Université de Carthage
Ecole Polytechnique de Tunisie
Première année Année universitaire 2007-2008

Houcine Chebli

Travaux dirigés : Série 3

Exercice 1

Montrer que, pour tout entier naturel k, on a

$$\mathcal{F}(\delta^{(k)}) = (2i\pi x)^k \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(x^k) = \frac{1}{(-2i\pi)^k}\delta^{(k)}$$

Ainsi, la transformée de Fourier, au sens des distributions, d'un polynôme est une combinaison linéaire de dérivées de la distribution de Dirac à l'origine.

Exercice 2

Calculer la transformée de Fourier des distributions tempérées définies par les fonctions suivantes :

$$f(x) = \cos(ax), \quad g(x) = \sin(ax)$$

Exercice 3

Soit T une distribution tempérée. Montrer que si T est paire (resp. impaire) alors sa transformée de Fourier $\mathcal{F}T$ est paire (resp. impaire).

Exercice 4

Calculer la transformée de Fourier de la distribution $vp(1/x)$.

Exercice 5

Calculer la transformée de Fourier des distributions tempérées suivantes :

$$H, \quad e^{2i\pi\lambda x}H, \quad \cos(2\pi\lambda x)H, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Exercice 6

On note $d\sigma_R$ la mesure de surface de la sphère de $\mathbb{R}^3$ de rayon $r > 0$. Elle définit une distribution à support compact, donc tempérée, par l'application

$$f \to \int_{x=r} f(x)d\sigma_r(x)$$

Montrer que

$$\mathcal{F}(d\sigma_r)(\xi) = 2r^2 \frac{\sin(2\pi r\ \xi)}{r\ \xi}$$