Houcine Chebli
Professeur de Mathématiques
Faculté des sciences de Tunis

2008

Corrigé des exercices du Chapitre I

1 Section 1

Exercice 1.1

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout x et y on a :

$$|< x,y >| \leq \|x\| \, . \, \|y\|$$

En particulier, pour $x = (1,1,...,1)$ et $y = (|a_1|,...,|a_n|)$, on obtient

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} (1)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i^2)\right)^{\frac{1}{2}}$$

c'est-à-dire

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

C'est le résultat voulu.

Exercice 1.2

1) Soit A une matrice carrée $(n \times n)$, définie positive et symétrique et soit φ l'application définie sur $R^n \times R^n$ à valeurs dans R par

$$\varphi(x,y) = \langle Ax,y \rangle$$

Il est facile de vérifier que φ est une forme sesquilinéaire, symétrique, définie positive et non dégénérée.

2) Soit φ un produit scalaire sur R^n. Soit (e_i), $1 \leq i \leq n$, la base canonique de R^n et posons

$$\varphi(e_i,e_j) = a_{ij}$$

La matrice $A = (a_{ij})$ ainsi définie est symétrique et définie positive. Soient x et y deux éléments de R^n

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \quad y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$$

En utilisant les propriétés de φ, on vérifie facilement que

$$\varphi(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = < Ax, y >$$

Exercice 1.3

i) On laisse au lecteur de vérifier que B est une forme hermitienne postive. Cependant, elle n'est pas dégénérée puisque, par exemple,

$$B(e_1, e_1) = 0$$

Donc B ne définie pas un produit scalaire.

ii) On vérifie facilement que les expressions données définissent des produits scalaires sur l'espace $_0$. Cherchons à déterminer le complété de l'espace $_0$ muni du produit scalaire

$$x, y = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y}_n$$

Pour tout $x \in (N)$, l'élément $P_n x$ défini par

$$P_n x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots)$$

appartient à $_0$ et

$$x - P_n x^{\,2} = \sum_{j=n}^{\infty} |x_j|^2 \longrightarrow 0, \quad (n \to \infty)$$

Ainsi, le complété de $_0$ est, dans ce cas, l'espace (N). On montre que c'est aussi le cas lorsque $_0$ est muni de l'un ou l'autre des deux autres produits scalaires.

Exercice 1.4

Exercice 1.5

Soit $(E, <.,.>)$ est un espace de Hilbert et soit $\Phi : E \times E \to C$ l'application définie par

$$(x,y) \to \Phi(x,y) = < x,y >$$

Soient (x_0,y_0) un élément de E. On a

$$|\Phi(x,y) - \Phi(x_0,y_0)| = |< x - x_0, y > + < x_0, y - y_0 >|$$

$$\leq \|y\| \|x - x_0\| + \|x_0\| \|y - y_0\|$$

Pour (x,y) dans un voisinage de (x_0,y_0), il existe une constante M telle que $\|y\| \leq M$ et $\|x\| \leq M$, on en déduit que

$$|\Phi(x,y) - \Phi(x_0,y_0)| \leq M (\|x - x_0\| + \|y - y_0\|)$$

La continuité de Φ en résulte.

Exercice 1.6

On vérifie facilement que l'espace $C([0,1])$, muni de la forme

$$(f,g) \to \int_0^1 f(t)\overline{g}(t)\,dt$$

est un espace préhilbertien, c'est-à-dire que la forme ci-dessus est un produit scalaire sur l'espace $C([0,1])$. Il s'agit de montrer que cet espace n'est pas complet. Soit $n \in N$ et soit (f_n) la suite de fonctions de $C([0,1])$, définie par

$$f_n(t) = \inf\{n, t^{-\frac{1}{3}}\}$$

Soient n et m deux entiers naturels, avec $n < m$. On a

$$(f_m - f_n)(t) = \begin{cases} (m - n), & \text{si } 0 < t \leq 1/m^3 \\ (t^{-\frac{1}{3}} - n), & \text{si } 1/m^3 \leq t < 1/n^3 \\ 0, & \text{si } 1/n^3 \leq t \end{cases}$$

On en déduit que

$$\|f_m - f_n\|^2 = \int_0^{\frac{1}{m^3}} (m - n)^2 dt + \int_{\frac{1}{m^3}}^{\frac{1}{n^3}} (t^{-\frac{1}{3}} - n)^2 dt$$

c'est-à-dire que

$$\|f_m - f_n\|^2 = (m - n)^2 \frac{1}{m^3} + \int_{\frac{1}{m^3}}^{\frac{1}{n^3}} (t^{-\frac{2}{3}} - 2nt^{-\frac{1}{3}} + n^2) dt$$

On en déduit facilement que, lorsque n et m tendent vers l'infini, $\|f_m - f_n\|^2$ converge vers 0 et donc la suite (f_n) est de Cauchy.

D'autre part, f_n converge presque partout vers f où $f(t) = t^{-\frac{1}{3}}$, on vérifie de plus que

$$\|f_n - f\|^2 = \frac{1}{n}$$

c'est-à-dire que (f_n) converge vers f. La fonction f n'est pas continue sur $[0,1]$ (elle n'est pas définie en 0), il en résulte que l'espace $C([0,1])$ n'est pas complet.

Exercice 1.7

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, muni d'une norme qui vérifie l'identité du parallélogramme, à savoir :

$$\forall x,y \in E, \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

On pose :

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2)$$

a/ On vérifie rapidement que pour tout x et tout y dans E

$$\overline{\varphi(y,x)} = \varphi(x,y) \quad \text{et} \quad \varphi(x,x) = \|x\|^2$$

b/ Par définition, on a d'une part

$$\varphi(x+z,y) = \frac{1}{4}(\|x+z+y\|^2 - \|x+z-y\|^2 + i\|x+z+iy\|^2 - i\|x+z-iy\|^2)$$

et d'autre part

$$\varphi(x,y) = \tfrac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2)$$

$$\varphi(z,y) = \tfrac{1}{4}(\|z+y\|^2 - \|z-y\|^2 + i\|z+iy\|^2 - i\|z-iy\|^2)$$

Ajoutons membre à membre ces deux dernières égalités, il vient, en posant $A = \varphi(x,y) + \varphi(z,y)$,

$$A = \frac{1}{8}(\|x+z+2y\|^2 - \|x+z-2y\|^2 + i\|x+z+2iy\|^2 - i\|x+z-2iy\|^2)$$

c'est-à-dire

$$A = \frac{1}{8}\big((x+z+y)+y)^2 - (x+z-y)-y)^2 + \\ + (x+z+iy)+iy)^2 - i(x+z-iy)-iy)^2\big)$$

On écrit la partie réelle de A sous la forme

$$\frac{1}{8}\big((x+z+y)+y)^2 + (x+z+y)-y)^2 \\ - (x+z-y)-y)^2 - (x+z-y)+y)^2$$

En faisant de même pour la partie imaginaire, on en déduit que

$$A = \varphi(x+z,y)$$

c/ Soient x et y deux éléments de E. Il est clair que

$$\varphi(0,y) = 0 \varphi(x,y) = 0$$

- Montrons par récurrence que pour tout entier $n \in N$,

  $$\varphi(nx,y) = n\varphi(x,y)$$

  On a d'abord $\varphi(1.x,y) = 1\varphi(x,y)$. Supposons que, pour un entier $n \in N$, on ait $\varphi(nx,y) = n\varphi(x,y)$. En utilisant b), il vient

  $$\varphi(nx+x,y) = \varphi(nx,y) + \varphi(x,y) = n\varphi(x,y) + \varphi(x,y) = (n+1)\varphi(y,x)$$

  Donc, pour tout entier $n \in N$, on a $\varphi(nx,y) = n\varphi(x,y)$.

- Montrons que cette relation est vraie pour tout n dans Z. On a d'abord

  $$\varphi(-nx,y) = \varphi(n(-x),y) = n\varphi(-x,y)$$

  et d'autre part, comme $\varphi(0,y) = 0 = \varphi(x-x,y)$, on a aussi

  $$\varphi(-x,y) = -\varphi(x,y)$$

  Il en résulte que, pour tout $n \in Z$, $\varphi(nx,y) = n\varphi(x,y)$.

- Montrons que cette relation est vraie pour tout $\lambda \in Q$. Posons $\lambda = p/q$ où $p,q \in Z$, $q = 0$. On remarque d'abord que

  $$\varphi(\lambda x,y) = \varphi(p(x/q),y) = p\varphi((x/q),y)$$

D'autre part, on peut toujours écrire

$$\varphi(x,y) = \varphi(q(x/q),y) = q\varphi(x/q),y)$$

ce qui donne

$$\varphi((x/q),y) = \frac{1}{q}\varphi(x,y)$$

On en déduit alors que

$$\forall \lambda \in Q, \quad \varphi(\lambda x,y) = \lambda\varphi(x,y)$$

- Cette relation est encore vraie pour $\lambda \in R$. En effet, un tel λ est limite d'une suite (λ_n) dans Q. La continuité de la norme implique la continuité de la fonction $\lambda \to \varphi(\lambda x,y)$. Or, d'après l'étape précédente $\varphi(\lambda_n x,y) = \lambda_n\varphi(x,y)$. Par passage à la limite, on en déduit la propriété voulue :

$$\varphi(\lambda x,y) = \lambda\varphi(x,y), \quad \forall \lambda \in R$$

- Enfin, pour montrer que cette égalité reste vraie pour tout $\lambda \in C$, il suffit de la vérifier pour $\lambda = i$, ce qui est immédiat.

Donc l'application φ définit un produit scalaire sur E et on a montré ainsi que : toute norme vérifiant l'identité du parallélogramme, provient d'un produit scalaire.

Exercice 1.8

Soit B une forme hermitienne positive sur l'espace vectoriel E. On pose

$$N = \{x \in E, B(x,x) = 0\}$$

a) Il est clair que N contient 0, de plus pour tout $x \in N$ et tout complexe λ, on a

$$B(\lambda x,\lambda x) = |\lambda|^2 B(x,x) = 0$$

On en déduit que λx appartient à N.

Soient x et y deux éléments de N. En développant $B(x \pm y,x \pm y)$, on en déduit les égalités

$$B(x \pm y,x \pm y) = \pm 2 \ (B(x,y))$$

Comme le premier membre est positif, on en déduit que le second membre est nul et par suite que $B(x \pm y,x \pm y) = 0$. N est donc un sous-espace vectoriel de E. De plus, l'inégalité de Cauchy-Schwarz permet de conclure que

$$(*) \qquad \forall x \in E, \forall u \in N, \quad B(x,u) = 0$$

b) Les éléments de E/N sont des classes d'équivalence modulo N. Deux éléments appartiennent à la même classe si leur différence appartient à N. Soient $\dot{x}$ et $\dot{y}$ deux classes d'équivalence de représentants respectifs x et y. On pose

$$\tilde{B}(\dot{x},\dot{y}) = B(x,y)$$

Il s'agit de montrer que $\tilde{B}$ ne dépend que des classes $\dot{x}$ et $\dot{y}$ et non des représentants de ces classes. Cela revient à montrer que

$$\forall u,v \in N \quad B(x+u,y+v) = B(x,y)$$

ce qui est une conséquence de la relation $(*)$. De par sa définition, $\tilde{B}$ hérite de B ses propriétés, à savoir qu'elle est hermitienne et positive. Montrons qu'elle est non dégénérée. Supposons que $\tilde{B}(\dot{x},\dot{y}) = 0$, il en résulte, en particulier, que $B(x,x) = 0$; x appartient donc à N et par suite $\dot{x}$ est la classe nulle.

Donc $\tilde{B}$ définit bien un produit scalaire sur E/N.

Exercice 1.9

Exercice 1.10

Pour tout entier n, on pose $p_n(x) = x^n$. Par des intégrations par parties, on montre que

$$\forall m \in N, \quad \int_0^\infty x^m e^{-x} dx = m!$$

Il en résulte que

$$\forall n,m \in N, \quad < p_n, p_m > = (n+m)!$$

En particulier $\|p_n\|^2 = (2n)!$, et par suite $\|p_n\| = \sqrt{(2n)!}$.

Exercice 1.11

a) Soit p_n le monôme qui à x associe $p_n(x) = x^n$. On a

$$c_0^2 = \int_{R^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty re^{-\frac{r^2}{2}} dxdr = 2\pi$$

Il en résulte que $c_0 = \sqrt{2\pi}$.

b) Soit $n \geq 1$. Une intégration par parties donne

$$c_n = \int_{\mathbb{R}} x^{2n} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= -x^{2n-1} e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} + (2n-1) \int_{\mathbb{R}} x^{2n-2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= (2n-1) c_{n-1}$$

On a donc la relation annoncée : $c_n = (2n-1)c_{n-1}$, $n \geq 1$.

c) La formule annoncée se démontre par récurrence à partir de la relation ci-dessus.

Exercice 1.12

Pour une fonction f de $E = (L^2(-a,a), dx)$, on désigne par $\check{f}$ la fonction définie, pour presque tout x de $(-a,a)$, par

$$\check{f}(x) = f(-x)$$

et on pose

$$\Phi(f) = f + \check{f},\ \psi(f) = f - \check{f},\ \Phi_1(f) = f,\ \Phi_2(f) = \check{f}$$

Les applications Φ_1 et Φ_2 sont linéaires et continues de E dans lui-même. C'est donc le cas des applications Φ et ψ. Or,

$$\Phi^{-1}(\{0\}) = G \quad \text{et} \quad \psi^{-1}(\{0\}) = F$$

Il en résulte que F et G sont deux sous-espaces vectoriels fermés de E.

Exercice 1.13

Exercice 1.14

Exercice 1.15

Si l'on désigne par A le premier membre, on voit que A^2 est majoré par

$$\int \left| \int |f(x,y)| dx \right|^2 dy = \int \left| \int |f(x,y)| dx \int |f(z,y)| dz \right| dy$$

Intégrant d'abord par rapport à y et utilisant l'inégalité de Hölder, il vient

$$A^2 \leq \int \left(\int |f(x,y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |f(z,y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} dx dz$$

le second membre est justement le carré du second membre de l'inégalité annoncée.

2 Section 2

Exercice 2.1

Puisque F_1 et F_2 sont des sous-espaces fermés de l'espace de Hilbert E, on peut appliquer le théorème de la projection orthogonale sur un sous-espace fermé. Pour tout x dans E, on pose

$$x_1 = P_{F_1}(x), \quad x_2^1 = P_{F_2}(x_1) \quad \text{et} \quad x_2 = P_{F_2}(x)$$

Le théorème de la projection affirme que x_1 est l'unique élément de F_1 tel que $x - x_1 \perp F_1$; x_2^1 est l'unique élément de F_2 tel que $x_1 - x_2^1 \perp F_2$ et x_2 est l'unique élément de F_2 tel que $x - x_2 \perp F_2$. Comme on a l'inclusion $F_2 \subset F_1$, $x - x_1$ étant orthogonal à F_1, est aussi orthogonal à F_2. Il en résulte que $(x - x_1) + (x_1 - x_2^1) = x - x_2^1$ est aussi orthogonal à F_2. L'unicité montre alors que $x_2 = x_2^1$, c'est-à-dire que $P_{F_2}(x) = P_{F_2}(x_1)$, ce dernier terme étant égal à $P_{F_2} \circ P_{F_1}(x)$, on en déduit que

$$\forall x \in E, \quad P_{F_2}(x) = P_{F_2} \circ P_{F_1}(x)$$

ce qu'il fallait prouver.

Exercice 2.2

M et N étant deux sous-espaces fermés de l'espace de Hilbert E, il est facile de vérifier que $M + N$ est un sous-espace vectoriel de E. Il s'agit de démontrer que, si M et N sont orthogonaux, ce sous-espace est, lui aussi, fermé. Soit (z_n) une suite de Cauchy de $M + N$, on a

$$z_n = x_n + y_n, \quad \text{avec} \quad x_n \in M, \; y_n \in N$$

Comme $\|z_n\|^2 = \|x_n\|^2 + \|y_n\|^2$, on en déduit que (x_n) et (y_n) sont des suites de Cauchy, respectivement dans M et N qui sont fermés, elles sont donc convergentes. Soit x la limite de la suite (x_n) et y la limite de la suite (y_n). x appartient à M et y appartient à N. On vérifie que la suite (z_n) converge vers $z = x + y$, élément qui appartient à $M + N$.

Exercice 2.4

Soient E un espace de Hilbert et x et y deux éléments de E de norme 1. Pour tout t, $0 < t < 1$, on a

$$\|tx + (1-t)y\| \leq t\|x\| + (1-t)\|y\| = t + (1-t) = 1$$

On montre que

$$tx + (1-t)y = 1$$

équivaut à dire que $x = y$ ou $x = -y$ d'où pour tout $y = \pm x$

$$tx + (1-t)y < 1$$

Le sous-ensemble $F = \{y \in E,\ \|y\| \leq 1\}$ est convexe. En effet, si x et y sont dans F, pour tout $0 \leq t \leq 1$, on a

$$\|tx + (1-t)y\| \leq t\|x\| + (1-t)\|y\| \leq 1$$

Exercice 2.5

Sur l'espace $C([0,1])$ des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs complexes, l'application

$$f \longmapsto \|f\| = |f(0)| + \|f\|_1 = |f(0)| + \int_0^1 |f(t)|dt$$

définit une norme sur E. En effet,

i) Si f est une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $\|f\| = 0$, alors

$$\int_0^1 |f(t)|dt = 0$$

Cela implique que f est la fontion nulle sur $[0,1]$.

ii) On vérifie immédiatement que, pour tout $\lambda \in C$, $\|\lambda f\| = |\lambda|\,\|f\|$.

iii) Enfin, pour $f, g \in C([0,1])$, on vérifie tout aussi facilement que

$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

La distance de la fonction constante égale à 1 au sous-espace F est donnée par

$$\mathrm{dist}(f_0, F) = \inf_{f \in F} \|f_0 - f\|$$

ce qui s'écrit

$$\mathrm{dist}(f_0, F) = \inf_{f \in F} \left(1 + \int_0^1 |1 - f(t)|dt\right)$$

cette distance est donc supérieure ou égale à 1. On montre qu'elle vaut 1. A cet effet, soit (f_n) la suite de fonctions définies par

$$\forall n \geq 2, \quad f_n(t) = \begin{array}{ll} 1, & \text{si } 1/n \leq t \leq 1 \\ nt, & \text{si } 0 \leq t \leq 1/n \end{array}$$

Pour tout $n \geq 2$, f_n est dans F et on a

$$\text{dist}(f_0, f_n) = 1 + \int_0^{\frac{1}{n}} (1 - nt)dt$$

$$= 1 + \frac{1}{2n}$$

Le second membre tend vers 1, quand n tend vers l'infini. Il en résulte que $\text{dist}(f_0, F) = 1$.
Supposons qu'il existe $f \in F$ tel que $\|f_0 - f\| = 1$. Il vient

$$1 + \int_0^1 |1 - f(t)|dt = 1$$

Cela implique que f est la fonction constante égale à 1 sur $[0,1]$. Ce qui est absurde, puisque f doit être nulle en 0. Donc il n'existe pas d'élément f dans F tel que $\|f_0 - f\| = \text{dist}(f_0, F)$.

Exercice 2.7

Soit F une partie convexe et fermée d'un espace de Hilbert E. D'après le Théorème 2.7, il existe un unique élément u_0 de F tel que

$$\text{dist}(0, F) = \|u_0 - 0\| = \inf\{\|u - 0\|, u \in F\}$$

Ce qui est le résultat voulu.

Exercice 2.8

On munit l'espace $E = L^2([-1,1])$ du produit scalaire et de la norme définis par

$$< f, g > = \int_{-1}^{1} f(t)\overline{g(t)}dt, \qquad \|f\|^2 = \int_{-1}^{1} |f(x)|^2 dx$$

et on considère le sous-espace vectoriel $F = \mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. Etant de dimension finie (égale à 3), F est un sous-espace de Hilbert de E. On pose $f(x) = x^3$. La quantité

$$\min_{a,b,c} \int_{-1}^{1} (x^3 - ax^2 - bx - c)^2 \, dx$$

représente le carré de la distance de l'élément f au sous-espace F. Le théorème de la projection sur un sous-espace de Hilbert assure qu'il existe un unique polynôme P_0 de F tel que $f - P_0 \perp F$ et

$$\min_{a,b,c} \int_{-1}^{1} (x^3 - ax^2 - bx - c)^2 \, dx = \| f - P_0 \|^2$$

Il s'agit de trouver le polynôme P_0 et de calculer sa distance à f. Ces calculs sont détaillés à l'exemple 2.17, et le polynôme P_0 est donné par

$$P_0(x) = \frac{3}{5}x$$

D'autre part,

$$\max_{\substack{\|g\|=1 \\ g \in F^\perp}} \int_{-1}^{1} x^3 g(x) dx = \max_{\substack{\|g\|=1 \\ g \in F^\perp}} < f - P_0, g >$$

Comme $f - P_0 \perp F$ et $| < f - P_0, g > | \leq \| f - P_0 \| \, \| g \|$, le maximum est atteint lorsque g est de la forme $g = \alpha(f - P_0)$, où $\alpha > 0$ est à choisir de façon que la norme de g soit égale à 1, c'est-à-dire telle que

$$\int_{-1}^{1} \alpha^2 (f - P_0)^2 dx = 1$$

Un calcul élémentaire montre que

$$\alpha = \frac{5\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{5\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} (x^3 - \frac{3}{5}x)$$

Exercice 2.9

On désigne par E l'espace de Hilbert des (classes de) fonctions de carré sommable sur $[0, +\infty[$ pour la mesure de densité e^{-x} par rapport à la mesure de Lebesgue, muni du produit scalaire :

$$\forall f, g \in E, \quad < f, g > = \int_0^{\infty} f(x) \overline{g(x)} e^{-x} dx$$

On désigne par F l'ensemble des polynômes sur $\mathbb{R}$, de degré inférieur ou égal à 2. C'est un sous-espace de Hilbert de E, dont la dimension est 3. On désigne par f le monôme défini par $f(x) = x^3$. La quantité

$$\min_{a,b,c} \int_0^\infty (x^3 - ax^2 - bx - c)^2 e^{-x} dx$$

représente le carré de la distance de l'élément f au sous-espace F. Le théorème de la projection sur un sous-espace de Hilbert assure qu'il existe un unique polynôme P_0 de F tel que $f - P_0 \perp F$ et tel que

$$\min_{a,b,c} \int_0^\infty (x^3 - ax^2 - bx - c)^2 e^{-x} dx = \| f - P_0 \|^2$$

Il s'agit de trouver le polynôme P_0 et de calculer sa distance à f. Le polynôme P_0 s'écrit sous la forme

$$P_0(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

de plus, comme $f - P_0 \in F^\perp$, on a les trois équations

$$< f - P_0, 1 > = 0, \quad < f - P_0, x > = 0 \quad \text{et} \quad < f - P_0, x^2 > = 0$$

En utilisant la formule suivante

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$$

qu'on peut démontrer par récurrence, les trois équations précédentes se traduisent par les suivantes:

$$\begin{aligned} 3! - \alpha 2! - \beta - \gamma &= 0 \\ 4! - \alpha 3! - \beta 2! - \gamma &= 0 \\ 5! - \alpha 4! - \beta 3! - \gamma 2! &= 0 \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} 2\alpha + \beta + \gamma &= 6 \\ 6\alpha + 2\beta + \gamma &= 24 \\ 24\alpha + 6\beta + 2\gamma &= 120 \end{aligned}$$

On en déduit facilement que $\alpha = 9$, $\beta = -18$ et $\gamma = 6$ et par suite

$$P_0(x) = 9x^2 - 18x + 6$$

Il reste à calculer $\| f - P_0 \|$.

Exercice 2.10

Soit F un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert E et soit $a \in E$. Soit $P_F(a)$ la projection orthogonale de a sur F. On sait que

$$\min_{x \in F} \|a - x\| = \|a - P_F(a)\|$$

D'autre part, pour tout $y \in F$, $\|y\| = 1$, on a l'inégalité

$$|\langle a - P_F(a), y \rangle| \leq \|a - P_F(a)\|$$

et l'égalité a lieu si, et seulement si, y et $a - P_F(a)$ sont proportionnels, c'est-à-dire si

$$y = \frac{a - P_F(a)}{\|a - P_F(a)\|}$$

Il en résulte que

$$\min_{x \in F} \|a - x\| = \max_{\substack{y \in F^{\perp} \\ \|y\| = 1}} |\langle a, y \rangle|$$

Exercice 2.11

On sait que l'espace $(C[0,1], \|\ \|_\infty)$ est un espace vectoriel complet. Soit (f_n) une suite de fonctions de F qui converge uniformément vers f. La fonction f est continue et

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} f_n(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \int_{\frac{1}{2}}^{1} f_n(x)\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx$$

On en déduit que f appartient à F. Celui-ci est donc fermé. Soient f et g deux fonctions de F et $\alpha \in [0,1]$. La fonction $\alpha f + (1 - \alpha)g$ est évidemment continue sur $[0,1]$ et on vérifie rapidement que

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (\alpha f(x) + (1 - \alpha)g(x))\,dx - \int_{\frac{1}{2}}^{1} (\alpha f(x) + (1 - \alpha)g(x))\,dx = 1$$

Il en résulte que F est un convexe.
Supposons que F contienne un élément de norme minimale, soit f_0 cet élément. La fonction f_0 étant continue sur $[0,1]$, elle atteint ses bornes. Il existe a et b dans $[0,1]$ tels que

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} f_0(x) = f_0(a) \quad \text{et} \quad \inf_{0 \leq x \leq 1} f_0(x) = f_0(b)$$

On a alors

$$\|f_0\|_\infty = f(a) \quad \text{ou bien} \quad \|f_0\|_\infty = -f(b)$$

On peut supposer que f_0 est à valeurs positives. On a alors

$$\forall f \in F, \quad \|f_0\|_\infty \leq \|f\|_\infty$$

Il est immédiat de voir que pour toute constante non nulle λ, la fonction $\lambda + f_0$ appartient aussi à F et donc

$$(*) \qquad \|f_0\|_\infty \leq \|\lambda - f_0\|_\infty$$

Prenons $\lambda = \frac{\|f_0\|_\infty}{2}$, puisque

$$\forall x \in [0,1], \quad -\frac{\|f_0\|_\infty}{2} \leq f_0(x) - \frac{\|f_0\|_\infty}{2} \leq \frac{\|f_0\|_\infty}{2}$$

on en déduit que

$$\left\| f_0 - \frac{\|f_0\|_\infty}{2} \right\|_\infty \leq \frac{\|f_0\|_\infty}{2}$$

Cette inégalité est en fait une égalité qui, au vue de $(*)$, conduit à une absurdité.

Exercice 2.12

i) On vérifie facilement que, pour tout réel $a < \frac{1}{2}$, on a

$$\int_0^\infty e^{2ax} e^{-x} dx = -\frac{1}{2a-1}$$

La fonction φ_a appartient donc à l'espace $L^2((0,+\infty);e^{-x}dx)$.
ii) Soient $a,b < \frac{1}{2}$. La distance de φ_a à φ_b est égale à $\|\varphi_a - \varphi_b\|$. On a

$$\mathrm{dist}(\varphi_a,\varphi_b) = \|\varphi_a - \varphi_b\|$$

$$\|\varphi_a - \varphi_b\|^2 = \int_0^\infty (e^{2ax} - 2e^{(a+b)x} + e^{2bx}) e^{-x} dx$$

$$= -\frac{1}{2a-1} + \frac{2}{a+b-1} - \frac{1}{2b-1}$$

En réduisant au même dénominateur, il vient

$$\|\varphi_a - \varphi_b\|^2 = \frac{2(a^2 + b^2 - 2ab)}{(1-2a)(1-2b)(1-a-b)}$$

$$= \frac{(\sqrt{2}|a-b|)^2}{(1-2a)(1-2b)(1-a-b)}$$

Ce qui prouve le résultat annoncé.

iii) Soit α un nombre réel et posons $f_\alpha(x) = \alpha x$. On a

$$\|f_\alpha\|^2 = \int_0^\infty (\alpha x)^2 e^{-x} dx = \alpha^2 \int_0^\infty x^2 e^{-x} dx = 2!\alpha^2$$

Il en résulte que la norme de f_α vaut 1 si $\alpha = \pm 1/\sqrt{2}$.

iv) Soit β un nombre réel et désignons par g et h_β les applications définies par

$$g(x) = x \quad \text{et} \quad h_\beta(x) = \beta - x$$

On a:

$$\langle g, h_\beta \rangle = \int_0^\infty x(\beta - x) e^{-x} dx$$

$$= \beta \int_0^\infty x e^{-x} dx - \int_0^\infty x^2 e^{-x} dx$$

$$= \beta - 2$$

Il en résulte que g et h_β sont orthogonales si et seulement si $\beta = 2$.

Exercice 2.13

On pose

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{et} \quad \langle\langle f, g \rangle\rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) dx$$

En posant $x = \sin u$, on vérifie que la première intégrale donne

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2\sin^2 x - 1) dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-\cos 2x) dx = \frac{-\sin 2x}{2} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

Alors que la deuxième intégrale vaut

$$< f,g > = \int_{-1}^{1} (2x^2 - 1)dx = -\frac{2}{3} = 0$$

Ce qui répond à la question.

Exercice 2.14

Pour des raisons de parité évidentes, on a

$$p_0,p_1 = p_0,p_3 = p_1,p_2 = p_2,p_3 = 0$$

D'autre part,

$$p_0,p_2 = \int_{-1}^{1} (3x^2 - 1)dx = [x^3 - x]_{-1}^{1} = 0$$

$$p_1,p_3 = \int_{-1}^{1} (5x^4 - 3x^2)dx = \left[x^5 - x^3\right]_{-1}^{1} = 0$$

Donc p_0,p_1,p_2 et p_3 sont deux à deux orthogonaux.

3 section 3

Exercice 3.1

L est une forme linéaire continue non identiquement nulle donc ker (L) est un sous espace vectoriel fermé de E (sous espace de Hilbert) et d'après le corollaire 2.10;

$$E = \ker(L) \quad (\ker(L))^{\perp}$$

Puisque L est une forme non nulle alors il existe $y_0 \in E, L(y_0) = 0$ et tout élément x de E peut s'écrire sous la forme:

$$x = \quad x - \frac{L(x)}{L(y_0)} y_0 \quad + \frac{L(x)}{L(y_0)} y_0$$

Il est facile de voir que le premier terme du second membre est dans ker(L), alors que le second terme est dans $\ker(L)^{\perp}$. Il en résulte, en particulier, que $(\ker(L))^{\perp}$ est engendré par $y_0 = 0$ et est donc de dimension 1.

Exercice 3.2

$E = \ell^2(\mathbb{N})$, soit n_0 fixé et soit L la forme linéaire définie par $L(x) = x_{n_0}$, où $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$. L est une forme linéaire continue sur $\ell^2(\mathbb{N})$. D'après le théorème de représentation de Riez, il existe un unique $a \in \ell^2(\mathbb{N})$, $a = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, tel que

$$\forall x \in \ell^2(\mathbb{N}), \quad L(x) = \langle x, a \rangle = x_{n_0}$$

Cela est équivalent à

$$\forall x \in \ell^2(\mathbb{N}), \quad \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i \overline{a_i} = x_{n_0}$$

Il en résulte que $a_i = \begin{cases} 0, & \text{si } i = n_0 \\ 1, & \text{si } i = n_0 \end{cases}$.

Exercice 3.3

Soit $E = \ell^2(\mathbb{N})$.

a) Soit $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de $\ell^2(\mathbb{N})$. Puisque la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|^2 < +\infty$, le terme général α_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini. La suite α_n est donc bornée. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$ on a:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n z^n| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n| \sum_{n\in\mathbb{N}} |z|^n = \frac{\sup |\alpha_n|}{1 - |z|} < +\infty$$

Donc la série $\sum \alpha_n z^n$ est absolument convergente par suite elle est convergente. On en déduit que le rayon de convergence de la série est supérieur ou égale à 1. Il varie selon la vitesse de convergence de la suite (α_n). Par exemple si $\alpha_n = 1/n!$, le rayon de convergence est infini.

b) Soit λ un nombre complexe, $|\lambda| < 1$, et soit L la forme linéaire définie par

$$L(\alpha) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \lambda^n$$

D'après le théorème de représentation Riez, il existe un unique $a \in \ell^2(\mathbb{N})$ tel que,

$$\forall \alpha \in \ell^2(\mathbb{N}), \quad L(\alpha) = \langle \alpha, a \rangle$$

c'est-à-dire tel que

$$\forall \alpha \in {}^{2}(\mathbb{N}), \quad \sum_{n\in N} \alpha_n \lambda^n = \sum_{n\in N} \alpha_n \overline{a_n}$$

Il en résulte que la suite a est donnée par $a = (\overline{\lambda^n}), n \in N$.

c) Puisque

$$|L(\alpha)| = |\alpha, a| \leq \|\alpha\| \, \|a\|$$

et que, pour $\alpha = a$, on a égalité, on en déduit que $\|L\| = \|a\|$.

Exercice 3.7

Exercice 3.8

Soient E un espace de Hilbert, (x_n) une suite de E qui converge faiblement vers x et (y_n) une suite qui converge (au sens de la norme de E) vers y. On a

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| &= |\langle x_n, y_n - y \rangle + \langle x_n - x, y \rangle| \\ &\leq |\langle x_n, y_n - y \rangle| + |\langle x_n - x, y \rangle| \\ &\leq \|y_n - y\| \, \|x_n\| + |\langle x_n - x, y \rangle| \end{aligned}$$

La suite (x_n) étant faiblement convergente, est bornée, il en résulte que le second membre tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Donc, $\langle x_n, y_n \rangle$ converge vers $\langle x, y \rangle$.