A l'unité	
Au dixième		Au dixième	
Au centième		Au centième	
Au millième		Au millième	

**Trouver des arrondis :**

L'arrondi au dixième de 5,682 est :

L'arrondi au dixième de 14,981 est :

L'arrondi au centième de  $5,658 + 7,249$  est :

L'arrondi au millième du quotient de 5 par 3 est

L'arrondi au million de 14 238 529 est :

L'arrondi aux milliers de 54 837 est :

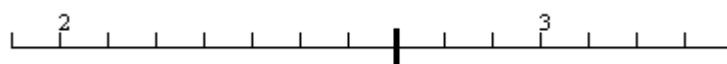
L'arrondi à la dizaine de 1 289,64 est :

-----  
Décimaux et droite graduée

**Décimaux et droite graduée**

**Activité 1**

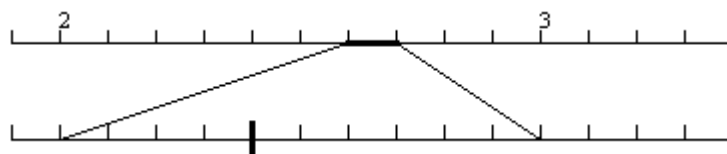
Quel est le nombre qui est associé au repère de la droite graduée ci-dessous ?



**Activité 2**

On a représenté un agrandissement local de la droite graduée ci-dessous.

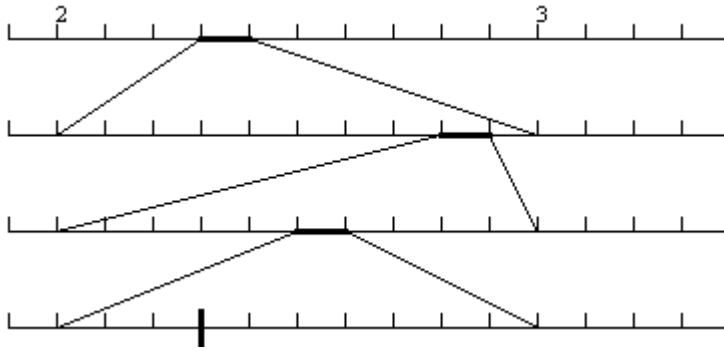
Quel est le nombre associé au repère de l'agrandissement ?



**Activité 3**

On a représenté plusieurs agrandissements locaux de la droite graduée ci-dessous.

Quel est le nombre associé au repère du dernier agrandissement ?



## **X. Les premiers apprentissage des nombres à l'école : Addition, soustraction et comparaison**

Dans ce chapitre on étudiera le développement de la compréhension d'un sens particulier des opérations d'addition et de soustraction. Nous nous intéressons plus particulièrement aux problèmes de comparaison. Ceci sera mis en évidence à partir de discussions entre une enseignante et les réflexions de trois enfants de 9 ans. Ces enfants ont été identifiées en difficulté d'apprentissage en mathématiques par leur enseignante. Ceci nous permettra d'améliorer notre compréhension du phénomène de l'apprentissage chez des élèves qui éprouvent des difficultés ceci d'une part et d'autre part, de donner les balises d'un accompagnement qui permettrait de faciliter le développement de la compréhension de ce type de problèmes. La théorie des champs conceptuels des structures additives (Vergnaud, 1991) sera un cadre d'analyse des difficultés rencontrées avec ces élèves.

Le champ conceptuel des structures additives intègre des situations qui impliquent une addition ou une soustraction. Le développement de la compréhension des situations d'ajout et de retrait d'éléments, de réunion et de complément d'ensembles et enfin de comparaison d'ensembles contribuent ainsi à l'élaboration de la compréhension des opérations d'addition et de soustraction.

### **X. 1 La résolution de problèmes - le cas des situations de comparaison d'ensembles**

Beaucoup d'études dont celles de Verschaffel (1994) et de Riley et Greeno (1988) précisent la difficulté des situations de comparaison. Contrairement aux problèmes qui sont habituellement présentées aux enfants, ceux-ci impliquent une situation statique, c'est-à-dire, dans laquelle n'intervient aucune transformation du type enlever, ajouter ou acheter. Trois formes différentes peuvent se présenter :

- Dans le premier cas, on demande de chercher **la différence** entre deux ensembles alors qu'on donne le nombre d'éléments pour chacun. Par exemple: *Tu as X autocollants. Ton ami a Y autocollants. Combien d'autocollants as-tu de plus (ou de moins) que ton ami?*
- Dans le deuxième cas, on cherche **l'ensemble comparé**. Ainsi, on propose: *Tu as X cartes de hockey. Ton ami a Y cartes de hockey de plus que toi. Combien ton ami a-t-il de cartes de hockey? Ou encore: Tu as X autos dans ta boîte à jouets. Ta voisine a Y autos de moins que toi. Combien ta voisine a-t-elle d'autos dans sa boîte à jouets?*

- Dans le troisième cas, on cherche **l'ensemble de référence**. On pourra présenter ce type de situation: *Tu as X billes. Tu as Y billes de plus que ton ami. Combien de billes ton ami a-t-il?* Ou encore: *Tu as X crayons de couleurs. Tu as Y crayons de couleurs de moins que ton professeur. Combien de crayons ton professeur a-t-il?*

## **X. 2 Un modèle de développement de la compréhension**

Herscovics et Bergeron (1989) ont réalisé une analyse du concept de l'addition.

Cette étude cherche à répondre à la question suivante: Quelles sont les représentations mentales et les procédures que trois enfants en difficulté d'apprentissage coordonnent pour construire leurs réflexions dans des situations de comparaison?

Chacune des élèves a été identifiée en difficulté en mathématiques par son enseignante, plus particulièrement en résolution de problèmes.

Les situations de comparaison ont été présentées verbalement. Toutefois, ces dernières étaient aussi écrites sur une carte que l'enfant pouvait consulter au besoin. Après avoir fait la lecture de la situation à l'enfant, ils ont proposé de lui demander de la raconter dans ses mots. Des jetons, des enveloppes, des bâtonnets et des élastiques étaient à la disposition de l'enfant afin qu'il puisse illustrer la situation et expliquer ses procédures. Voici les 6 situations de comparaison qui seront étudiées dans cette partie.

1. Tu as X autocollants. Ton ami a Y autocollants. Combien d'autocollants as-tu de plus que ton ami? (recherche d'une différence)
2. Tu cueilles X fleurs pour faire un bouquet. Ta voisine cueille Y fleurs. Combien ta voisine a-t-elle cueilli de fleurs de moins que toi? (recherche d'une différence)
3. Tu as X cartes de hockey. Ton ami a Y cartes de hockey de plus que toi. Combien ton ami a-t-il de cartes de hockey? (recherche de l'ensemble comparé)
4. Tu as X autos dans ta boîte à jouets. Ta voisine a Y autos de moins que toi. Combien ta voisine a-t-elle d'autos dans sa boîte à jouets? (recherche de l'ensemble comparé)
5. Tu as X billes. Tu as Y billes de plus que ton ami. Combien de billes ton ami a-t-il? (recherche de l'ensemble de référence)
6. Tu as X crayons de couleurs. Tu as Y crayons de couleurs de moins que ton professeur. Combien de crayons ton professeur a-t-il? (recherche de l'ensemble de référence)

## **Les résultats :**

### **X. 2. 1 Étude du cas de Karoline**

Karoline a 9 ans. Elle est en troisième année dans une classe régulière. Elle a repris une année scolaire. Ses habiletés de comptage sont rudimentaires. Sa compréhension de la l'écriture des nombres pose problème. Son enseignante souligne sa difficulté à résoudre des problèmes en classe, difficulté qui est présente depuis qu'elle est en première année. Elle a plutôt l'habitude de «mettre ensemble» les nombres d'un problème. Comme prévu, les premières rencontres ont porté sur des situations d'ajout et de retrait, de réunion et de complément. Ensuite des situations de comparaison ont été proposés.

#### Situation 1

**Tu as 24 autocollants. Ton ami a 8 autocollants. Combien d'autocollants as-tu de plus que ton ami?**

Karoline trouve d'abord 32 comme résultat. La représentation mentale initiale porte sur les nombres vus comme les représentants d'une quantité. Toutefois, à ce moment, la procédure privilégiée est la réunion. En effet, elle explique: «*Je vais faire 24 plus 8*». Elle ajoute: «*Cela fera 32 autocollants*». Un questionnement au sujet de l'ensemble le plus grand permet à Karoline d'intégrer la relation entre les données, à cette représentation mentale. Karoline utilise ensuite une nouvelle procédure: la correspondance terme à terme. La réflexion élaborée porte sur la notion de différence. Elle explique: «*Parce que j'ai 24 autocollants, puis pour qu'ils soient presque égaux, j'en ai fait 8 à 8*»... «*Puis après j'ai dit combien d'autocollants as-tu de plus que ton ami. J'ai dit 16*». La reconnaissance d'une différence amène à une procédure de dénombrement, ce qui permet de trouver une solution juste à savoir 16.

Toutefois, ce résultat est assimilé à un retrait. En effet, elle reconnaît les 16 autocollants qui restent, mais elle éprouve soudainement de la difficulté à s'exprimer. Elle raconte que les 16 autocollants sont ceux qu'elle garde, puis qu'elle a fait ça (enlever) pour savoir ce qui est égal. C'est la répétition de la question de départ, qui permet à Karoline de dire qu'elle a trouvé les 16 qu'elle a de plus que son ami.

*Une deuxième réflexion surgit au sujet du type de différence.* Elle joue avec les expressions «de plus» et «de moins», ce qui implique une capacité à changer de perspective. Cette flexibilité de la pensée est issue d'un retour vers une illustration de la situation et du dénombrement des éléments en plus. L'explication qui résume l'ensemble de sa démarche demeure confuse. La correspondance terme à terme suscite donc la résolution du problème. Lorsqu'elle doit expliquer pourquoi elle a utilisé cette procédure, on voit apparaître, une

confusion entre les situations de retrait et de comparaison et entre la relation de plus et de moins. *L'influence des situations plus familières de retrait est donc importante.*

### Situation 2

**Tu cueilles 14 fleurs pour faire un bouquet. Ta voisine cueille 8 fleurs. Combien ta voisine a-t-elle cueilli de fleurs de moins que toi?**

Cette deuxième situation de comparaison, où on cherche une différence en utilisant le mot «de moins», amène Karoline à illustrer la situation par deux ensembles. Elle trouve 6 comme résultat. Les représentations mentales initiales portent maintenant à la fois sur les quantités et la relation de comparaison, auxquelles Karoline coordonne d'abord une procédure de correspondance terme à terme, puis un dénombrement. En effet, elle forme un ensemble de 14 bâtonnets, puis un ensemble de 8 bâtonnets. Elle dénombre alors 8 des 14 bâtonnets de son ensemble et retrouve facilement les 6 fleurs que sa voisine a cueillies en moins. La réflexion qui surgit de cette coordination porte sur le sens du résultat obtenu. *Cette réflexion est d'abord assimilée au reste avant d'être vue comme une différence.* L'écriture de la phrase mathématique ne semble pas poser de problème. Il est à noter que l'opération de soustraction est peut-être plus facile à coordonner avec l'expression de la relation de moins. Notons cependant, qu'il peut y avoir ensuite une compréhension erronée lorsque l'expression «de plus» sera employée. La discussion qui a suivi a d'ailleurs informé les expérimentateurs à ce sujet.

### Situation 3

**Tu as 42 cartes de hockey. Ton ami a 12 cartes de hockey de plus que toi. Combien ton ami a-t-il de cartes de hockey?**

Devant cette troisième situation de comparaison, Karoline n'utilise pas de matériel. Elle écrit immédiatement la phrase mathématique. La représentation mentale initiale semble porter sur la relation «de plus». La procédure utilisée est l'algorithme traditionnel de l'addition. Elle écrit  $42+12=54$  en expliquant que si son ami a 12 de plus, elle doit faire un plus. Cette coordination n'a pas été questionnée, ce qui ne nous permet pas d'apprécier la réflexion qui a pu naître. Le type de recherche impliquée ne semble pas lui poser de problème. L'expression «de plus» semble induire l'opération à utiliser.

### Situation 4

**Tu as 54 autos dans ta boîte à jouets. Ta voisine a 42 autos de moins que toi. Combien ta voisine a-t-elle d'autos dans sa boîte à jouets?**

Cette situation amène immédiatement Karoline à réaliser une soustraction. La représentation mentale initiale porte sur les nombres et sur la relation «de moins». En effet,



elle raconte qu'elle a 54 autos et que son amie a 42 autos, puis 42 de moins qu'elle. Elle y coordonne une procédure de soustraction selon l'algorithme traditionnel. Elle écrit  $54 - 42 = 12$  autos. La réflexion qui émerge de la coordination, entre ces représentations mentales et l'opération de soustraction, porte sur le sens du résultat obtenu. *Karoline assimile le résultat à une différence, ce qui correspond aux situations précédentes.* Elle éprouve beaucoup de difficulté à concevoir que le résultat obtenu correspond à l'ensemble comparé. Ainsi, la solution est correcte, mais la réflexion sur l'interprétation du résultat est à construire. *Karoline est donc en mesure de réussir, mais sa compréhension de la situation et du résultat est encore rudimentaire.*

#### Situation 5

**Tu as 14 billes. Tu as 5 billes de plus que ton ami. Combien de billes ton ami a-t-il?**

Cette cinquième situation, où on cherche l'ensemble de référence avec l'opération de soustraction, implique une formulation inconsistante. Karoline croit que son ami a 5 billes. *La représentation mentale initiale est donc masquée par la formulation de la relation.* En effet, la relation exprimée est d'abord assimilée au cardinal du deuxième ensemble, ce qui correspond aux premières situations de comparaison. Un retour au nombre 14, représenté par un ensemble d'éléments, invite à une procédure de prélèvement. Cette procédure la confond. Elle ne sait pas exprimer son résultat. C'est par un retour à une illustration de deux ensembles de 14 que Karoline observe qu'elle a mis les ensembles égaux. De cette coordination surgit une comparaison, puis une soustraction. Elle peut montrer les 5 billes qu'elle a de plus. Elle écrit  $14 - 5 = 9$ , puis justifie la relation «de plus» en utilisant la relation «de moins». Le jeu de relation entre les expressions de plus et de moins lui permet une réflexion où intervient un changement de perspective. Son ami a 5 billes de moins qu'elle, parce qu'elle en a 5 de plus, explique-t-elle. Sa justification est claire, ce qui est nouveau. Elle exprime une capacité à changer de perspective et ainsi une flexibilité de sa pensée.

#### Situation 6

**Tu as 8 crayons de couleurs. Tu as 5 crayons de couleurs de moins que ton professeur. Combien de crayons a ton professeur?**

Karoline croit que son professeur a 5 crayons. Le jeu de relations entre les expressions «de plus et de moins» devient ici une réflexion sur laquelle doit s'élaborer une nouvelle procédure pour résoudre ce type de situation. La représentation mentale initiale assimile la relation «5 de moins» au cardinal du deuxième ensemble. Elle explique qu'elle a 8 crayons, son professeur en a 5. La difficulté semble provenir du fait qu'elle doit à la fois s'appuyer sur une interprétation souple de l'expression utilisée et ajouter des éléments à un des

ensembles. En effet, cet ajout d'objets ne vient d'aucun des deux ensembles connus. En utilisant la relation «de plus», l'enseignante lui permet de résoudre le problème. Karoline reconnaît d'abord qu'elle a «3 de plus», puis que son professeur a «plus de crayons», mais elle ne change pas tout de suite son illustration. Elle montre toujours les 5 crayons de son professeur. Elle construit une nouvelle réflexion au moment où elle doit décider ce qu'il faut faire pour que son professeur en ait un, deux... de plus ainsi de suite. L'explication demeurera confuse, mais l'écriture de la phrase mathématique est correcte. Karoline écrit ensuite  $8-5=3$ .

## **X. 2. 2 Étude de cas de Karine**

Karine est en troisième année. Elle lui arrive de sauter des nombres. Elle lit et écrit des nombres sans problème. Elle illustre les nombres et reconnaît l'invariance de la quantité par rapport à la disposition. Elle peut représenter les nombres de différentes façons. Elle éprouve toutefois des difficultés à résoudre des problèmes qui impliquent l'addition et la soustraction, plus particulièrement dans les cas où apparaissent des termes manquants.

### Situation 1

**Tu décides d'aller te chercher 33 autocollants. Toi, tu en as 33 et ton ami en a 17. Montre-moi les autocollants que tu as en plus. Qu'est-ce que tu peux faire pour me montrer les autocollants que toi tu as de plus?**

Cette situation a été présentée en deux étapes. Une première qui s'arrête à l'illustration des deux ensembles, une deuxième, qui pose la question au sujet de la différence. Cela amène Karine à se concentrer sur les nombres 33 et 17. Ce n'est que par la suite qu'on attire son attention sur la relation entre les nombres. Ainsi, inévitablement, sa représentation mentale initiale porte sur les nombres. Ces derniers représentent bien des quantités. Des arrêts fréquents, causés par une difficulté dans ses habiletés de comptage, interviennent. En effet, elle compte 2, 4, 6, 8, 10, 12, 13, sans se rendre compte de la modification apportée à la régularité du comptage par deux.

En comparant ensuite les nombres 17 et 33, Karine est incapable de jouer avec la relation «de plus». On propose des nombres plus petits. La comparaison entre la «grandeur» des nombres, déjà utilisée, mène vers une comparaison de la «longueur» des rangées, ce qui est curieux compte tenu de sa compréhension de l'invariance du nombre par rapport à la disposition des éléments. Elle échoue, donc, dans un premier temps, à établir une correspondance terme à terme.

L'expérimentateur tente de susciter une nouvelle représentation mentale, sur la relation entre les ensembles, en l'invitant à comparer qualitativement les deux ensembles pour

retrouver le plus grand. Karine retranche alors 7 jetons de l'ensemble de 13 et trouve les 6 jetons. À partir de cette procédure, elle trouve une solution satisfaisante. Toutefois, aucune réflexion sur la notion de différence n'émerge.

### Situation 2

**Maintenant, j'veais te demander de prendre 14 fleurs pour toi et ton frère lui, il va en avoir 8. Combien ton frère en a cueilli de moins que toi?**

À nouveau, le problème de recherche de la différence n'est pas posé immédiatement. La présentation de cette situation se réalise donc en deux étapes. Karine fait un ensemble de 14 et un autre de 8. Elle sépare 8 jetons parmi les 14 du premier ensemble, pour trouver 6. Ainsi, sa représentation mentale initiale porte sur les nombres. Ceux-ci sont illustrés par des jetons, ce qui est la manifestation d'une compréhension du nombre comme étant le représentant d'une quantité. La correspondance terme à terme est établie. La réflexion de Karine porte ensuite sur l'association entre un ensemble et un des acteurs de la situation, sans pour autant porter sur la notion de «différence» entre la quantité de fleurs de son frère et la sienne. *«Parce que, ben mon frère en a cueilli huit... J'ai cueilli quatorze puis j'ai perdu huit fleurs... J'les ai données... À ma mère... Puis, y m'restait six fleurs»*. Sans une réflexion sur la différence, le résultat obtenu demeure assimilé à une situation de retrait, ce qui pourrait expliquer la difficulté à dénombrer ce qu'il y a «en plus». La relation «de plus» ne peut servir d'appui à la construction de la relation «de moins». Pour Karine, les 6 fleurs cueillies en plus ne correspondent pas aux 6 fleurs cueillies en moins de son frère. En effet, les 6 fleurs cueillies en moins «sont invisibles», dit-elle. Sans la relation «de plus», cet «invisible», cette négation, comme dirait Piaget (1978) ne s'élabore pas.

D'autre part, les expérimentateurs ont posé l'hypothèse de l'influence de l'aspect affectif. En effet, Karine a-t-elle l'habitude de partager également avec son frère? Cela pourrait-il influencer sa compréhension de cette situation?

### Situation 3

**Tu as 28 cartes de hockey. Ton cousin a 5 cartes de hockey de plus que toi. Combien ton cousin a de cartes de hockey? Avant de tout commencer, d'après toi, qui a le plus de cartes de hockey?**

Karine trouve 34. La représentation mentale initiale semble s'appuyer sur les nombres et la relation «de plus» et ce, malgré le problème de dénombrement. La procédure de dénombrement (2, 4, 6, ... 30, 32, 34) et ses habiletés de calcul mental semblent la source de l'erreur observée ( $28+5=34$  et  $28+6=44$ ). En effet, Karine ne modifie pas la régularité du comptage par deux et termine avec le nombre 34. D'autre part, il est possible que,

sachant que le résultat doit donner 4 à la position des unités, l'écriture de la phrase mathématique l'amène à ajouter 6 plutôt que 5.

À la suite de ces erreurs, Karine pose pour la première fois une réflexion sur la relation entre «de plus» et «de moins». En effet, elle affirme qu'elle a 6 cartes de moins que son cousin, ce qui correspond à un changement de perspective. Si cette réflexion sur le type de relation avait eu lieu avant, aurait-elle commencé son dénombrement à 2 ou à 28? L'influence de ses erreurs occasionnelles de dénombrement et de ses connaissances sur le calcul mental semblent avoir une grande influence dans l'élaboration d'une solution et d'une compréhension de la situation de comparaison.

#### Situation 4

**Tu as 25 autos dans ta boîte à jouets. Ta sœur a 8 autos de moins que toi. On veut savoir combien ta sœur a d'autos dans sa boîte à jouets. Alors, qui a le plus d'autos?**

Karine reconnaît qu'elle a plus d'autos. Elle forme un ensemble de 25 jetons sur la table, puis un deuxième de 8 jetons. Karine sépare l'ensemble de 25 en deux sous-ensembles, l'un de 8 et l'autre de 17. Elle ne sait pas comment exprimer son résultat. Les représentations mentales initiales portent sur les nombres, vus comme les représentants d'une quantité. Dans un premier temps, la relation en jeu est assimilée au cardinal du deuxième ensemble. C'est le prélèvement de 8 jetons sur l'ensemble de 25 qui permet de trouver une solution au problème. Toutefois, cette procédure ne permet pas d'introduire la correspondance terme à terme, pour réfléchir sur la différence entre les deux ensembles et asseoir les expressions «de plus et de moins». L'expression «de moins» demeure assimilée à une situation de retrait, ce qui limite l'élaboration d'une nouvelle réflexion.

En proposant le nombre 4 et la relation 3 de moins, Karine assimile toujours l'expression «3 de moins» au cardinal du deuxième ensemble. Une réflexion sur l'écart entre l'état et le type de relation semble susciter une compréhension de la relation «de plus», puis une compréhension de la relation «de moins». L'enseignante demande: *Enlève-moi des jetons pour que toi tu en aies «3 de plus» que moi.* La manipulation est laborieuse, mais Karine arrive à reconnaître que l'enseignante a 3 jetons en moins et que simultanément, elle a 1 jeton.

#### Situation 5

**Tu as 14 billes. Tu as 5 de plus que ton ami. Combien de billes a ton ami?**

Karine trouve 9, mais ne peut interpréter ce résultat. La représentation mentale initiale s'appuie sur le nombre 14 et la relation qualitative «de plus». Karine reprend la procédure de prélèvement et compte les 5 jetons qui restent. «... j'ai compté là. J'ai commencé ici.

*Une, deux, trois, quatre, cinq. Ça faisait cinq. C'est ceux-là. Puis, j'ai enlevé les autres, puis ça faisait neuf*». Karine pose ensuite une réflexion sur l'expression «de plus». *Un jeu de déplacement des 5 jetons de plus, d'un ensemble vers l'autre, semble lui permettre de changer de perspective*. En effet, à la suite de ce transfert d'un ensemble à l'autre de 5 jetons, elle reconnaît que si elle a 5 de plus, cela implique que son ami a 5 de moins.

#### Situation 6

**Tu as 8 crayons de couleur. Tu en as cinq de moins que ton professeur. Peux-tu me trouver combien ton professeur a de crayons?**

La préoccupation de Karine, lorsqu'elle vérifie les nombres et les relations en jeu, laisse croire que sa représentation mentale s'appuie tant sur les nombres que sur la relation en jeu. Elle établit une correspondance terme terme, ce qui lui permet de montrer ensuite ce qu'elle a en moins. Même si la relation «de plus et de moins» est amenée, on se rend compte qu'elle ne s'appuie pas sur une coordination entre représentation mentale et procédure. *Elle semble s'appuyer plutôt sur la notion de contraire*. En utilisant la relation de plus, l'enseignante induit l'opération à utiliser pour représenter ce qui a été manipulé. Karine écrit  $8+5=13$ . Pour montrer ce qu'elle a. Elle écrit ensuite  $13-5=8$ .

### **X. 2. 3 Étude du cas de Marijo**

L'entrevue d'évaluation a permis de voir apparaître des difficultés dans les habiletés de comptage. En effet, Marijo ne peut réciter les nombres plus grands que 38. Elle éprouve des difficultés à écrire des nombres. Enfin, le plus souvent, elle met ensemble les nombres d'un problème donné, sans égard aux relations présentes. Nous présentons ici les 4 premières situations proposées à Marijo.

#### Situation 1

**Tu as 13 autocollants. Ton ami Maxime en a 7. Combien d'autocollants as-tu de plus que Maxime?**

Marijo s'exclame aussitôt: 13. La représentation mentale initiale de Marijo s'appuie sur les nombres, vus comme les représentants de quantité. *Toutefois, c'est au moment où Marijo illustre les deux ensembles qu'une nouvelle compréhension surgit*. En effet, cette illustration l'amène à comparer la quantité de jetons, qui est la même dans les deux ensembles, puis à dénombrer ce qui reste. Elle semble alors élaborer une réflexion au sujet de la relation «de plus», réflexion issue d'une coordination entre l'illustration des ensembles et sa procédure de comparaison terme à terme. Afin d'écrire ce qu'elle vient de faire, elle écrit le nombre 13, puis le nombre 7. L'expérimentateur la sollicite à inscrire un «signe» entre les deux nombres. Elle inscrit - entre les nombres.

### Situation 2

**Tu cueilles 14 fleurs. Ton frère a cueilli 8 fleurs. Combien ton frère a cueilli de fleurs de moins que toi?**

Marijo répond immédiatement: 8. La représentation mentale initiale porte sur les nombres. Chacun de ces nombres est vu comme le cardinal d'un ensemble. C'est l'illustration, qui est sollicitée par le dessin, qui permet à Marijo de se préoccuper de la relation entre les ensembles. Un rappel des procédures déjà utilisée l'amène à comparer 8 éléments des deux ensembles. Sans que la réflexion au sujet de la «différence» ne soit explicite, on peut observer son apport puisque c'est à partir de ce moment que Marijo dénombre le reste. Marijo identifie la quantité de fleurs de chacun, sans faire intervenir la relation. Elle écrit ensuite  $14-6=8$ .

### Situation 3

**Tu as 18 cartes de hockey. Ton cousin a 5 cartes de plus que toi. Combien de cartes de hockey ton cousin a-t-il?**

Il est intéressant de constater que Marijo prend conscience de la différence entre les situations déjà proposées et celle-ci. Elle s'exclame: «*Mais là, ne ne sait pas combien il en avait*». En effet, c'est la première fois que la relation de comparaison ne s'appuie pas sur le cardinal de chacun des ensembles. En s'appuyant sur une représentation mentale du nombre et de la relation en jeu, elle utilise une procédure de dénombrement et trouve une solution satisfaisante. La réflexion semble porter sur la relation, puisqu'elle a dit que son cousin a «23 de plus». *Un retour sur la coordination réalisée paraît suffisante pour ajuster cette réflexion à la situation (le nombre 23 correspond à la quantité de son cousin)*. Marijo écrit ensuite  $18+5=23$ , qu'elle vérifie en récitant les nombres de 18 à 23.

### Situation 4

**Tu as 15 autos dans ta boîte à jouets. Ton frère a 8 autos de moins que toi. Combien ton frère a-t-il d'autos?**

La représentation mentale initiale porte sur les nombres. Ces derniers représentent bien des quantités. La relation n'intervient qu'à la suite d'une relecture. La compréhension intuitive, selon laquelle elle a plus d'autos, permet de voir apparaître des procédures de dénombrement. Toutefois, le prélèvement de 8 parmi 15 crée une confusion avec une situation de retrait. En enlevant 8 jetons de l'ensemble de 15, elle a 7 autos et son frère en a 8. Aucune nouvelle réflexion n'émerge du dénombrement de ce que les deux enfants ont «de pareil». Il semble qu'il soit nécessaire, pour Marijo, d'être familière avec l'expression

«de plus» pour travailler avec la relation de moins, ce qui n'est pas le cas. Elle écrit ensuite  $15-8=7$ .

### **X. 3 Discussion**

#### **X. 3. 1 Comment s'élabore la compréhension des élèves rencontrés**

Durant toutes les situations, les représentations mentales initiales des enfants se sont appuyées sur le nombre, vu comme le représentant d'une quantité. En effet, à aucun moment, les enfants n'ont traité ces nombres comme des objets physiques à mettre ensemble. Nous constatons l'importance de la prise en compte de la relation «de plus ou de moins» à l'intérieur des représentations mentales initiales.

Au moment où l'expérimentateur attire l'attention des enfants vers une évaluation qualitative des ensembles, de nouvelles procédures émergent. Ce contact, avec une compréhension qualitative (*qui a le plus?*) initie l'établissement d'une correspondance terme à terme, une coordination qui peut être qualifiée de structuration des connaissances généralisables à d'autres situations. En identifiant l'ensemble le plus grand, sans pour autant savoir «de combien», les élèves prennent conscience, implicitement ou explicitement, d'une différence entre les ensembles. La prise de conscience de cette différence les amène à dénombrer ce qui reste. Une nouvelle coordination entre la notion de différence et le dénombrement de ce qui reste suscite une nouvelle structuration généralisable. Par exemple, Karoline reconnaît l'implication de la relation amenée par l'expression «de plus».

#### **X. 3. 2 Les difficultés rencontrées par ces élèves**

Des confusions apparaissent, chez les élèves, certaines entre les expressions et les procédures impliquées dans les situations dynamiques. Ainsi, interpréter les nombres, comme étant tantôt le cardinal d'un ensemble tantôt la relation en jeu, pose problème. De plus, l'identification des éléments, qui sont en plus, et le prélèvement crée un glissement de sens. Ce glissement amène ensuite une difficulté à constater que reconnaître une différence entre des ensembles ne signifie pas enlever, donner ou prêter. L'interprétation à donner au résultat obtenu (reste ou différence, reste ou cardinal d'un des ensembles) est importante à préciser. Sans un questionnement sur la nature du résultat obtenu, le problème peut être résolu, mais n'est pas pour autant compris.

Une structuration particulière entre des connaissances est apparue. Même si la représentation mentale initiale porte sur les nombres, vus comme les représentants d'une quantité, une comparaison entre «la grandeur» des nombres amène à comparer «la longueur» de deux ensembles. Cette comparaison, issue essentiellement des procédures de séparation et de prélèvement, permet de résoudre le problème sans nécessairement réfléchir

sur la relation en jeu. Le prélèvement des éléments qui sont «en plus» semble aussi provoquer un glissement de sens. L'expérimentateur conclut que, dans le cas de problèmes de comparaison, l'absence d'un des ensembles à comparer peut nuire au développement d'une compréhension, sans pour autant empêcher la résolution du problème posé.

Enfin, il est à noter que certaines manipulations semblent permettre de développer une compréhension «langagière» des expressions utilisées. Une telle compréhension ne signifie pas, toutefois, qu'il s'agit d'une compréhension logique.

#### **X. 4 Les types de situation de comparaison**

Nous pouvons observer que, dans le cas où on demande de trouver *la différence* entre deux ensembles, les élèves doivent apprendre à interpréter le résultat comme une relation et non comme un état. Dans le cas, où on cherche **l'ensemble comparé**, il ne semble plus y avoir de difficulté. Le problème est résolu facilement. Toutefois, nous constatons que les enfants associent l'expression utilisée et l'opération arithmétique, sans nécessairement comprendre la relation en jeu. La difficulté particulière de ce type de situation redevient l'interprétation du résultat. En effet, ce résultat correspond maintenant au cardinal d'un des deux ensembles. Enfin, dans le dernier cas, on cherche **l'ensemble de référence**. Ici, il est nécessaire que les élèves aient développé une flexibilité de leur pensée leur permettant de changer de perspective au besoin. on peut aussi croire que ce type de situation crée la nécessité de réfléchir sur ce changement de perspective.

#### **IX. 5 Apport de ce type d'accompagnement**

Cette étude montre que la démarche d'apprentissage de ces élèves, se réalise grâce aux mêmes intuitions, aux mêmes procédures et aux mêmes réflexions que celles utilisées par un élève régulier. Toutefois, l'élève en difficulté a besoin d'un accompagnement particulier, puisque même en présence de cet accompagnement, des glissements surgissent sur l'interprétation des nombres, des procédures et du résultat obtenu. L'accompagnement offert exige donc une vigilance de la part de l'enseignant afin de laisser le temps à l'élève de s'approprier la situation, de le laisser expérimenter ses premières intuitions et de faire un choix judicieux des pistes à donner.



## **XI. Quelques réflexions sur les structures multiplicatives**

Dans ce chapitre nous essayerons d'exposer certains résultats concernant l'existence de modèles de représentation variés des structures multiplicatives chez de jeunes élèves (8-9ans) avant l'enseignement systématique de la multiplication en classe. Les analyses faites par les expérimentateurs font références à la théorie des situations (Brousseau, 1986) ainsi qu'à la théorie des champs conceptuels appliquée aux structures multiplicatives (Vergnaud, 1983, 1990).

Le champ conceptuel des structures multiplicatives est vaste et rejoint plusieurs classes de problèmes de niveaux de difficulté différents, susceptibles d'être résolus par une multiplication ou par une division. Trois formes de relations sont en cause dans de telles structures :

- La première forme, appelée «isomorphisme de mesures», implique quatre quantités, c'est-à-dire deux mesures de deux catégories différentes, et utilise deux types d'opérateurs, soit l'opérateur scalaire (sans dimension) ou l'opérateur fonction (exprimant un rapport).

Les problèmes suivants témoignent de cette première forme rencontrée au début de l'apprentissage de la multiplication:

- «*Sylvie a 3 paquets de gommes; il y a 5 gommes dans chaque paquet. Combien a-t-elle de gommes en tout?*» ou «*3 pelotes de laine pèsent 200 grammes. Il en faut 8 pour faire un pull. Quel est le poids du pull?*».

- La deuxième forme de problèmes porte sur le produit de mesures
- La troisième forme porte sur les proportions multiples.

L'examen des différents problèmes multiplicatifs sous l'une ou l'autre des formes (2<sup>ème</sup>, 3<sup>ème</sup>) montre bien la diversité des calculs relationnels et la complexité des enjeux cognitifs en cause. L'une des difficultés assimilée selon Vergnaud à un véritable obstacle épistémologique, a trait au rejet du modèle exclusif de la multiplication comme addition itérée d'un même nombre, schème souvent invoqué par les enfants et suffisamment prégnant en début d'apprentissage scolaire.

### **Une étude expérimentale dans le cadre de la didactique des mathématiques concernant les structures multiplicative**

#### Les tâches

Plus d'une trentaine de tâches ou de problèmes, impliquant des relations multiplicatives de type «fois plus» et «fois moins» et de différents niveaux de complexité, ont été soumis à

des élèves français au cours de six séances. Le regroupement par «familles» de procédés de résolution aboutit au dégagement des divers modèles de représentation de la multiplication, modèles qu'il convient de présenter et d'illustrer.

### **XI. 1 Les modèles de représentation de la multiplication et les conduites sous-jacentes**

L'analyse des tâches ainsi que l'analyse des conduites effectives des sujets ont permis de répertorier et de classer les divers procédés de résolution utilisés et de dégager différents modèles de représentation des structures multiplicatives, modèles mettant en lumière les schèmes invoqués par les élèves.

Trois modèles de représentation sont identifiés:

- le modèle additif,
- le modèle mixte
- et le modèle multiplicatif.

Nous décrivons brièvement chacun d'eux pour ensuite les illustrer par quelques conduites d'élèves.

#### **X. 1. 1 Le modèle de représentation additif**

Dans l'étude, quelques élèves utilisent un *modèle additif* pour résoudre les problèmes de multiplication posés. Le sujet qui traite la relation multiplicative à partir d'un modèle additif est celui qui, dans les procédés qu'il endosse, considère la relation «fois plus» comme ayant la signification «de plus». Ce modèle est caractérisé par sa référence à l'ajout ou au retrait d'un nombre d'éléments équivalent à la valeur de la relation traitée et est basé sur la considération des éléments unitaires des collections qui correspond à la variable de rang «éléments». Le modèle de représentation additif est considéré dans l'étude comme étant le modèle le plus élémentaire en raison de la non-différenciation qui le caractérise de l'addition. Les élèves identifiés comme faibles dans l'étude font souvent référence à un tel modèle, bien que cela ne soit pas de façon exclusive.

Les illustrations qui suivent traduisent l'utilisation du modèle de représentation additif.

##### Cas n° 1: Simon (séance 1)

#### **Problème**

Dans un environnement papier-crayon, on demande au sujet d'illustrer *3 fois plus*. La relation est écrite sur une bande de papier et la consigne suivante est formulée à haute voix: «*fais un dessin qui explique ce qui est écrit, qui montre qu'il y a 3 fois plus*».

#### **Description de la réponse**

Simon trace deux cercles identifiés par A et par B, dessine 19 étoiles dans le cercle A et 21 dans le cercle B. Invité par l'expérimentateur à justifier son illustration devant les autres

enfants, il dit: «*c'est 2 fois plus*»? , «*... fois plus veut dire de plus*». Confronté par un élève qui lui fait remarquer que c'est seulement «2 de plus» qu'il a illustré, Simon dit que «*... c'est 3 fois plus*». Il récite alors la comptine des nombres «19-20-21» en marquant bien chaque nombre récité par un hochement de tête.

### **Interprétation**

En plus de l'affirmation de l'identité des relations «de plus» et «fois plus», ce qui montre le traitement additif du problème posé, le sujet attribue une valeur différente à la relation, soit 2 au lieu de 3. Il ne semble pas s'apercevoir qu'il affirme deux réponses différentes. La gestuelle qu'il déploie révèle que le procédé de comptage utilisé lors de la deuxième réponse est mis en cause dans la différence attribuée entre les collections, ce sujet comptant effectivement les chiffres récités lors de sa deuxième réponse. Une telle conduite, qui se produit fréquemment chez quelques élèves de 1<sup>ère</sup> année qui abordent les structures additives, semble pour le moins étonnante chez cet élève de 3<sup>ème</sup> année. L'expérimentateur souligne que cet élève persévéra dans ce modèle au cours des séances qui suivent même s'il endosse à quelques reprises un modèle mixte dans des tâches effectuées en collaboration, modèle qu'il utilise plus, paraît-il, par complaisance vis-à-vis d'un partenaire performant que par «conviction» cognitive.

### Cas n° 2: Mario (séance 2)

#### **Problème**

Dans un environnement informatique, Mario est invité à traiter la relation *3 fois plus*, inscrite en haut de l'écran en encadré, en apportant, s'il y a lieu, des modifications à la configuration existante qui se décrit comme suit: deux aquariums contenant 3 poissons chacun apparaissent à gauche de l'écran pour constituer une première collection; un autre aquarium contenant 3 poissons constitue une autre collection et apparaît à la droite de l'écran. La consigne suivante est donnée verbalement: «*regarde bien l'écran; tu dois arranger le dessin pour qu'il y ait 3 fois plus*».

#### **Description de la réponse**

Partant de la configuration proposée, Mario regroupe les six poissons de la première collection dans un seul aquarium (ce qui donne 6 poissons dans l'aquarium à gauche) et laisse la collection de droite telle quelle, soit l'aquarium qui contient 3 poissons. Il déclare «*Voilà, c'est trois fois plus ici*» en désignant l'aquarium de gauche.

#### **Interprétation**

Ce sujet applique le modèle de représentation additif de la multiplication en associant la relation (r) à la différence entre les collections. Pour lui, «fois plus» veut dire «de plus»

malgré le fait qu'il n'en fasse pas mention contrairement à Simon. Même s'il ne change rien à la valeur de la collection initiale de gauche en regroupant les poissons des deux aquariums, ce sujet semble plus à l'aise de traiter avec les éléments unitaires de la collection qu'avec les regroupements, ce qui illustre l'absence de centration sur les parties de la collection donnée.

### **XI. 1. 2 Le modèle de représentation mixte**

Selon l'expérimentateur le second modèle, le *modèle mixte*, constitue de loin le modèle le plus invoqué par la majorité des sujets de l'échantillon. L'élève qui se réfère à un tel modèle coordonne deux schèmes distincts sur le plan relationnel: il soutient d'abord la nécessité d'effectuer un groupement «pareil» ou équivalent dans les différentes collections puis, ensuite, d'ajouter ou de retrancher des éléments à l'une des collections selon la valeur attribuée à la relation.

Les illustrations qui suivent traduisent l'utilisation du modèle de représentation mixte.

#### Cas n° 3: Anita (séance 1)

##### **Problème**

Dans un environnement papier-crayon, on demande au sujet d'illustrer *2 fois moins*. La relation est écrite sur une bande de papier et la consigne suivante est formulée à haute voix: «*fais un dessin qui explique ce qui est écrit, qui montre qu'il y a 2 fois moins*».

##### **Description de la réponse**

Anita dessine deux ensembles A et B qui contiennent respectivement 30 et 10 ronds; elle inscrit le signe moins (-) entre les ensembles ainsi qu'une flèche allant de la collection la plus petite vers la plus grande en disant «... *je n'voulais pas que vous pensiez que c'était plus*». Invitée par l'expérimentateur à expliquer son dessin aux autres sujets, elle dit: «... *c'est moins parce que c'est 2 fois moins, et 10 c'est 2 fois moins que 30*», puis ajoute après un certain moment «... *pour que l'autre collection en ait 2 fois moins*».

##### **Interprétation**

Ce sujet applique un modèle mixte qui consacre, rappelons-le, une quantité égale (paquets et nombre d'unités dans chaque paquet) pour les deux collections puis attribue un nombre de paquets égal à la valeur de «r» à l'autre collection, en l'occurrence ici, 2 paquets de 10 à l'une des collections. Ce qui singularise la conduite d'Anita, c'est qu'elle associe la relation «fois plus» à des paquets et la relation «de plus» à des unités, ainsi qu'elle le dit explicitement et le démontre à quelques reprises au cours des séances; en outre, elle spécifie que les paquets doivent absolument contenir 10 éléments et jamais moins pour qu'ils aient le statut de paquets. Chez ce sujet, la notion de paquet est associée à la base de

regroupement «par 10» qui découle de sa connaissance du système décimal. On a là un bel exemple d'obstacle que le sujet devra franchir pour faire évoluer sa représentation de la multiplication; il devra abandonner une telle référence exclusive pour saisir que des paquets peuvent aussi contenir plus ou moins 10 éléments.

#### Cas n° 4: Guy et Sylvain en coopération (séance 2)

##### **Problème**

Ces deux sujets sont invités à illustrer, dans une tâche effectuée en coopération, la relation *3 fois plus*. Ils traitent la configuration suivante produite par un autre sujet: un aquarium contenant 6 poissons disposés en rangées de trois poissons est placé à gauche de l'écran et trois aquariums contenant chacun trois poissons sont placés à droite. La consigne suivante avait été formulée à haute voix au tout début de la tâche: *«vous travaillez ensemble et il faut que vous arrangiez le dessin pour qu'il explique ce qui est écrit, pour qu'il montre qu'il y a 3 fois plus»*.

##### **Description de la réponse (Guy)**

Guy travaille seul et procède ainsi pour l'application du modèle de représentation mixte: il regroupe d'abord les poissons de deux aquariums placés à droite (contenant chacun 3 poissons) dans un seul aquarium; puis, il l'élimine et le re-crée dans la collection de gauche. Ceci donne la nouvelle configuration suivante: 2 aquariums de 6 poissons chacun à gauche disposés en rangées de 3 poissons (total de 12 poissons) et 1 aquarium de 3 poissons à droite (total de 3 poissons). En désignant la deuxième rangée de trois poissons du premier aquarium de gauche, Guy dit: *«ici, il y a trois de plus»*; puis, désignant cette même rangée ainsi que les deux rangées de trois poissons du deuxième aquarium de la même collection (i.e. celle de gauche), il poursuit en affirmant: *«... il y a trois fois plus et  $3 \times 3 = 12$ »*.

##### **Description de la réponse (Sylvain)**

Partant de la configuration produite par Guy, Sylvain poursuit en éliminant d'abord 3 poissons du deuxième aquarium de gauche et en créant ensuite 3 poissons dans le premier aquarium (ce qui équivaut au transfert d'une quantité, dans les faits); cela donne la nouvelle configuration suivante: 9 poissons dans le premier aquarium et 3 dans le deuxième pour la collection de gauche (total de 12 poissons) et trois poissons dans l'unique aquarium de la collection de droite (total de 3 poissons). Aucune justification verbale n'est fournie.

##### **Interprétation**

Ces deux sujets appliquent un modèle de représentation mixte de la multiplication. Il est intéressant de remarquer que, même s'ils avaient été invités à travailler en collaboration pour la tâche, ceux-ci ont effectué une production individuelle l'un à la suite de l'autre.

Concernant le modèle utilisé, on voit bien qu'ils pensent déjà regroupements ou paquets «dans leur tête» même si les parties figuratives des collections ne comprennent pas le même nombre d'éléments. On remarque aussi qu'ils procèdent, après égalisation des quantités de paquets dans les collections, à l'ajout d'un nombre de paquets à l'une des collections. Ici, dans le problème, les deux sujets s'assurent de la présence d'un «paquet» d'éléments dans chacune des collections puis considèrent pour l'une d'entre elles « $r$ » paquets de « $r$ » éléments, le « $r$ » correspondant à la valeur de la relation proposée dans le libellé du problème, soit 3. La différence dans la manière d'arranger les collections chez Sylvain tient probablement au souci de marquer la symétrie entre les deux collections en soulignant visuellement l'équivalence par la présence d'un seul aquarium ou «paquet» ayant le même nombre d'éléments.

### **XI. 1. 3 Le modèle de représentation multiplicatif**

Quelques élèves résolvent les problèmes selon le modèle multiplicatif. Même s'il est difficile de parler, à l'examen des protocoles, d'une coordination franche des différentes variables de rang, l'expérimentateur pense que le recours à ce modèle renvoie au type de représentation qui précède la formation de la multiplication, c'est-à-dire à l'établissement de liaisons, si élémentaires soient-elles, par rapport aux emboîtements éléments-parties-tout, comme l'indique l'étude de Berthoud-Papandropoulou et Kilcher sur la notion d'associativité multiplicative. Il peut être intéressant d'observer les conduites d'Anita et de Sylvain dans l'application d'un tel modèle, élèves dont les productions ont été examinées plus haut pour l'application du modèle de représentation mixte.

Les illustrations qui suivent traduisent l'utilisation du modèle de représentation multiplicatif.

#### Cas n° 5: Anita (séance 3)

##### **Problème**

Dans un environnement informatique, Anita est invitée à traiter la relation *2 fois moins* en apportant des modifications à la configuration laissée par une autre élève qui devait résoudre individuellement le problème. Le libellé du problème se lit comme suit: «Jean a 2 fois moins de poires que Marie. Ensemble, ils ont 15 poires». La configuration produite sur l'écran présente deux personnages, Marie et Jean; la collection attribuée à Marie est composée de 2 plateaux contenant chacun 4 poires et de 1 plateau de 2 poires; la collection initiale attribuée à Jean comprend 1 plateau contenant 4 poires et 1 plateau contenant 1 poire. La consigne verbale suivante est donnée: «*lis bien le problème et regarde l'image à l'écran; tu dois arranger le dessin pour faire ce qui est écrit*».

### **Description de la réponse**

Anita intervient à partir d'une configuration produite par son amie qui, pour un même défi, avait attribué à Marie 1 plateau de 2 poires et, à Jean, 3 plateaux de 4 poires ainsi que 1 plateau de 1 poire. La configuration initiale du problème avait donc subi des transformations majeures et Anita ne conservait que le libellé du problème pour corriger cette production. Il faut préciser toutefois que le sujet précédent n'avait enlevé aucun élément au total d'éléments des deux collections bien qu'il les ait distribués différemment au sein de celles-ci; Anita était consciente de ce fait comme elle l'a signalé. Anita procède alors en transférant 2 plateaux de 4 poires à Marie qui possédait déjà, rappelons-le, 1 plateau de 2 poires (total de 10 fruits). La collection laissée à Jean consiste en 1 plateau de 4 poires et 1 plateau de 1 poire (total de 5 fruits). Par une gestuelle qui désigne, pour la collection de Marie, 1 plateau de 4 poires et 1 poire dans le plateau qui contient 2 poires, et ce à deux reprises, Anita dit «... *il faut compter autrement, c'est 1 fois, c'est 2 fois*».

### **Interprétation**

Le sujet applique un modèle multiplicatif; sa gestuelle ainsi que ses propos indiquent bien qu'il considère les éléments, les parties et le tout, même si l'arrangement final ne rend pas compte de l'existence de «parties» ayant un nombre égal de fruits. Il est clair toutefois que ce sujet s'appuie sur une partition «mentale» des collections appuyée par un procédé de comptage, ce sur quoi il insistera du reste dans ses justifications. On voit bien que c'est dans sa manière de compter les fruits que le sujet pense «parties» et non en construisant des partitions équivalentes, ce qui témoigne d'une coordination plutôt fragile des relations entre les différentes variables en cause.

### Cas n° 6: Sylvain (séance 4)

#### **Problème**

Le problème posé est une distribution de jetons. On invite le sujet à donner 2 fois plus de jetons à Simon alors qu'un autre élève a déjà distribué 8 jetons à Anita et 10 à Simon. La consigne suivante est donnée: «donne 2 fois plus de jetons à Simon que ce que Karine a eu».

#### **Description de la réponse**

Sylvain entre en jeu une fois qu'un autre élève qui applique un modèle additif eût distribué 8 jetons à un premier élève et 10 à un second. Sylvain retire alors les jetons donnés au second élève, soit la collection de 10, ce qui ramène sa collection à 0; il maintient la collection du premier élève à 8. Il en donne alors 16 au second, par comptage, sans les

disposer en groupes. Sylvain affirme alors « $8 + 8$  ça fait 16 et  $2 \times 8$  ça fait 16 aussi... voilà».

### **Interprétation**

En un certain sens, on peut dire que ce sujet résout le problème de manière multiplicative puisqu'il semble considérer les éléments, les parties et le tout, du moins sur le plan du discours déployé, par sa référence aux tables de multiplication. Il est à noter que le mode classificatoire utilisé pour les procédés permettait d'inclure le recours à une telle référence dans le modèle multiplicatif. Toutefois, il est permis de penser que la considération des parties de la collection s'appuie plus sur la connaissance des tables d'addition que sur une composition véritable des partitions, en lien avec les autres variables de rang. Ainsi comme l'a souligné Kamii (1985) dans l'examen des équations additives chez les jeunes enfants, la mémorisation des doublets numériques, comme par exemple  $5+5$ ,  $10+10$ , etc., est aisée pour eux et facilement repérable pour résoudre les problèmes multiplicatifs, une telle référence supportant davantage une interprétation additive de la multiplication.

### **XI. 2 Discussion au regard des construits des élèves**

L'analyse des conduites de résolution de problèmes multiplicatifs a permis d'identifier différents modèles de représentation des structures multiplicatives chez de jeunes élèves de la troisième année du primaire qui n'ont pas encore entrepris un tel apprentissage en classe. Le cas de figure des relations multiplicatives constitue une illustration intéressante pour comprendre le trajet d'apprentissage des jeunes enfants. Il convient de discuter de quelques considérations d'ensemble au regard des conduites observées chez ces derniers et de dégager quelques implications d'ordre didactique.

### **XI. 3 Quelques considérations d'ensemble au regard des conduites observées**

À la suite de l'analyse des modèles de représentations des structures multiplicatives endossés par les jeunes sujets de l'étude, quelques considérations d'ensemble sont ici dégagées: on peut parler de l'existence de conduites «en construction», d'apprentissages effectués «en continuité» mais aussi de conduites peu interactives.

#### Des sujets en voie de transiter vers le modèle multiplicatif

La première considération qu'il convient de relever concerne la capacité des jeunes enfants à manipuler les relations multiplicatives avant leur introduction formelle en classe, même s'ils n'en saisissent pas encore tous les enjeux relationnels. Ceci peut sembler tenir du lieu commun que d'affirmer une telle capacité, d'autant que plusieurs enfants se réfèrent souvent aux notions «fois plus» ou «fois moins» dans le discours et connaissent «par cœur» les tables de multiplication. Il faut toutefois situer plus le sens de ce propos en lien avec les



capacités «opératoires» des sujets plutôt qu'en fonction de leur performance académique, l'accent étant mis ici sur les tentatives de coordinations en vue de prendre en compte les différentes variables de rang dans les emboîtements multiplicatifs. On peut ainsi dire que ces élèves sont en voie de transiter vers le modèle multiplicatif, bien que l'on doive signaler des différences importantes dans leur manière de considérer les variables de rang ou de composer les relations entre elles. On observe, en effet, chez les jeunes élèves de cet âge, une diversité de modèles de représentation des problèmes multiplicatifs, soit les modèles additif, mixte ou multiplicatif. Toutefois, c'est surtout le recours fréquent au modèle mixte qui témoigne de cet état transitoire. De fait, ce modèle génère une multiplicité de procédés de résolution chez les sujets, correspondant à autant de tentatives d'accommodations en vue d'agir sur les propriétés relationnelles et numériques des problèmes. C'est pourquoi on peut parler de conduites «en construction».

#### Des sujets qui recourent au patrimoine mathématique constitué

La deuxième considération qu'il faut dégager à la suite de l'examen des modèles de représentation des structures multiplicatives chez les sujets porte sur le recours à leur bagage de connaissances acquises au cours d'expériences antérieures. Il faut dire que, très tôt, les jeunes enfants sont amenés à effectuer des jeux ou des activités qui leur permettent d'ajouter, d'enlever, de donner pareil, de faire des paquets, de partager, de trouver le tout, ou encore d'égaliser des quantités, soit en manipulant des objets ( légos, billes, voitures miniatures etc.), soit en se dédiant à des tâches en classe. Ces activités, exercées au cours de leur vie d'enfant ou d'écolier, leur permettent de se constituer un actif auquel ils pourront puiser par la suite pour asseoir la construction des structures multiplicatives. Il semble plutôt que les modèles de représentation invoqués dans le cas des structures multiplicatives s'appuient sur des connaissances élaborées lors d'expériences relatives à la numération et aux structures additives, ce qui témoigne bien de la filiation des concepts dans l'apprentissage. Certaines études comme celle de Kamii (1985) ont d'ailleurs montré l'influence de telles connaissances dans la construction des structures multiplicatives. De fait, les élèves puisent au répertoire de connaissances et d'expériences dont ils disposent et en réinvestissent les «interprétations» dans leurs constructions nouvelles. On le voit bien, les notions mathématiques sont solidaires les unes des autres et sont mises en «réseau» par l'élève à partir des différentes liaisons opératoires qu'il effectue. Certaines connaissances et conduites procédurales semblent même avoir un effet structurant sur la construction de notions nouvelles comme c'est le cas, par exemple, de l'utilisation du zéro, de la référence au système décimal, de la formulation de l'addition répétée, du recours aux tables d'addition

et de multiplication ou de l'utilisation de procédés de comptage assortis de gestuelles. Plusieurs élèves tablent d'ailleurs sur de telles connaissances pour se sortir des «impasses» auxquelles ils sont confrontés dans des tâches inédites et tenter ainsi des adaptations nouvelles. On parle donc d'apprentissages effectués «en continuité».

#### Des sujets plutôt réservés sur le plan des échanges interactifs et de l'explicitation de leur point de vue

La troisième considération générale qui peut être formulée au regard des conduites des sujets a trait aux interactions engagées entre ceux-ci lors des tâches de type coopératif et au langage utilisé pour l'explicitation de leur point de vue. En effet, lorsque placés en situation de collaborer pour résoudre les problèmes et de justifier leurs productions, les sujets se montrent plutôt réservés sur le plan de la coopération et de l'explicitation spontanée de leur point de vue. De fait, tout se passe comme s'ils agissaient «chacun pour soi» ou se parlaient «à eux-mêmes» dans leur tête, leurs conduites témoignant le plus souvent d'actions individuelles lors des tâches collectives et de discours «intérieurisés». Même si les consignes verbales les invitaient à co-construire les solutions aux problèmes pour certaines tâches ou, pour tous les problèmes, à rendre compte du sens de leur démarche, les enfants ont montré de conduites individualistes et peu explicites. Toutefois, comme ils ont été encouragés à collaborer de manière soutenue et qu'ils ont été sollicités par des questions en vue de constituer des protocoles expérimentaux «parlants», les enfants ont montré une certaine capacité d'interagir entre eux et de parler de leur réalisation. L'intérêt mitigé pour la négociation et le partage des solutions, de même que le faible recours au langage pour expliquer les productions, pourraient bien être dus aux habitudes développées dans le cadre de la culture scolaire, laquelle laisse relativement peu de place aux conduites spontanées de coopération dans les devoirs et aux justifications cognitives de type verbal.

#### **X. 4 Une didactique plus audacieuse sur le plan de la sollicitation cognitive des élèves**

Les considérations d'ensemble évoquées plus haut sont intéressantes dans la mesure où elles inspirent l'action. Quelques pistes de réflexions sont suggérées ici en vue de supporter des visées didactiques plus audacieuses au regard de la sollicitation cognitive des élèves.

#### Dépasser les contenus notionnels prescrits dans les programmes d'études

On connaît l'importance qu'ont les programmes d'études pour l'enseignement et l'aide qu'ils apportent aux enseignants pour la préparation des leçons en classe. On sait aussi que les objectifs ou les compétences identifiés dans le curriculum sont répartis, de manière plus ou moins arbitraire, entre les différents niveaux. S'ils ont un caractère prescriptif, les

programmes d'études ne sont en tous cas pas limitatifs en ce qui a trait aux visées à poursuivre. Les enseignants expérimentés tiennent certes compte du cadre curriculaire proposé mais s'autorisent aussi à l'enrichissement didactique des situations d'apprentissage, forts de la connaissance qu'ils ont des élèves et convaincus et de la nécessité d'explorer les différentes notions au-delà des seuls angles ou modalités proposés. De telles pratiques sont à encourager parce qu'elles permettent aux enfants de témoigner des représentations qu'ils ont déjà construites et, aux maîtres, de détecter et de tenir compte des pré-conceptions des élèves dans leur enseignement. Même s'il est convenu de l'importance de telles initiatives, on hésite encore trop souvent à solliciter les jeunes de manière plus audacieuse dans le cadre des travaux scolaires, au-delà de ce qu'ils ont vu ou de ce qui est prescrit au programme. Si l'on souscrit à être plus hardi auprès des élèves forts, on hésite toutefois à proposer des questionnements plus «déstabilisants» aux élèves moyens ou faibles et, ainsi, à s'enquérir de ce qu'ils connaissent effectivement.

#### Favoriser l'exploration des situations d'apprentissage au-delà de la seule quête de la réponse

On hésite aussi, pour toutes sortes de raisons dont l'une a trait au temps imparti à l'enseignement de l'une ou l'autre des matières, à offrir aux enfants la possibilité d'explorer le même concept ou la même notion au sein de différentes tâches et de les faire réfléchir sur les contextes de ces tâches. Le plus souvent, c'est la quête de la réponse qui devient l'enjeu principal de l'activité cognitive pour l'élève, enjeu qui est parfois renforcé par le contrat établi en classe. Pour saisir les continuités qu'il tisse tout autant que les ruptures qui se manifestent dans l'apprentissage, il importe d'observer l'élève dans sa manière de lire et d'interpréter les conditions des tâches ou, encore, de traiter une même notion dans différents problèmes. Pour apprendre, les enfants ont besoin de «jouer» et de «jongler» avec les données des problèmes, de lire des libellés de problèmes de nature et de facture différentes, mais aussi de «risquer» diverses interprétations du problème donné. Cela exige qu'on leur laisse le temps nécessaire pour explorer les problèmes et que l'on examine les accommodations qu'ils tentent en cours de résolution. Les enseignants d'expérience savent que l'activité exploratoire et investigatrice des élèves dans la résolution de problèmes est tout aussi, sinon plus, importante que la formulation de la réponse elle-même. En tous cas, une telle préoccupation risque de renseigner davantage sur le sens des divers «possibles» que l'élève élabore.

## **XII. L'apport des interactions entre élèves dans l'enseignement des fractions**

Dans ce chapitre nous tenons à montrer l'apport des interactions entre pairs dans l'enseignement des mathématiques et en particulier dans l'enseignement des fractions. Nous verrons comment, lors d'une séquence d'enseignement sur les fractions, s'est installée une culture de classe basée sur la discussion, l'argumentation, la négociation entre les élèves permettant à ces derniers de développer le sens de la fraction tout en approfondissant leurs connaissances de la langue. Des extraits d'échanges entre élèves viendront illustrer ces propos.

### **XII. 1 Description de la séquence d'activités**

C'est par le pliage de bandes de papier que les élèves (âgés de 9 à 12 ans) ont d'abord été amenés à construire, comparer, ordonner des nombres fractionnaires. Les élèves ont aussi estimé, trouvé les facteurs d'un nombre. Une mise en contexte des bandes de papier a permis, par la suite, la résolution de problèmes écrits. Il s'agit ici de travailler un des sens de la fraction, soit la partie d'un tout.

Après avoir distribué des bandes de papier de même longueur (21,5 cm sur 3 cm) à chaque élève, l'enseignante leur a demandé de prendre une bande de papier et de la plier en 2 parts égales. Tous les élèves, peu importe leur âge ou leur scolarité antérieure, peuvent plier une bande de papier en deux parts égales; tous les élèves de la classe sont alors engagés dans la même activité.

#### **Enseignante**

On a plié la bande de papier en deux. (elle la déplie) Combien de parts, combien de sections avez-vous?

#### **Les élèves (ensemble)**

Deux!

#### **Enseignante**

(dessine un rectangle au tableau, le divise en deux et colorie une part). Quelle portion de la bande de papier j'ai coloriée?

#### **Élève 1**

(il écrit avec son doigt dans les airs  $\frac{1}{2}$ )

#### **Enseignante**

Peux-tu venir l'écrire au tableau?

### Élève 1

(il écrit:  $1/2$ )

### Enseignante

Comment on dit ça?

### Élèves

(silence)

### Enseignante

Avez-vous déjà vu ça?

### Élèves

Une dizaine d'élèves lèvent la main.

### Enseignante

En français, on dit demi (elle écrit au tableau *une demie*). J'ai colorié une demie de la bande de papier. On peut dire aussi la moitié. (elle écrit au tableau *moitié*).

Le même scénario est repris avec une autre bande de papier, cette fois pliée en quatre. L'extrait à présenter illustre comment les termes mathématiques, une demie, un quart viennent se greffer, après coup, à l'action. L'enseignante n'a pas présenté aux élèves des rectangles dessinés et divisés en deux ou en quatre en leur disant voici une demie, voici un quart. Le pliage des bandes de papier a amené les élèves à construire une demie et un quart qu'ils ont par la suite nommés. L'enseignante demande ensuite aux élèves de plier une autre bande de papier afin d'obtenir 8 parts. La longueur de la bande de papier, soit 21,5 cm, ne permet pas aux élèves d'avoir recours aisément au mesurage et à la division ( $21,5 \text{ cm} \div 8$ ). Aucun élève n'a d'ailleurs ressenti le besoin d'utiliser sa règle. C'est donc à nouveau par le pliage que les élèves sont arrivés, non sans difficulté, à obtenir 8 parts égales.

### Plusieurs élèves

C'est facile!

### Élève 2

(après avoir plié sa bande de papier en deux et encore en deux, il la déplie, compte les parts obtenues et la replie encore en deux. Il dénombre maintenant 8 parts) J'ai fini madame!

### Enseignante

Lorsque les élèves ont terminé leur pliage, l'enseignante leur demande de vérifier s'ils ont vraiment 8 parts.

**Élève 3**

(Elle en dénombre 16)

**Élève 4**

J'en ai 8!

**Enseignante**

Comment as-tu fait?

**Élève 4**

J'ai plié en deux, toujours en deux.

**Enseignante**

Peux-tu me dire exactement ce que tu as fait? Je vais l'écrire au tableau.

**Élève 4**

J'ai plié en deux puis j'ai plié en deux.

**Enseignante**

(tout en écrivant) Combien de parts avais-tu alors?

**Élève 4**

4 parts, puis j'ai plié encore en deux. C'est comme 2 fois 2 fois 2, ça fait 8.

**Enseignante**

C'est beau! Est-ce qu'il y en a qui ont fait cela d'une autre façon?

**Élève 5**

Moi, j'ai pris la bande de 4 et j'ai plié en 2.

**Enseignante**

(écrit au tableau: bande de 4 pliée en 2).

**Élève 4**

C'est comme  $4 \times 2$

**Enseignante**

(s'adressant à l'élève 3 qui avait obtenu 16 parts) Comment as-tu fait pour avoir 16?

**Élève 3**

(reprenant sa bande et la repliant). J'ai plié ma bande, oui, en 2 puis j'ai plié en 2, en 2 et en 2. (procédure additive erronée, elle a fait  $2 + 2 + 2 + 2$ )

**Élève 4**

Tu en as fait trop!

**Enseignante**

Qu'est-ce que tu as obtenu?

### Élève 3

16. C'est trop. (Reprenant à son compte l'explication de l'élève 4, qui le premier a fait ressortir la structure multiplicative de la situation) J'ai fait  $8 \times 2$ , 16.

### Enseignante

(dessine un rectangle, le divise en 8 parts en colorie une) Comment on pourrait écrire une part?

### Élève 6

(va au tableau et écrit  $1/8$ )

### Enseignante

Comment on va dire cela?

### Élève 2

Un octave.

L'extrait que nous venons de voir illustre plusieurs aspects de l'approche. Un tel pliage de bandes de papier fait appel à une structure multiplicative comme l'exprime l'élève 4. Or, il n'est pas rare de retrouver dans une telle situation, des élèves qui auront recours à une procédure additive erronée (voir l'élève 3). En provoquant l'utilisation de cette procédure additive, l'élève est forcé à réorganiser sa pensée; ce qu'elle fait en s'appuyant sur l'argumentation de l'élève 4 qui a auparavant fait ressortir la structure multiplicative. C'est d'ailleurs la même élève qui, quelques minutes plus tard ira montrer aux autres comment plier une bande de papier en cinq parts égales. De plus, ce fut une belle occasion de revenir sur l'étymologie du mot «octave» grâce à l'intervention de l'élève 2 qui propose le terme «octave» pour désigner la fraction  $1/8$ .

Les élèves sont ensuite amenés à plier une bande de papier en trois parts égales. Ce pliage s'est avéré beaucoup plus complexe pour certains élèves puisqu'on ne peut, ici, se baser sur un pliage en 2. C'est un élève de la classe qui a trouvé une technique astucieuse en «roulant» la bande de papier de manière à obtenir trois épaisseurs. Il est alors amené à expliquer et démontrer sa technique aux autres. Ce dernier pliage en trois parts égales amène l'élève 1 à émettre une hypothèse:

### Élève 1

C'est facile! Les nombres pairs, c'est toujours plier en deux. (N'oublions pas que jusqu'ici, nous avons fait 2, 4, 8 et 3). Les nombres impairs, c'est plus difficile.

### Enseignante

Je vous demande maintenant de prendre une autre bande de papier et de la plier pour avoir 6 parts.

### **Élève 2**

(reprenant sa procédure de dénombrement au fur et à mesure, plie la bande en deux puis en deux, ce qui lui donne 4 parts; la replie en deux et dénombre 8 parts)

### **Élèves**

Plusieurs élèves, par pliage, arrivent à 8 parts. Quelques élèves procèdent par pliage «accordéon», c'est à dire font une première pliure à partir d'une extrémité de la bande puis replient de la même largeur jusqu'à ce qu'ils atteignent l'autre extrémité de la bande. La largeur de la première pliure est aléatoire; c'est ainsi qu'ils arrivent à 4, 5 ou 6 parts et une autre plus petite ou plus grande. Les élèves recommencent à plusieurs reprises pour trouver 6 parts.

### **Élève 1**

6 C'est pair mais on peut pas!

### **Élève 7**

(se levant de sa chaise pour nous montrer son pliage) Moi, madame! Moi, madame!

J'ai trouvé! (Notons qu'il s'agit d'un élève sous-scolarisé.)

### **Enseignante**

Qu'as-tu fait?

### **Élève 7**

J'ai fait comme ça (et il montre un pliage en 3 puis un pliage en 2).

### **Élèves**

Plusieurs élèves reprennent sa façon de procéder.

### **Enseignante**

Est-ce qu'il y aurait eu une autre façon de procéder?

### **Élève 8**

On peut plier en 2 puis en 3.

### **Enseignante**

(s'adressant à l'élève 7), est-ce différent de ta façon de faire?

### **Élève 7**

J'ai fait en 3 et en 2. (On en profite pour discuter de la commutativité en multiplication.)

Dans cet extrait, on voit bien la dynamique de la classe qui s'est installée. Les élèves, depuis le début de l'année scolaire, sont amenés à émettre des hypothèses, à argumenter, à vérifier. C'est ainsi que l'élève 1 nous dit que le pliage de nombres pairs est facile puisque



c'est toujours par deux. L'enseignante leur propose alors un nombre pair, 6, mais qui ne pourra se faire uniquement en pliant par deux. Nous revenons ici sur un des buts de l'activité à savoir la participation de tous les élèves de la classe peu importe leur niveau scolaire. Cet épisode de l'activité a permis un premier travail sur les facteurs. L'enseignante en profitera ensuite pour demander aux élèves de trouver différentes façons d'obtenir 12 parts, sans faire le pliage. En d'autres termes, les élèves sont-ils capables, à ce point de l'activité, de se détacher du pliage et de dégager la structure multiplicative afin de trouver les facteurs de 12.

L'activité se poursuit par des pliages en 9 et en 5. Partant de leur pliage en 3, des élèves arrivent à la conclusion que pour trouver 9 parts, il faut plier en 3 et replier de la même façon en 3. Le pliage en 5, nombre premier, s'avère plus difficile: il n'y a qu'une façon de plier en 5 et cela demande une estimation à partir des bandes de 4 et de 6 déjà faites. Les élèves ont donc des bandes de papier pliées en 2, 3, 4, 5, 6, 8 et 9. L'enseignante leur demande de les placer en ordre croissant de la plus petite part à la plus grande part. Les élèves y parviennent non sans plusieurs difficultés; le nombre 2 est plus petit que 3 et pourtant une demie, c'est plus grand qu'un tiers... Une discussion s'engage alors entre les élèves.

### **Élève 2**

J'ai compris qu'en 2, c'est plus grand qu'en 3, plus grand qu'en 4 toujours plus grand.

### **Élève 9**

(reprenant ce que l'élève 2 a dit). Oui, je comprends que plus le chiffre est petit plus la partie est grande.

### **Élève 2**

C'est ça!

### **Élève 10**

Plus le nombre de parties est petit, plus chaque partie est grande.

Cet extrait nous montre comment l'explication partielle du premier élève («en 2, c'est plus grand qu'en 3»), reprise et raffinée par deux autres élèves, devient un principe plus général «plus le nombre de parties est petit, plus chaque partie est grande». L'enseignante en profite alors pour introduire l'idée du numérateur et du dénominateur et leur rôle respectif.

## **XII. 2 Conclusion**

Les bénéfices que l'élève peut tirer des interactions sociales sont nombreux et se situent à divers moments du processus, reformulation par un élève de la consigne donnée par l'enseignante, explicitation de la démarche, d'une stratégie, d'une technique, débat autour d'une hypothèse, d'une solution... À chacun de ces moments, le fait de communiquer permet à l'élève d'affiner sa pensée; cela permet aussi aux autres élèves de s'approprier une démarche, une justification et finalement, cela permet une co-construction des concepts mathématiques comme on venait de le voir plus haut.

Le travail sur les fractions illustre comment il est possible de travailler en classe, avec des élèves, une tâche classique. En misant sur l'importance des interactions sociales et en mettant les élèves en situation riche et signifiante, ils seront amenés à expliciter, à justifier leurs choix, à débattre des idées leur permettant ainsi de construire des concepts mathématiques. L'extrait présenté ici illustre aussi le rôle important de l'enseignant tant lors de la planification des activités, par les choix didactiques à poser (par exemple, la dimension des bandes de papier) que lors de la réalisation des activités en classe. Tout au long de la leçon, le questionnement de l'enseignant doit s'articuler sur la démarche des élèves afin de leur permettre d'affiner leur pensée et d'argumenter.

### **XIII. L'enseignement de la géométrie à l'école de base**

Ce que la tradition appelle «enseignement de la géométrie» renvoie, à l'école de base à deux champs de connaissances :

- d'une part celui des connaissances nécessaires à l'élève pour contrôler ses rapports usuels à l'espace, champ désigné par «structuration de l'espace»,
- d'autre part celui de la géométrie proprement dite.

Toutefois, l'enseignement de la géométrie à l'école de base fait l'objet à de nombreuses questions de la part des enseignants. En voici quelques-unes :

- Quels sont ses objectifs ?
- En quoi les activités géométriques contribuent-elles, comme le disent les instructions officiels à «la construction de l'espace chez l'enfant»?
- Les différentes notions sont-elles liées? Y a-t-il une progression à respecter?
- Quelles sont les attentes des enseignants du collège et du secondaire et quels sont les besoins réels de leurs élèves?

Les réponses à ces questions sont bien moins assurées que dans le domaine numérique. Personne ne conteste, par exemple qu'il soit utile de savoir effectuer une multiplication, donc de l'apprendre à l'école. C'est «naturel» depuis un siècle à peu près. Le retirer des programmes ne passerait pas inaperçu. Pour les connaissances géométriques, les convictions sont moins affirmées, et les enseignants n'ont pas de réponse claire à ces questions. Aussi se sentent-ils «autorisés» à prendre des libertés avec le programme, c'est-à-dire à en négliger cette partie (tout comme ceux du secondaire avec la géométrie dans l'espace).

Dans ce chapitre, nous nous référons aux travaux de Berthelot et de Salin. Ils se sont appuyés sur les résultats de recherches en didactique menées dans le cadre d'une thèse sous la direction de Guy Brousseau. Cette thèse vise principalement deux objectifs :

- clarifier les rapports entre les deux champs évoqués : celui des *connaissances spatiales* et celui des *connaissances géométriques*, situer leur place respective dans les programmes d'enseignement, en attirant l'attention sur la faible place accordée au premier, et sur les conséquences de cet état de fait,
- proposer une analyse didactique de certaines des caractéristiques de l'enseignement de la géométrie.

### **XIII. 1 Connaissances spatiales et connaissances géométriques**

La géométrie a à voir avec l'espace. Mais peut-on assimiler les connaissances spatiales, nécessaires à la maîtrise des problèmes qui se posent à tout individu dans ses rapports avec l'espace, comme étant relevant du savoir mathématique appelé géométrie?

### **XIII. 2 Les différences entre connaissances spatiales et connaissances géométriques**

#### **XIII. 2. 1 Leur genèse chez l'enfant**

Une première différence est relative à la genèse de ces connaissances pour l'enfant. Chaque enfant dispose de connaissances spatiales avant même que l'on se propose de lui apprendre des connaissances de géométrie. La géométrie, elle, doit être enseignée pour exister, comme tout savoir mathématique.

#### **XIII. 2. 2 Les types de problèmes**

##### *Le problème du vitrier*

Quelles sont les connaissances nécessaires à un vitrier pour reproduire un quadrilatère de forme parallélogramme afin de découper une vitre adaptée à la fenêtre d'un de ses clients? Il est certain que s'il s'agit pour lui d'une action familière, ce ne sera pas un problème et il mettra en oeuvre la procédure qu'il connaît bien. S'il n'est familier qu'à des fenêtres de forme rectangulaire, il doutera et ne saura quelles mesures prendre avec les outils dont il dispose. Son problème est de prendre les informations qui lui garantissent que la vitre qu'il va découper aura bien la forme voulue. Ce qui lui manque est la maîtrise du caractère déformable ou non des figures dont on connaît les longueurs des côtés. Dans le cas rapporté, c'est bien ce qu'a manifesté la décision qu'a prise le vitrier: il a fait, avant la coupe du verre, un cadre en bois correspondant aux mesures saisies puis il l'a comparé à la fenêtre, et ajusté à sa forme.

Dans le cadre de la géométrie, la formulation d'un problème correspondant au problème du vitrier serait par exemple: «Trouver un ensemble de propriétés caractéristiques du parallélogramme». La solution de ce problème appelle une validation d'ordre mathématique. Si le vitrier dispose de connaissances géométriques, il pourra prévoir que la connaissance des longueurs des côtés et d'une diagonale (informations auxquelles ses instruments lui donnent un accès facile) suffit à déterminer une figure superposable à la figure mesurée.

Mais il ne trouvera pas cette propriété dans un cours de géométrie, car pour la géométrie elle n'a pas particulièrement d'intérêt. Les propriétés « intéressantes » pour la géométrie et pour l'espace ne sont pas toujours les mêmes.

##### Problème spatial, problème de géométrie

De manière générale, nous devons distinguer deux types de problèmes:

a) **les problèmes spatiaux**, ainsi caractérisés:

- par leur finalité qui concerne l'espace sensible
- ils peuvent porter sur la réalisation d'actions: fabriquer, déplacer, dessiner, etc.
- la réussite ou l'échec sont déterminés par le sujet par comparaison entre le résultat attendu et le résultat obtenu.

b) **les problèmes de géométrie**, au sens où ce mot est employé en mathématiques.

Résoudre un problème de géométrie est une activité qui concerne le caractère nécessaire et non contradictoire de certaines propriétés des objets de la géométrie.

Les situations de géométrie mettent en interaction un sujet «mathématicien» avec un milieu qui n'est plus l'espace physique et ses objets mais un espace conceptualisé que les «figures dessins» tracées par ce sujet ne font que représenter.

La validité de ses déclarations n'est plus établie empiriquement mais s'appuie sur des raisonnements qui obéissent aux règles du débat mathématique. La fonction des dessins est, comme le dit Poincaré, de provoquer la mise en relation de propositions que l'on sait associer à tel ou tel tracé ou portion de dessin, mais le constat de ces propriétés sur la «figure dessin» ne permet pas de valider la proposition mise à l'étude. C'est ce que d'ailleurs beaucoup d'élèves de collège ont de mal à comprendre.

### **XIII. 2. 3 Le vocabulaire**

Il comporte bien des mots communs. La signification en est-elle la même? Rien n'est moins sûr: dans la vie courante ou professionnelle (hors mathématiques), personne ne qualifiera de rectangulaire un objet de forme carré: ce serait considéré comme une erreur, parce que cela serait interprété comme voulant signifier une différence de longueur entre les côtes consécutifs. En géométrie par contre, qualifier un carré de rectangle constitue la manifestation d'une connaissance particulière qui fait l'objet d'un enseignement.

### **XIII. 3 Les rapports entre Connaissances spatiales et connaissances géométriques**

Malgré ces différences, connaissances géométriques et connaissances spatiales sont très fortement liées. L'étude historique montre que la géométrie euclidienne est issue, pour une large part, de la résolution de problèmes spatiaux. Deux grands thèmes ont, en particulier, mobilisé la réflexion des hommes: les mesures spatiales et la représentation plane des situations spatiales. Par exemple, les grecs, pour des raisons culturelles ont été les inventeurs de la «géométrie mathématique». Celle-ci s'est développée de plus en plus, jusqu'à une géométrie coupée de ses origines spatiales. Il n'en reste pas moins que la

géométrie demeure «la science des situations spatiales» et que la maîtrise de l'espace, c'est à dire la possibilité d'un contrôle efficace par le sujet de ses relations à l'espace sensible, est facilitée s'il dispose des connaissances géométriques qui s'appliquent au problème qu'il a à résoudre.

Analysons par exemple le travail d'un arpenteur du début du siècle. Ayant à évaluer l'aire d'un terrain «réel», il ne peut la mesurer directement, c'est-à-dire compter le nombre d'unités d'aires qu'elle contient.

Il va constamment faire appel à des connaissances spatiales et géométriques pour réaliser sa tâche. Par exemple. Si son terrain est clôturé sur un côté, il va commencer par s'assurer que la clôture est rectiligne. Pour cela, il va par exemple faire une visée, c'est à dire utiliser une pratique proprement spatiale. Mais ce qui le guide dans le choix des éléments à contrôler, c'est la connaissance géométrique dont il dispose concernant les facteurs qui interviennent dans le calcul d'une aire. Ce sont ces connaissances également qui lui permettent de ne prendre que les mesures nécessaires, puis, à partir d'un schéma représentant approximativement le terrain sur lequel il aura noté les mesures des côtés et des angles, de calculer l'aire.

Par ailleurs, il aura utilisé ses connaissances spatiales pour effectuer les mesures : s'il ne dispose pas d'un instrument de mesure des longueurs suffisamment long et qu'il est conduit à reporter plusieurs fois son décamètre-ruban lors de la mesure d'une distance non matérialisée par une haie, il aura contrôlé l'alignement des extrémités successives.

Ainsi, à chaque instant, l'arpenteur aura fait appel à des connaissances qui relèvent soit de celles nécessaires au contrôle spatial soit du modèle géométrique. Il n'y a pas pour lui d'ambiguïté: il respecte la fonction de chaque type de connaissances.

Remarquons que la résolution de son problème s'appuie sur la modélisation de l'espace en question, c'est à dire sur un mode de traitement qui consiste à représenter le terrain par un schéma ne prenant en compte que la partie pertinente, pour le problème posé, des propriétés du terrain, et à traiter le problème dans le modèle, avant de revenir au réel.

Dans quelle mesure l'enseignement de la géométrie prend-il en compte ces différents aspects, en particulier durant les premières années d'enseignement? Berthelot et Salin ont essayé de répondre à cette question en regardant l'évolution, à travers l'histoire, des programmes et des instructions officielles français.

Il ressort de leur étude, que ces corpus n'accordent qu'une faible place aux connaissances proprement spatiales. Selon eux, cela serait justifiée si leur acquisition se faisait quasi spontanément, dans les interactions familières de l'enfant avec le milieu spatial. Ce qui

souvent n'est pas le cas. En effet, Berthelot et Salin et à travers une expérimentation menée avec des élèves de 11 ans qui consiste à regarder dans quelle mesure les élèves sont capables de réinvestir des connaissances acquises dans le cadre scolaire pour résoudre des problèmes situés dans d'autres contextes, en particulier quand on change la taille de l'espace, ont enregistré des difficultés chez beaucoup d'élèves. Ainsi, alors que la construction d'un rectangle sur une feuille de papier, quand un côté est déjà tracé et que l'on donne la longueur d'un autre côté, est réussie par la grande majorité des élèves, la résolution du même problème posé à propos d'un rectangle dont les longueurs de côté sont de 7 et de 9 cm fait apparaître les limites des conceptions des élèves dont les apprentissages se sont effectués dans le contexte de la feuille de papier. Cela se manifeste chez certains par l'oubli de la prise en compte de la rectitude des angles, chez d'autres par la mise en doute, après une construction correcte de la figure, de sa qualité de rectangle: A la question «es-tu sûr que c'est un rectangle?», certains élèves répondent par des phrases comme : «Je ne suis pas convaincu, il faudrait aller au deuxième étage et regarder» ou «Mais peut-être qu'il y a des figures avec quatre angles droits qui ne sont pas des rectangles».

Ces difficultés renvoient à une interrogation sur la façon dont le système d'enseignement prend en charge le développement des compétences et des connaissances spatiales et spatio-géométriques, nécessaires tant à la vie quotidienne qu'aux apprentissages mathématiques.

### **XIII. 4 Quelques caractéristiques de l'enseignement de la géométrie**

Faute d'un travail de recherche sur l'enseignement de la géométrie, dans l'école tunisienne, fait selon la perspective «connaissances spatiales - connaissances géométriques », nous présentons les caractéristiques de cet enseignement, selon les travaux de Berthelot et Salin qui se sont appuyés sur la description de quelques exemples, tirés de manuels français.

### **XIII. 5 Les pratiques les plus répandues**

Selon, Berthelot et Salin, l'enseignement de l'espace et de la géométrie à l'école primaire française s'appuie majoritairement sur une présentation ostensive<sup>4</sup> des connaissances spatiales et spatio-géométriques.

#### **XIII. 5. 1 L'ostension assumée**

Par l'ostension assumée, repérée dans l'histoire de l'enseignement de la géométrie à l'école primaire jusqu'aux programmes de 77-78-80, l'enseignant présente directement les

---

<sup>4</sup> Ratsifnba-Rajohn (1977) la définit comme la donnée par l'enseignant «de tous les éléments et relations constitutifs de la notion visée»

connaissances en s'appuyant sur l'observation d'une réalité sensible ou d'une de ses représentations, et suppose les élèves capables de se les approprier et d'en étendre l'emploi à d'autres situations.

### **Voici un exemple sur la notion de périmètre, tirée d'un manuel de 1960**

Bien qu'il n'est pas connu avec exactitude comment les maîtres à l'époque utilisaient le manuel avec leurs élèves, Berthelot et Salin ont avancé l'hypothèse d'une lecture collective du texte accompagnée de questions: «Qu'est-ce que vous voyez sur l'image? Comment connaître la longueur du grillage employée par le jardinier?» et d'explications complémentaires puis de la recherche individuelle du périmètre sur des exercices.

Comment pouvons-nous qualifier les rapports spatiaux développés par les enfants pendant cette leçon ?

- Ces rapports ne sont pas effectifs : le milieu matériel (la pelouse polygonale et son grillage) est évoqué par une représentation fournie à l'enfant, l'action du jardinier par le mot « entoure » (en rouge dans le texte). Les enfants sont donc supposés capables de se représenter la situation objective à partir de ces seules informations.
- L'objectif est de munir les enfants d'une procédure générale s'appliquant à certaines situations spatiales planes. Le maître fournit aux élèves un modèle leur permettant d'évaluer le périmètre de toute surface polygonale connaissant les longueurs des côtés.
- Par contre, aucune place n'est faite à une approche qui peut être qualifiée de didactique :

Il n'y a pas de situation dans laquelle les élèves se posent le problème de «comment connaître le périmètre dans les conditions fixées?» et envisagent différentes façons possibles de le faire (y compris par mesurage effectif).

De manière plus générale, dans les situations «d'ostension assumée» analysées, le problème est présenté aux élèves de manière évoquée, mais ceux-ci ne sont pas confrontés eux-mêmes à sa résolution dans des interactions spatiales effectives, ils n'ont pas la possibilité de mobiliser les représentations dont ils disposent, de les modifier en fonction des rétroactions de la situation, d'explicitier et de justifier leurs démarches.

Or ce sont les situations a-didactiques<sup>5</sup> qui donnent du sens aux connaissances spatio-géométriques et qui servent d'appui à leur institutionnalisation. Leur absence a pour

---

<sup>5</sup> A l'intérieur d'une situation didactique (donc organisée par le maître pour un certain enseignement), le terme de situation a-didactique désigne toute situation (finalisée par un résultat empirique) qui d'une part ne peut être maîtrisée de façon convenable sans la mise en oeuvre des connaissances ou du savoir visé, et qui, d'autre



conséquence que la relation entre le savoir enseigné et l'ensemble des situations de référence qui assurent le sens de ce savoir est à la seule charge des élèves.

En conclusion, dans la présentation assumée, l'enseignant prend à sa charge la formulation de la correspondance entre un milieu objectif et le modèle géométrique.

L'élève a la charge de «problématiser l'espace», c'est à dire doit faire appel à ses connaissances personnelles pour traduire en questions sur l'espace les questions posées dans le cadre du savoir enseignant, pour faire le lien entre les solutions pratiques et les solutions géométriques.

### **XIII. 5. 2 L'ostension déguisée**

A partir de 1980, Berthelot et Salin ont repéré à partir des instructions officiels une légère évolution des conceptions épistémologiques de leurs rédacteurs, avec l'apparition de «la résolution de problèmes» comme moyen de prendre en compte le caractère «d'outil» des mathématiques. Toutefois, malgré les timides incitations des instructions, ils soulignent concernant tant les apprentissages spatiaux que les apprentissages spatio-géométriques une absence de phases a-didactiques et que beaucoup de choses comme autrefois d'ailleurs restent à la charge de l'élève.

#### **Voici trois exercices sur la symétrie tirés d'un manuel actuel français**

Dans la phase "recherche" de la leçon sur la symétrie par rapport à une droite, qui présente le dessin de deux oiseaux symétriques par rapport à une droite D verticale sur lesquels ont été repérés et désignés par des lettres, un certain nombre de points en correspondance (les pointes du bec, des ailes), les élèves doivent dire que les segments joignant les points correspondants sont parallèles entre eux, perpendiculaires à l'axe et que le point de rencontre avec l'axe est le milieu du segment ! Dans l'activité suivante, ils ont à utiliser les observations faites à l'exercice précédant pour construire l'avion symétrique de celui dessiné (mais cette fois le dessin est fait sur papier quadrillé, l'axe étant encore vertical), dans la troisième, *le saut est considérable*, puisqu'il faut construire sur papier blanc, le symétrique d'un triangle, l'axe étant oblique, et expliquer comment on a fait.

Dans ce dernier exercice, nous avons l'exemple type de ce que Berthelot et Salin appelle «ostension déguisée». Dans un premier temps, l'observation du dessin doit permettre aux enfants de reconnaître les propriétés visées représentées sur la figure et de les expliquer.

---

part, sanctionne les décisions que prend l'élève (bonnes ou mauvaises), sans intervention du maître relativement au savoir à mettre en oeuvre.

Dans un deuxième temps, il est demandé aux élèves de les réutiliser pour différents types d'exercices dont la proximité avec la situation d'introduction n'est pas contrôlée.

Berthelot et Salin affirment que dans ces conditions, la part de l'enseignant, sous-estimée par le manuel, est essentielle :

Dans le cas de la symétrie, les recherches au collège menées par D. Grenier permettent de prendre conscience que les propriétés ponctuelles n'étaient pas du tout évidentes pour des élèves de 6<sup>ème</sup> (7<sup>ème</sup> année de base) ; même mises en scène comme dans le manuel, rien n'autorise à penser que les élèves de CM1 vont répondre ce qu'attend le maître. Si le « message » n'est pas décodé par au moins un des élèves, « l'exploitation collective » permet à l'enseignant d'avancer, suivant les conseils du manuel pour le maître, qui s'exprime en ces termes : « on dégagera, on fera constater, on mettra en évidence etc... ». Ce "on" est bien commode, il permet au maître de se sentir autorisé à intervenir largement tout en maintenant la fiction que ces interventions ne sont que la reprise de l'expression des enfants. Le rapport avec la situation n'est donc pas producteur de sens, et nous retrouvons les caractéristiques de la présentation ostensive des connaissances.

L'ostension « assumée » n'a-t-elle pas été remplacée par un autre mode d'ostension, que l'on pourrait qualifier « d'ostension déguisée » ? Au lieu de montrer à l'élève ce qui est à voir, le maître le cache derrière une fiction : celle que c'est l'élève lui-même qui le découvre sur les objets spatiaux soumis à son observation ou à son action.

### **XIII. 5. 2 Les raisons de la persistance de l'ostension**

L'enseignant a la responsabilité de la communication du savoir. Il contrôle également que, ce que l'élève a appris est bien conforme à ce savoir. De plus, il est comptable de l'avancée du programme devant les instances officielles, devant les parents d'élèves et les élèves. L'insistance relativement récente sur le rôle des connaissances et de l'activité propre de l'élève dans la construction de ses savoirs, conduit le système d'enseignement à rejeter l'emploi de l'ostension assumée. Que se passe-t-il souvent ?

L'élève ne doit plus être considéré comme une page vierge; sur les savoirs visés, il a déjà des connaissances, explicites ou non, plus ou moins adaptées mais dont le maître doit tenir compte. Pour pouvoir réaliser cette prise en compte, certains ouvrages proposent de commencer un enseignement par la résolution d'un problème nouveau, où les interactions avec l'espace sont effectives, et où l'élève va pouvoir engager et éventuellement expliciter ce qu'il sait déjà. Or, dans la majorité des cas, ce que produit l'élève comme stratégie de base dans une situation a-didactiques est très éloigné du savoir visé. La validation empirique peut s'avérer positive pour des modèles non attendus. En voici un exemple, tiré

de la brochure « Enseignement des mathématiques utilisant la réalité » (1987), réalisée par A. Berté et éditée par IREM de **Bordeaux**.

Les auteurs rapportent les faits suivants qui se passent en 4<sup>ème</sup>:

L'enseignant donne trois séries de nombres aux élèves. Il faut dans chaque cas, dessiner un triangle dont les côtés ont pour mesure ces trois nombres en cm :

- 1<sup>er</sup> cas: 7, 5, 4 ;
- 2<sup>ème</sup> cas: 9, 5, 4 ;
- 3<sup>ème</sup> cas: 10, 5, 4.

Les élèves peuvent travailler en petit groupe et discuter entre eux.

Dans le premier et le troisième cas, tous les élèves dessinent le triangle avec le compas, ou la règle pivotant autour du zéro et concluent sans difficulté.

Dans le deuxième cas, un groupe d'élèves arrivent à dessiner un triangle, très aplati mais pas tout à fait. La vérification de la longueur des côtés avec la règle graduée leur paraît exacte. Malgré quelques objections timides des autres élèves, ils s'acharnent donc à dire que le triangle existe et arrivent même parfois à convaincre toute la classe!

L'enseignant peut-il accepter que l'élève soit convaincu de l'existence du triangle (9, 5, 4) parce qu'il en a dessiné un, alors que ce résultat est faux dans le savoir dont il est le garant, la géométrie? Pour répondre oui à cette question, il faudrait qu'il se sente autorisé à reconnaître comme légitime une proposition qui s'appuie sur une connaissance spatiale effective de l'élève, mais qui n'a pas statut de vérité dans la géométrie et qu'il dispose de moyens pour aider l'élève à passer de cette connaissance, à la connaissance géométrique correspondante, avec une intervention didactique minimale de sa part. Or ce sont ces moyens qui lui manquent.

L'ostension « déguisée » apparaît alors comme une solution de compromis; elle évite tous ces problèmes à l'enseignant en le laissant maître du jeu, tout en semblant prendre en compte l'activité de l'élève. Plusieurs travaux mettent en évidence le fait que ceci a pour conséquence la persistance du rejet de l'apprentissage a-didactiques des connaissances spatio-géométriques hors du temps scolaire puisqu'elle fait porter à l'élève la responsabilité de l'établissement des rapports entre les concepts qui lui sont enseignés et la réalité sensible à laquelle ils se rapportent.

### **conclusion**

Une caractéristique majeure de l'enseignement de la géométrie à l'école de base est de sous-estimer la difficulté d'acquisition des connaissances spatiales proprement dites et de laisser à l'élève la charge d'établir les rapports adéquats entre l'espace et les concepts géométriques

qui lui sont enseignés, et qui sont censés lui donner prise sur ce domaine de réalité. Nous avons donné quelques exemples des difficultés rencontrées par les élèves pour établir ces rapports et difficultés qui renvoient à un déficit ou à une mauvaise adaptation de leurs connaissances privées.

#### XIV. Quelques difficultés didactiques concernant les notions d'aire et de périmètre

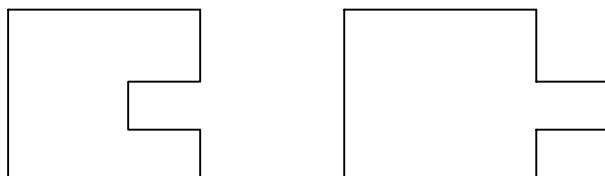
Tout enseignant de mathématiques a rencontré des apprenants en difficulté dans l'utilisation des formules de calculs de périmètres ou/et d'aires. Et il est classique de voir un élève utiliser une formule de calcul d'aire pour trouver un périmètre (et réciproquement) ou exprimer une aire en m (ou un périmètre en mètres carrés).

Ces erreurs trouvent probablement leur origine dans des confusions s'appuyant sur des perceptions erronées. Précisons, à partir de quelques exemples, le sens de ces propos.

L'expérience empirique conduit parfois à confondre les concepts de Périmètre, d'Aire (et même de volume). En effet, dans la plupart des manipulations que nous réalisons sur des objets, ces trois grandeurs se croissent conjointement. Ainsi, plus un paquet-cadeau est gros (volume), plus le papier-cadeau pour l'envelopper est grand (Aire) et plus le ruban nécessaire à l'entourer sera long (Périmètre). Intuitivement, nous avons tendance à penser (souvent inconsciemment) que si nous augmentons une surface, le nouveau périmètre augmente aussi et vice-versa.

Il y a donc une confusion profondément enracinée dans notre expérience empirique d'actions sur le monde ou dans les perceptions immédiates sur certaines figures.

Ainsi dans le cas suivant :



Beaucoup de personnes considèrent que la figure de droite a un périmètre supérieur à celle de gauche. Ce qui est bien évidemment faux. Ils ont en fait le même périmètre.

Cette erreur pourrait s'expliquer par le fait que la figure de gauche est perçue comme un grand carré amputé d'un petit rectangle, alors que celle de droite est perçue comme un grand carré augmenté d'un petit rectangle. Ce qui est exact en terme de décomposition et recomposition. Ce qui est erroné, *c'est le mouvement de pensée qui traduit cette perception en opération de soustraction ou d'addition* sur les deux grandeurs périmètre et aire. Car il est vrai qu'à l'addition perceptive des deux formes, correspond l'addition des aires mais il n'en est pas de même au niveau des périmètres.

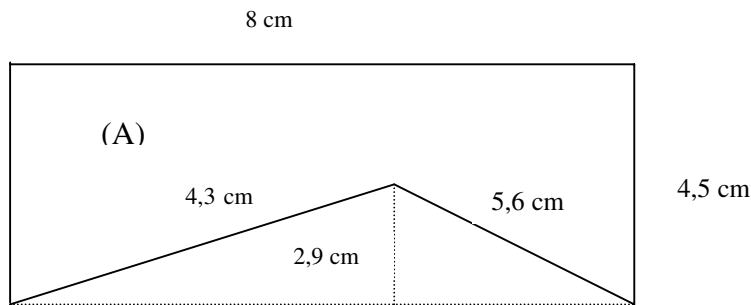
Il faut remarquer que cette "logique" conduit certains sujets à proposer comme calcul du périmètre de la première forme une opération du type :

Périmètre du grand carré + périmètre du rectangle

et comme calcul du périmètre de la seconde forme une opération du type :

Périmètre du grand carré - périmètre du rectangle.

Voici encore une fois ce que pourrait écrire un élève de 9 à 10 ans, face à une figure comme la suivante :



$$\text{Aire du rectangle : } 8 \times 4,5 = 36 \text{ cm}^2$$

$$\text{Aire du triangle : } \frac{8 \times 2,9}{2} = 11,6 \text{ cm}^2$$

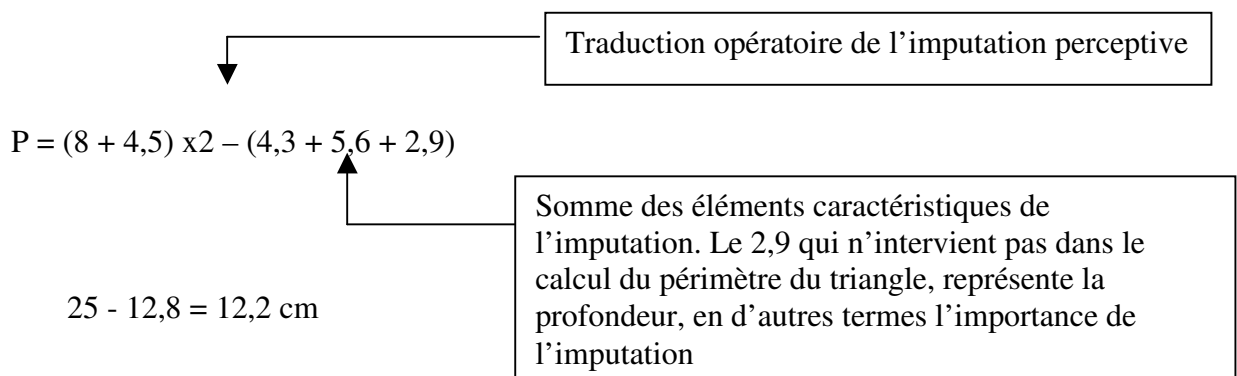
$$\text{Donc l'aire de la partie (A) est : } 36 - 11,6 = 24,4 \text{ cm}^2$$

$$\text{Périmètre de la partie (A) est : } (8 + 4,5) \times 2 - (4,3 + 5,6 + 2,9) = 25 - 12,8 = 12,2 \text{ cm}$$

### Commentaire

Ici la figure est pensée comme étant celle d'un rectangle amputé d'un triangle.

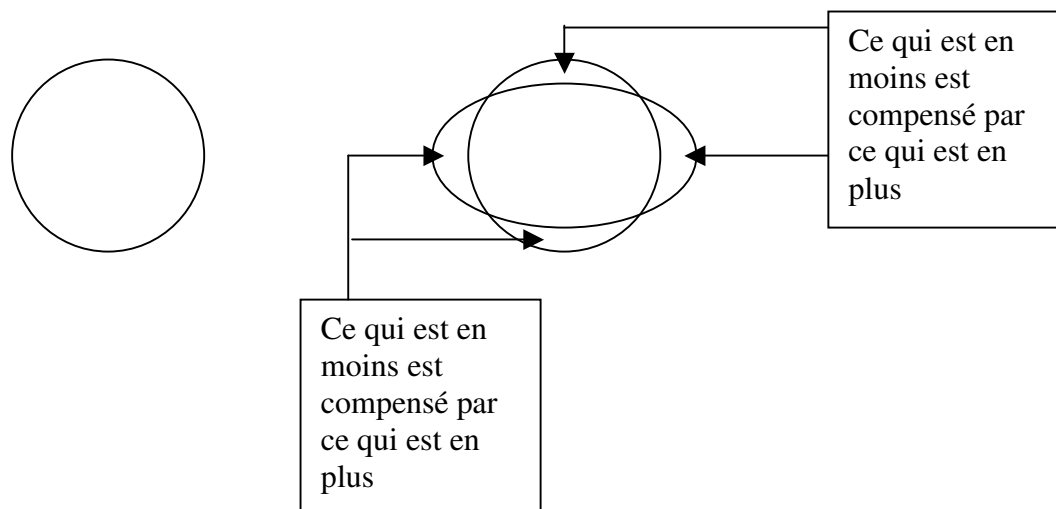
Le mode de calcul du périmètre, comme il est fait, mérite d'être analysé :



On voit ici clairement le mouvement de pensée qui traduit la perception en opération.

Corrélativement, à périmètre constant, nous avons tendance à penser que l'aire ne change pas. Par exemple, on a tendance à penser que « la surface d'un cercle ne change pas quand on la transforme en ovale ».

Cette erreur, s'appuie sur des compétences opératoires de haut niveau (Invariance par compensation) qu'un schéma permet de comprendre :



Les mathématiciens savent bien que ceci n'est pas vrai.

Face à ces erreurs récurrentes que nous pouvons repérer chez nos élèves notamment à l'école de base, on peut se poser la question : que faire pour aider ces élèves à surmonter et dépasser leurs conceptions spontanées relatives à cette difficulté ? Certains travaux de didactique des mathématiques ont proposé des remédiations qui traitent de ces difficultés.

#### **XIV. 1 Les étapes de l'apprentissage du calcul d'aire et de périmètre**

Les étapes décrites ci-dessous constituent une façon de faire évoluer les conceptions des élèves concernant les ambiguïtés relatives au calcul d'aire et de périmètre en leur présentant un apprentissage assez cohérent.

#### **XIV. 2 Dissociation des concepts d'aire et de périmètre**

Un apprentissage qui commence par un travail de dissociation entre les concepts d'aire et de périmètre peut s'avérer pertinent. Ceci suppose d'explorer en fait des situations où :

- à périmètre constant les aires vont varier,
- à aire constante, les périmètres vont varier
- le périmètre et l'aire vont varier dans le même sens (ce qui n'est pas surprenant) mais aussi en sens contraire (ce qui est moins conforme à l'intuition).

#### **XIV. 3 Comparer ou/et mesurer**

Etudier les variations des périmètres et des aires lors de transformations particulières pose la question des procédures de comparaisons. Le recours trop rapide à des démarches faisant appel aux mesures risque de ne pas favoriser le travail de dissociation des concepts. Il est

donc souhaitable, si cela semble nécessaire, de recourir à des procédures de comparaison qui ne fassent pas appel à la mesure :

- Pour les périmètres : l'utilisation de ficelles peut permettre facilement des comparaisons directes.
- Pour les surfaces, la comparaison directe des aires est plus délicate. Deux cas sont à envisager :
  - 1) Le recouvrement d'une surface par l'autre est possible ;
  - 2) Le recouvrement direct n'est pas possible. Des découpages et des réorganisations sont nécessaires.

#### **XIV. 4 Types d'activités à proposer aux élèves afin de dissocier entre le concept d'aire et celui de périmètre**

- Comparaison de figures selon chacun des critères (périmètre et aire). Ceci permettra une prise de conscience chez les élèves que le classement de la plus petite à la plus grande ou de la plus grande à la plus petite d'un ensemble de figures dépend du critère retenu.
- Travail à périmètre constant : ce type d'activité permet de comparer selon leur aire des figures ayant même périmètre
- Travail à aire constante : ce type d'activité permet de comparer selon leur périmètre des figures ayant même aire.

Une évaluation sur ce type d'activités permet d'avoir une idée sur le niveau d'assimilation des élèves de ce type d'activités et de voir, par conséquent, s'il faut revenir sur certaines d'entre elles ou au contraire avancer vers d'autres objectifs.

#### **XIV. 4. 1 La question de la mesure**

Autant le problème de la mesure des périmètres ne pose que peu de difficultés, autant celui de la mesure des aires est délicat. Plusieurs aspects peuvent être identifiés :

##### **L'utilisation d'une unité de mesure :**

- Elle doit permettre de couvrir le plan. D'où les activités de pavage :
- Recherche des formes usuelles permettant le pavage
- Production, par transformations simples, de pièces originales

**Remarque :** Exhiber est une chose, exiger en est une autre.

Or, l'une des formes que les enfants ont tendance à choisir spontanément pour couvrir une surface est le cercle. En s'appuyant sur ce constat, il est bien de travailler, avec les élèves, certaines activités visant une approche de la notion de mesure des surfaces par le remplissage par des cercles. Cette méthode permet dans beaucoup de cas de comparer les

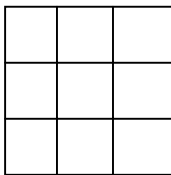


surfaces. L'existence de vides et de cercles n'entrant pas entièrement dans la forme permet en revanche de faire l'expérience des limites d'une telle approche. Il ne suffit donc pas d'exhiber le carré ou le rectangle comme la forme exigée. Il faut fonder cette exigence en multipliant les expériences s'appuyant sur d'autres formes.

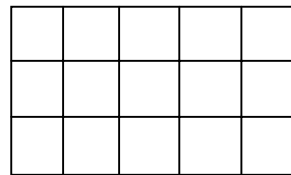
#### XIV. 4. 2 La construction de formules

De ce qui précède, il en résulte que :

- certaines formules ne sont que lecture-écriture de ce qui est. C'est le cas du carré (côté x côté) et du rectangle (Longueur x largeur)



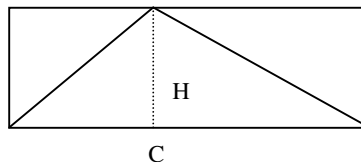
3 rangées de 3 carrés



3 rangées de 5 carrés

- d'autres proviennent de transformations réalisables :

C'est le cas du triangle comme dans l'exemple suivant :



Aire du triangle est la moitié de l'aire du rectangle d'où l'aire du triangle est  $\frac{CxH}{2}$

#### Remarque :

- C'est aussi le cas du parallélogramme.
- Enfin dans le cas du cercle aucune transformation réelle ne peut le transformer en rectangle ou carré (célèbre problème dit de la quadrature du cercle). La formule bien connue ( $S = \pi R^2$  s'appuie sur des techniques de calculs fondées sur les notions de limites et de calcul infinitésimal). Il est par contre possible (et souhaitable) de montrer que la surface du cercle est comprise entre  $2 R^2$  et  $4 R^2$  et même de développer des procédures d'approche.

## Dictionnaire des mots clés

- Axiomatique : مجموعة من المبادئ البسيطة مسلم بها تعتمد في التدليل الرياضي أو العلمي
- Compétences terminales : كفاءات نهائية
- Concept d'erreur : مفهوم الخطأ
- Concept d'obstacle : مفهوم العائق
- Conception : تصور
- Contrat didactique : العقد الـديداكتيكي
- Dévolution : الأيلولة
- Dysfonctionnement cognitif : خلل وظيفي إدراكي
- Evaluation : تقييم
- Formalisme : التشكيل
- Institutionnalisation : تأسيس القاعدة
- Obstacle : عائق
- Obstacle épistémologique : عائق إبستمولوجي
- Obstacle didactique : عائق ديداكتيكي
- Polysémique : متعدد المعاني
- Représentation : تصور
- Situation d'action : وضعية عمل
- Situation de formulation : وضعية صياغة
- Situation de validation : وضعية إثبات
- Socle de compétences : قاعدة كفاءات
- Scénario pédagogique : سيناريو بيداغوجي
- Schème : رسم خيالي
- Théorème en actes : نظرية فعلية
- Théorie des champs conceptuels : نظرية الأنسجة التصوراتية
- Théorie des situations : نظرية الوضعيات
- Typologie : نموذجية

## Bibliographie

- Arsac G. (1987). L'origine de la démonstration : essai d'épistémologie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 8/3.
- Baltier T. (1988). Une modélisation didactique des activités d'enseignement des premières propriétés de la symétrie orthogonale, *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*.
- Bentolila A (1996). *De l'illettrisme en général et de l'école en particulier*, Plon, Paris.
- Berte K. (1992). *Enseignement des mathématiques utilisant la réalité. IREM* de Bordeaux.
- Berthélot R, Salin M-H.(1994), *L'enseignement de la géométrie à l'école primaire*, Grand N, n°53.
- Berthoud-Papandropoulou I., & Kilcher H. (1997). The role of language in the metacognitive understanding of epistemic states. *Archives de Psychologie*, **65**, 117-129.
- Bkouche P. (1990). Enseignement de la géométrie. *pourquoi? Repères n°1*.
- BRITT-MARI BART.(1993), *Le savoir en construction*, Retz, Paris.
- Brousseau G.(1980), Problèmes de l'enseignement des décimaux, *RDM* n° 1/1, 1980.
- Brousseau G. (1981), Problèmes de didactique des décimaux, *RDM* n° 2/1.
- Brousseau G. (1986), Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherche en didactique des mathématiques* 7/2.
- Brousseau G. (1990), Utilité et intérêt de la didactique. *Grand N*, n°47.
- Chevallard Y. (1991), *La transposition didactique*, La Pensée Sauvage Editions.
- Develay M. (1989), *La Didactique des sciences*, Que sais-je?, P.U.F., Paris.
- Glaeser G. (1973), *Mathématiques pour l'élève professeur*, Hermann, Paris.
- HERSCOVICS N. et BERGERON J. (1989), Analyse épistémologique des débuts de l'addition. *Actes de la 41e rencontre de la Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques*. Bruxelles.
- Kamii C.K. (1985), *Young children reinvent arithmetic: Implications of Piaget's theory*, New York, Teachers College, Columbia University.
- Legrand M. (1993), Débat scientifique en cours de mathématique et spécificité de l'analyse, *Repères* n°10.
- Laborde C. (1988), L'enseignement de la géométrie en tant que terrain d'exploration de phénomènes didactiques, *Recherches en didactique des mathématiques*.

Perrin-Glorian M-J. (1986), Représentations des fractions et des nombre décimaux chez des élèves de CM2 et de collège, *Petit x* n° 10,1986.

Pochon L-O. (1991), Connaissances mathématiques à l'école primaire, bilan des acquisitions en fin de cinquième et sixième année, *fascicule 5, IRDP* Neuchâtel.

Toulmin S.(1973), *L'Éducation scientifique*, A. Colin, Paris, 1973.

Vergnaud G. (1991), La théorie des champs conceptuels, *RDM* Vol 10/2.3.