Houcine Chebli
Professeur de Mathématiques
Faculté des sciences de Tunis

2008

Corrigé des Exercices du Chapitre III

1 Section 1

Exercice 1.1

Il est clair que l'opérateur défini sur $L^2(0,1)$ par $Af = xf$ est linéaire. D'autre part, pour tout f dans $L^2(0,1)$, on a :

$$\|Af\|^2 = \int_0^1 x^2 |f(x)|^2 dx \leq \int_0^1 |f(x)|^2 dx = \|f\|^2$$

Cela montre que l'opérateur A est continu sur $L^2(0,1)$ et que $\|A\| \leq 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par f_n la fonction caractéristique de l'intervalle $[1/n,1]$. On a

$$\|Af_n\|^2 = \int_{1-\frac{1}{n}}^1 x^2 dx \geq \int_{1-\frac{1}{n}}^1 (1-\frac{1}{n})^2 dx = (1-\frac{1}{n})^2 \|f_n\|^2$$

Il en résulte que

$$\frac{\|Af_n\|}{\|f_n\|} \geq 1-\frac{1}{n}; \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Cela montre que $\|A\| = 1$.

Exercice 1.2

Les hypothèses montrent que, pour tout y, l'application $x \to a(x,y)$ est une forme linéaire continue. D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique élément qui dépend de y et que nous notons $w(y)$ tel que

$$a(x,y) = \langle x, w(y)\rangle, \quad \forall x \in E$$

et tel que $\|w(y)\| \leq M\|y\|$. Cette inégalité montre que l'application qui à y associe $w(y)$ est continue. On vérifie qu'elle est linéaire :

$$\forall x \in E, \quad a(x,y+z) = \langle x, w(y+z)\rangle$$

Comme a est sesquilinéaire, on a aussi

$$\forall x \in E, \quad a(x, y+z) = a(x,y) + a(x,z) = \langle x, w(y)\rangle + \langle x, w(z)\rangle$$

On en déduit que $w(y+z) = w(y) + w(z)$. D'autre part, pour tout scalaire α, on a

$$a(x, \alpha y) = \overline{\alpha} a(x,y)$$

Le premier membre de cette égalité vaut $\langle x, w(\alpha y)\rangle$ et le second membre vaut $\overline{\alpha}\langle x, w(y)\rangle$. Il en résulte que $w(\alpha y) = \alpha w(y)$. Finalement, on a prouvé que l'application $y \to w(y)$ est linéaire et continue. Il suffit donc de poser $w(y) = Ay$.

Exercice 1.3

L'inégalité triangulaire montre que, pour deux éléments A et B de $L(E)$, on a $\|A\| \leq \|A - B\| + \|B\|$. On en déduit alors l'inégalité

$$\|A_n - A_m\| \leq \|A_n - A_m\|$$

Par conséquent, si (A_n) est une suite de Cauchy, il en sera de même de la suite $(\|A_n\|)$.

Exercice 1.4

L'inégalité triangulaire permet d'écrire

$$\|Ax - A_n x_n\| \leq \|A\| \, \|x - x_n\| + \|x_n\| \, \|A - A_n\|$$

Les hypothèses montrent que, lorsque n tend vers l'infini, le premier terme du second membre tend vers 0 et le second terme fait de même car la suite (x_n), étant convergente, est bornée.

Exercice 1.5

Soit x un élént de E. Puisque F est dense dans E, il existe une suite (x_p) d'éléments de F qui converge vers x. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N_1 tel que

$$\forall p \geq N_1, \quad \|x - x_p\| \leq \varepsilon$$

Puisque (x_p) est dans F, la suite $n \to A_n x_p$ est convergente. Il existe donc un entier N_2 tel que

$$\forall n, m \geq N_2, \quad \|A_n - A_m\| \leq \varepsilon$$

Soit $N = \max(N_1, N_2)$. Pour n, m et p trois entiers naturels plus grands que N, on a

$$\|A_n x - A_m x\| \leq \|A_n x - A_n x_p\| + \|A_n x_p - A_m x_p\| + \|A_m x_p - A_m x\|$$

$$\leq C \|x - x_p\| + C$$

La suite (x_p) étant convergente, est bornée. L'inégalité ci-dessus montre alors que la suite (Ax_n) est de Cauchy et est donc convergente. Si l'on désigne par Ax sa limite, on vérifie que $x \to Ax$ est linéaire, de plus, pour tout entier $n \geq N$, on a

$$\|Ax\| \leq \|Ax - A_n x\| + \|A_n x\|$$

$$\leq \varepsilon + C \|x\|$$

Il en résulte que l'opérateur A est continu et que $\|A\| \leq C$.

Exercice 1.6

Pour tout élément x de $\ell^2(\mathbb{N})$, on a

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$$

On en déduit en particulier que la suite $\langle x, e_n \rangle$ tend vers 0. Par définition de l'opérateur A_n, on a

$$\forall x, \quad A_n x = \langle x, e_n \rangle e_n$$

On en déduit que la suite $(A_n x)$ converge vers 0, elle y converge donc simplement. On en déduit aussi que

$$\forall x, \quad \|A_n x\| \leq \|x\|$$

Cela montre que la norme de A_n est plus petite que 1. Comme $Ae_n = e_n$, il en résulte que, pour tout entier n, $\|A_n\| = 1$. Cependant, si la suite (A_n) convergeait vers un opérateur A, on aurait d'un coté $\|A\| = 1$ et d'un autre coté

$$\forall x, \quad Ax = \lim_{n \to +\infty} A_n x = 0$$

Ce qui est impossible.

Exercice 1.7

a) Par définition, on a

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} (\|Ax\|)$$

De plus,

$$\forall x,y \in E, \quad |\langle Ax,y \rangle| \leq \|Ax\| \, \|y\| \leq \|A\| \, \|x\| \, \|y\|$$

On déduit que

$$\sup_{\|x\|, \|y\| \leq 1} |\langle Ax,y \rangle| \leq \|A\| .$$

En prenant, dans cette inégalité, $y = \frac{Ax}{\|A\|}$, on trouve

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \langle Ax, \frac{Ax}{\|A\|} \rangle = \|A\|$$

Il en résulte que $\|A\| = \sup_{\|x\|, \|y\| \leq 1} |\langle Ax,y \rangle|$.

b) Soient A et B deux éléments de $L(E)$. La propriété

$$\forall x,y \in E, \quad \langle Ax,y \rangle = \langle Bx,y \rangle$$

est équivalente à la suivante

$$\forall x,y \in E \quad \langle Ax - Bx,y \rangle = 0$$

Il en résulte que, pour tout $x \in E$, l'élément $(Ax - Bx)$ est orthogonal à E, c'est donc l'élément nul. D'où l'égalité $A = B$.

c) Un calcul élémentaire, laissé au lecteur, permet de prouver l'identité de polarisation annoncée.

d) Compte tenu de l'identité de polarisation ci-dessus, la propriété

$$\forall x \in E, \quad \langle Ax,x \rangle = \langle Bx,x \rangle$$

implique la suivante

$$\forall x,y \in E, \quad \langle Ax,y \rangle = \langle Bx,y \rangle$$

L'égalité $A = B$ est alors une conséquence de b).

e) Le résultat obtenu dans d) tombe en défaut dans le cas d'un espace de Hilbert réel. En effet, Soient A et B les deux éléments de $L(\mathbb{R}^2)$, représentés dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, par les matrices suivantes:

$$A = \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}, \quad B = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{matrix}$$

Il est facile de vérifier que

$$\forall X \in \mathbb{R}^2;\ AX,X = BX,X$$

alors que les opérateurs A et B ne sont pas égaux.

2 Section 2

Exercice 2.1

Soient $\lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de nombres complexes et T l'opérateur de multiplication dans $^2(\mathbb{N})$ défini par

$$\forall x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in {}^2(\mathbb{N}), \quad Tx = (\lambda_n x_n)$$

On a

$$Tx^{\ 2} = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n x_n|^2 \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n|^2 \ x^{\ 2}$$

On en déduit que $T \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n|$. D'autre part, pour tout e_k, $k \in \mathbb{N}$, de la base canonique de $^2(\mathbb{N})$, on a $Te_k = \lambda_k e_k$. Donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad T \geq \frac{Te_k}{e_k} = |\lambda_k|$$

Il en résulte que

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} |\lambda_k| \leq T$$

D'où l'égalité $T = \sup_{k\in\mathbb{N}} |\lambda_k|$.

Exercice 2.2

L'assertion (i) résulte immédiatement du changement de variables $y = x/$. Pour l'assertion (ii), soit $\delta > 0$ et posons encore $y = x/$. Alors

$$\int_{x>\delta} \Phi_t(x)\,dx = {}^{-n} \int_{y>\delta} \Phi(x/\ )\,dx = \int_{y>\delta/} \Phi(y)\,dy$$

Puisque Φ est intégrable et $\delta/$ tend vers l'infini lorsque tend vers 0, la dernière intégrale tend vers 0 avec . Pour la partie (iii), on remarque d'après (i) que $f(x) = \int_{R^n} \Phi_t(x)\,dx$ et par suite

$$\begin{aligned} |\Phi_t * f| &= \int_{R^n} [f(x-y) - f(x)]\Phi_t(y)\,dy \\ &\leq \int_{R^n} |f(x-y) - f(x)|\Phi_t(y)^{1/p}\Phi_t(y)^{1/q}\,dy \end{aligned}$$

où $1/p + 1/q = 1$. En appliquant l'inégalité de Hölder et en intégrant par rapport à x, on voit que $\|f * \Phi_t(x) - f(x)\|_p^p$ est majorée par

$$\int_{R^n} \left(\int_{R^n} |f(x-y) - f(x)|^p \Phi_t(y)\,dy \right) \left(\int_{R^n} \Phi_t(y)\,dy \right)^{p/q} dx$$

$$= \int_{R^n} \int_{R^n} |f(x-y) - f(x)|^p \Phi_t(y)\,dy\,dx$$

En changeant l'ordre des intégrations dans la dernière intégrale, ce qui est justifié car les fonctions sont positives), on obtient $\|\Phi_t * f - f\|_p^p \leq \int_{R^n} \Phi_t(y)\psi(y)\,dy$, où $\psi(y) = \|T_y f - f\|_p^p$, T_y étant l'opérateur de translation défini au début de ce paragraphe. Pour $\delta > 0$, on peut écrire

$$\int_{R^n} \Phi_t(y)\psi(y)\,dy = \int_{|y| < \delta} + \int_{|y| \geq \delta} = A_{t,\delta} + B_{t,\delta}$$

Etant donné $\eta > 0$, on peut choisir δ de façon que $\psi(y)$ soit strictement inférieur à η dès que $|y| < \delta$, il en résulte que pour tout $t > 0$, $A_{t,\delta} \leq \eta$. De plus, en utilisant l'inégalité de Minkowski, on peut voir que $\|\psi\|_\infty$ est majoré par $2^p \|f\|_p^p$) et par suite $B_{t,\delta}$ est, à une constante multiplicative près, majorée par $\int_{|y| \geq \delta} \Phi_t(y)\,dy$. On conclue grâce à (ii). L'assertion (iv) se démontre de façon tout à fait analogue.

Exercice 2.3

Soit Φ une fonction $C^\infty(R^n)$, à support dans $B(0,1)$ (la boule de centre l'origine et de rayon 1). On suppose que l'intégrale de Φ vaut 1. Soit p dans $[1,\infty[$ et soit f dans $L^p(R^n)$ à support compact. La fonction $\Phi_t * f$ est C^∞ et à support compact. D'après l'exercice précédent,

$$\lim_{t \to 0} \|\Phi * f - f\|_p = 0$$

Cela montre que l'espace $C_c^\infty(R^n)$ est dense dans l'ensemble des fonctions de $L^p(R^n)$ à support compact. Ce dernier est lui-même dense dans $L^p(R^n)$.

Exercice 2.4

On remarque que

$$K f(s) = s^{-1} \int_0^\infty f(t) k(1, t/s)\, dt = \int_0^\infty f(st) k(1,t)\, dt$$

En utilisant la version intégrale de l'inégalité de Minkowski (voir exercice 15, section 1, chapitre I), on peut écrire

$$\|K f\|_p \leq \int_0^\infty \left(\int_0^\infty |f(st) k(1,t)|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} dt$$

Un changement de variables évident montre que le second membre vaut

$$\int_0^\infty k(1,t) t^{-\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty |f(u)|^p du \right)^{\frac{1}{p}} dt = \gamma \|f\|_p$$

L'inégalitée cherchée s'en déduit.

Exercice 2.5

3 Section 3

Exercice 3.1

La fonction m définie par

$$m(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2} \\ 1 & \text{si } \dfrac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

est continue sur l'intervalle $[0,1]$, à valeurs positives dont le maximum 1 est atteint sur $[1/2,1]$. Il en résulte que l'opérateur A, de multiplication par m, est borné, positif et sa norme vaut 1. Son spectre est donc inclus dans $[0,1]$. Soit λ dans $]0,1[$. La seule solution possible de l'équation $(Af - \lambda f) = 1$ est définie presque partout (en fait sauf en $x = \lambda/2$) par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x - \lambda} & \text{si } 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{1 - \lambda} & \text{si } \dfrac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Or, celle-ci n'appartient pas à $L^2([0,1],dx)$. Ainsi, pour un tel λ, l'opérateur $A - \lambda I$ n'est pas surjectif. Il en résulte que le spectre de A contient $]0,1[$, comme il est fermé, il est donc égale à $[0,1]$.
Soit λ dans $]0,1[$. L'équation $Af - \lambda f = 0$ implique que

$$(m(x) - \lambda) f(x) = 0, \quad \text{pour presque tout } x \in [0,1]$$

Compte tenu de l'expression de m, cela implique, nécessairement, que f est presque partout nulle. Pour $\lambda = 1$, la fonction $x \to m(x) - 1$ est nulle sur $[1/2,1]$. Il en résulte que, toute fonction de $L^2([0,1])$ à support dans $[1/2,1]$ est fonction propre de A relativement à la valeur propre 1. Celle-ci est donc de multiplicité infinie.

Exercice 3.2

Soit E un espace de Hilbert séparable, soit (e_n), $n \geq 1$, une base hilbertienne de E. Soit A l'opérateur de translation à droite défini par $Ae_n = e_{n+1}$, pour $n \geq 1$. Autrement dit, pour tout $x \in E$

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_{n+1}$$

a) L'expression précédente montre que, pour tout $x \in E$, $\|Ax\| = \|x\|$. Il en résulte que $\|A\| = 1$, que A est injectif et que le spectre de L'opérateur A est inclus dans la boule fermée de centre l'origine et de rayon 1 : $\sigma(A) \subset \overline{B}(0,1)$.

b) Soit $\lambda = 0$ un nombre complexe, avec $|\lambda| \leq 1$. L'équation $Ax - \lambda x = 0$ s'écrit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_{n+1} - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n = 0$$

On en déduit que, pour tout entier $n \geq 1$, on a $\langle x, e_n \rangle = \lambda \langle x, e_{n+1} \rangle$. Par récurrence, il vient

$$\forall n \geq 0, \quad \langle x, e_{n+1} \rangle = \frac{1}{\lambda^n} \langle x, e_1 \rangle$$

Comme la série de terme général $1/\lambda^n$ n'appartient pas à $\ell^2(\mathbb{N})$, la solution x, ainsi trouvée, n'appartient pas à E. Il en résulte que λ n'est pas valeur propre de A. Le spectre ponctuel de A est donc réduit à l'ensemble vide.

c) Soit $\lambda = 0$ un nombre complexe, avec $|\lambda| \leq 1$. L'équation $Ax - \lambda x = e_1$ s'écrit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_{n+1} - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle = e_1$$

On en déduit que

$$\langle x, e_1 \rangle = -\frac{1}{\lambda}$$

et par récurrence que

$$\forall n \geq 2, \quad \langle x, e_n \rangle = -\frac{1}{\lambda^n}$$

La série de terme général $-(1/\lambda^n)$ n'étant pas dans $\ell^2(\mathbb{N})$, on en déduit que l'équation $Ax - \lambda x = e_1$ n'admet pas de solution dans E, c'est-à-dire que l'opérateur $A - \lambda I$ n'est pas surjectif. Il en résulte que λ appartient au spectre de A.

En conclusion, on vient de montrer que $\sigma_p(A) = \emptyset$ et $\sigma(A) = \overline{B(0,1)}$.

Exercice 3.3

Soient a un réel non nul et soit τ_a l'opérateur de translation, défini sur $L^2(\mathbb{R}, dx)$ par :

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}, dx), \quad \tau_a f(x) = f(x - a)$$

Pour toute f dans $L^2(\mathbb{R}, dx)$, on a

$$\tau_{-a} \tau_a f = \tau_a \tau_{-a} f = f$$

Cela montre que τ_a est inversible et que $(\tau_a)^{-1} = \tau_{-a}$. D'autre part, la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ étant invariante par translation, on en déduit que

$$\|\tau_a f\| = \|(\tau_a)^{-1} f\| = \|f\|$$

Les opérateurs τ_a et τ_{-a} sont donc injectifs et leurs spectres sont inclus dans $\overline{B(0,1)}$. Ce qui montre que

$$\|\tau_a\| = \|(\tau_a)^{-1}\| = 1$$

On déduit que $\sigma(\tau_a) \subset \overline{D(0,1)}$ et par suite, tout $\lambda \in \mathbb{C}$ de module $|\lambda| > 1$, est dans l'ensemble résolvant de $\tau_{\pm a}$. Soit λ un nombre complexe non nul, avec $|\lambda| < 1$. On a

$$\tau_a - \lambda I = \tau_a (I - \lambda \tau_a \tau_{-a}) = -\lambda \tau_a (\tau_{-a} - \lambda^{-1} I)$$

Comme $|\lambda^{-1}| > 1$, le dernier terme de l'égalité ci-dessus est un opérateur inversible et il en est de même du premier. On en déduit qu'un tel λ est dans l'ensemble résolvant de $\tau_{\pm a}$. Il en résulte finalement que le spectre de l'opérateur $\tau_{\pm a}$ est inclus dans le cercle unité.

Exercice 3.4

Soit $\varphi \in L^1(\mathbb{R},dx)$ et soit A l'opérateur de convolution par φ, défini sur l'espace $L^2(\mathbb{R},dx)$ par

$$Af = \varphi * f = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x-t)f(t)\,dt, \quad f \in L^2(\mathbb{R},dx)$$

Pour tout élément g de $L^2(\mathbb{R},dx)$, on a l'équivalence

$$f \in L^2(\mathbb{R},dx),\ Af - \lambda f = g \Longleftrightarrow \hat{f} \in L^2(\mathbb{R},dx),\ (\hat{\varphi} - \lambda)\hat{f} = \hat{g}$$

Si λ appartient à l'adhérence des valeurs de $\hat{\varphi}$, la seule solution possible de l'équation $(\hat{\varphi} - \lambda)\hat{f} = \hat{g}$, donnée par $\hat{f} = \hat{g}/(\hat{\varphi} - \lambda)$ n'appartient pas à l'espace $L^2(\mathbb{R},dx)$. L'opérateur $A - \lambda I$ n'est donc pas surjectif. Un tel λ est dans le spectre de A. En revanche, si λ est dans le complémentaire de l'adhérence des valeurs de $\hat{\varphi}$, la fonction

$$\psi = \frac{1}{\hat{\varphi} - \lambda}$$

est bien définie sur $\mathbb{R}$. De plus, la fonction φ étant dans $L^1(\mathbb{R},dx)$, sa transformée de Fourier $\hat{\varphi}$ est une fonction continue qui tend vers 0 à l'infini. On en déduit que la fonction ψ est une continue et bornée sur $\mathbb{R}$. Il en résulte que la fonction $\psi\hat{g}$ est dans $L^2(\mathbb{R},dx)$. Sa tranformée de Fourier inverse est alors l'unique solution de l'équation $Af - \lambda f = g$. Un tel λ est donc dans l'ensemble résolvant de l'opérateur A.

Exercice 3.5

Soit $\varphi \in L^1(\mathbb{T},dt)$ et soit A l'opérateur de convolution par φ, défini dans l'espace $L^2(\mathbb{T},dt)$ par

$$Af = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x-t)f(t)\,dt$$

Pour $n \in \mathbb{Z}$ et $f \in L^2(\mathbb{T},dt)$, on désigne par $c_n(f)$ les coefficients de Fourier de f. Soit λ non nul, avec $\lambda = c_n(\varphi), \forall n \in \mathbb{Z}$, et soit g dans $L^2(\mathbb{T},dt)$. L'équation

$$f \in L^2(\mathbb{T},dt),\ Af - \lambda f = g$$

est équivalente à la suivante

$$(c_n(f)) \in \ell^2(\mathbb{Z}),\quad c_n(f) = \frac{c_n(g)}{c_n(\varphi) - \lambda}, \forall n \in \mathbb{Z}$$

Comme $c_n(\varphi)$ tend vers 0, quand n tend vers l'infini, il existe une constante M telle que pour tout n on ait $|c_n(\varphi) - \lambda|^{-1} \leq M$. La suite

$$n \to \frac{c_n(g)}{c_n(\varphi) - \lambda}$$

appartient à l'espace $\ell^2(\mathbb{Z})$ et définit bien une fonction f de $L^2(T, dt)$. Ainsi, tout λ non nul est distinct de $c_n(\varphi)$ pour tout n est dans l'ensemble résolvant. D'autre part, f est fonction propre de A correspondant à une valeur propre λ (c'est-à-dire est solution de $Af - \lambda f = 0$) si, et seulement si, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\lambda = c_n(\varphi)$ et alors $f(x) = e^{inx}$. Cela veut dire que les valeurs propres de l'opérateur A sont les coefficients de Fourier de φ, comme le spectre de A est fermé et que $c_n(\varphi)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, il en résulte que $\sigma(A) = \{c_n(\varphi), n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$.

Exercice 3.6

Le noyau de Poisson du disque unité est défini, pour tout r, $0 \leq r < 1$, par

$$p_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2}$$

C'est une fonction continue, paire et 2π-périodique.

1. On vérifie rapidement que

$$\frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2} = \frac{1 - r^2}{1 - r(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + r^2} = \frac{1}{1 - re^{i\theta}} + \frac{re^{-i\theta}}{1 - re^{-i\theta}}$$

Comme $0 < r < 1$, le développement en série de chacun des deux derniers termes donne

$$p_r(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in\theta}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le coefficient de Fourier d'indice n de p_r est $r^{|n|}$. La fonction p_r étant paire, on a aussi

$$p_r(\theta - \theta) = p_r(\theta - \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{-in\theta} e^{in\theta}$$

Cela montre que la suite des coefficients de Fourier de la fonction $\theta \to p_r(\theta - \theta)$ est donc donnée par $n \to r^{|n|} e^{-in\theta}$.

2. L'opérateur de convolution par la fonction p_r est défini, pour tout $f \in L^2[0,2\pi]$, par

$$P_r f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta)\, p_r(\theta - \theta)\, d\theta$$

Le second membre s'interprète comme le produit scalaire de f par la fonction $\theta \to p_r(\theta - \theta)$. La formule de Parseval permet alors d'en déduire que

$$P_r f = \sum_{n \in Z} \langle f, e_n \rangle r^{|n|} e_n$$

où l'on posé $e_n(\theta) = e^{in\theta}$. Pour que λ soit une valeur propre de P_r, il faut et il suffit qu'il existe une fonction propre f (non identiquement nulle) telle que $P_r f - \lambda f = 0$, c'est-à-dire telle que

$$\sum_{n \in Z} \langle f, e_n \rangle r^{|n|} e_n - \lambda \sum_{n \in Z} \langle f, e_n \rangle e_n = 0$$

ce qui s'écrit encore

$$(*) \qquad \sum_{n \in Z} \langle f, e_n \rangle (r^{|n|} - \lambda) e_n = 0$$

Si, pour tout n dans Z, λ est différent de $r^{|n|}$ 0, l'équation $(*)$ implique que $\langle f, e_n \rangle = 0$. Ceci étant pour tout $n \in Z$, on en déduit que f est nulle, ce qui est absurde. Un tel λ n'est pas valeur propre de l'opérateur P_r. En revanche, s'il existe un entier $k \in Z$ tel que $\lambda = r^{|k|}$, alors l'équation $(*)$ est satisfaite pour $f = e_k$ et pour $f = e_{-k}$.

Cela montre que, pour tout $n \in Z$, la fonction e_n est fonction propre de P_r et que la valeur propre associée est $\lambda_n = r^{|n|}$.

3. Soit $\lambda = 0$ et $\lambda = r^{|n|}, \forall n \in Z$. L'opérateur $P_r - \lambda I$ est injectif. Montrons qu'il est surjectif.

Soit $g \in L^2[0,2\pi]$ et cherchons s'il existe $f \in L^2[0,2\pi]$ telle que

$$P_r f - \lambda f = g$$

Compte tenu des calculs en 2, cette équation s'écrit

$$\sum_{n \in Z} \langle f, e_n \rangle (r^{|n|} - \lambda) e_n = \sum_{n \in Z} \langle g, e_n \rangle e_n$$

et nous en déduisons les relations

$$\forall n \in \mathbb{Z}\ , \qquad \langle f, e_n \rangle = \frac{1}{(r^{|n|} - \lambda)} \langle g, e_n \rangle$$

On vérifie que la suite $n \to \langle f, e_n \rangle$ ainsi trouvée, est dans $\ell^2(\mathbb{Z})$. Il en résulte que la fonction

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(r^{|n|} - \lambda)} \langle g, e_n \rangle\, e_n$$

est bien dans $L^2[0, 2\pi]$. Ce qui prouve que l'opérateur $P_r - \lambda I$ est surjectif et donc inversible.

4. Puisque le spectre de P_r est fermé, ce qui précède permet de conclure que

$$\sigma_p(P_r) = \{r^n, n \in \mathbb{N}\} \quad \text{et} \quad \sigma(P_r) = \{0, r^n, n \in \mathbb{N}\}$$

Exercice 3.7

L'expression de $V^n f(x)$ se démontre par récurrence. En effet, elle est vraie pour $n = 1$ et si on suppose qu'elle l'est pour un entier n, il vient

$$\begin{aligned} V^{n+1} f(x) &= \int_0^x V^n f(y)\, dy = \int_0^x \int_0^y \frac{(y-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\, dt\, dy \\ &= \int_0^x \int_t^x \frac{(y-t)^{n-1}}{(n-1)!} dy\, f(t)\, dt = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)\, dt \end{aligned}$$

Ce qui prouve la relation (1) pour $n+1$ à la place de n. On sait que le spectre de V est réduit à l'élément 0. Pour $\lambda = 0$, $V - \lambda I$ est inversible, pour trouver l'expression de $R_V(\lambda) = (V - \lambda I)^{-1}$, on écrit

$$\begin{aligned} (V - \lambda I)^{-1} f(x) &= -\lambda^{-1} (I - \lambda^{-1} V)^{-1} f(x) \\ &= -\lambda^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} V^n f(x), \quad (\text{avec } V^0 = I) \\ &= -\lambda^{-1} f(x) - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\, dt \\ &= -\lambda^{-1} f(x) - \lambda^{-2} \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^x \frac{\lambda^{-m} (x-t)^m}{m!} f(t)\, dt \end{aligned}$$

En intervertissant les signes de sommation et d'intégration, qu'on justifiera, on arrive à l'expression désirée.

Exercice 3.8

Il est clair que si $A - \lambda I$ est injectif, il en sera de même des opérateurs $A_i - \lambda I$, $i = 1,2$. Inversement, si les deux opérateurs $A_i - \lambda I$, $i = 1,2$, sont injectifs, il en sera de même de l'opérateur $A - \lambda I$. En effet, supposons qu'il existe $f = f_1 + f_2$ (avec $f_i \in E_i$) non identiquement nul tel que $Af - \lambda f = 0$. Il en résulte que $A_1 f_1 - \lambda f_1 = 0$ et $A_2 f_2 - \lambda f_2 = 0$. Mais, l'un au moins de f_1 et f_2 est non identiquement nul, et par suite l'un au moins des opérateurs $A_i - \lambda I$, $i = 1,2$, est non injectif; ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi, on a montrer que $A - \lambda I$ est injectif si, et seulement si, les deux opérateurs $A_i - \lambda I$, $i = 1,2$, le sont. On montre de même que $A - \lambda I$ est surjectif si, et seulement si, les deux opérateurs $A_i - \lambda I$, $i = 1,2$, le sont.