Université de Carthage
Ecole Polytechnique de Tunisie
Première année Année universitaire 2008-2009

Correction de la série 3

Exercice 1

On sait que $\mathcal{F}(T^{(k)}) = (2i\pi x)^k \mathcal{F}T$. En prenant $T = \delta$, on obtient

$$\mathcal{F}(\delta^{(k)}) = (2i\pi x)^k \mathcal{F}\delta$$

Comme $\mathcal{F}\delta = 1$ on en déduit la première relation annoncée. En prenant la transformée de Fourier inverse des deux membres de la relation ci-dessus, on obtient

$$\delta^{(k)} = \overline{\mathcal{F}}((2i\pi x)^k) = (-2i\pi)^k \mathcal{F}(x^k)$$

C'est la deuxième relation annoncée. $\square$

Exercice 2

On a montré que $\mathcal{F}(e^{2i\pi a x}) = \delta_a$, il en résulte que

$$\mathcal{F}(\cos(2\pi a x)) = \frac{1}{2}(\delta_a + \delta_{-a}) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(\sin(2\pi a x)) = \frac{1}{2i}(\delta_a - \delta_{-a})$$

Les transformées de Fourier des distributions définies par f et g en résultent en remplaçant a par $a/2\pi$. $\square$

Exercice 3

On rappelle d'abord que la propriété est vraie pour les fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire si une fonction ϕ de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est paire (resp. impaire) il en est de même de sa transformée de Fourier. Soit T une distribution tempérée paire. Par définition

$$\langle T, \phi\rangle = \langle T, \tilde{\phi}\rangle, \quad \text{où} \quad \tilde{\phi}(x) = \phi(-x)$$

On en déduit que T est paire si, et seulement si, $\langle T, \phi\rangle = 0$ pour toute fonction ϕ de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ impaire. Par définition

$$\langle \mathcal{F}T, \phi\rangle = \langle T, \mathcal{F}\phi\rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

Si ϕ est impaire, $\mathcal{F}\phi$ est impaire. Le second membre de l'égalité précédente est alors nul. Cela prouve que $\mathcal{F}T$ est paire. $\square$

Exercice 4

Posons $S = \mathrm{vp}(1/x)$ et $T = \mathcal{F}S$. On a déjà vu que $xS = 1$, il en résulte que

$$\mathcal{F}(xS) = \mathcal{F}1 = \delta$$

D'autre part, on a aussi $T' = -2i\pi\mathcal{F}(xS)$, il en résulte que

$$T' = \mathcal{F}(S)' = -2i\pi\delta$$

Par suite,

$$T = -2i\pi H + c$$

où c est une constante à déterminer. A cet effet, on remarque que la distribution $\mathrm{vp}(1/x)$ étant impaire, sa transformée de Fourier l'est aussi et par suite, pour toute fonction test ϕ paire, on aura $0 = \langle T, \phi\rangle$, soit :

$$0 = -2i\pi\int_0^\infty \phi(x)\,dx + c\int_{\mathbb{R}} \phi(x)\,dx = -2i\pi\int_0^\infty \phi(x)\,dx + 2c\int_0^\infty \phi(x)\,dx$$

On en déduit rapidement que $c = i\pi$ et par suite

$$\mathcal{F}(\mathrm{vp}(1/x)) = -2i\pi H + i\pi$$

Exercice 5

On sait que $H' = \delta$, donc $\mathcal{F}(H') = 1$. L'assertion 1 de la proposition 8.7 permet d'écrire $\mathcal{F}(H') = (2i\pi x)\mathcal{F}H$ et donc $(2i\pi x)\mathcal{F}H = 1$. Or, on a aussi $x\mathrm{vp}(1/x) = 1$. Il en résulte que

$$x\Big(2i\pi\mathcal{F}H - \mathrm{vp}(1/x)\Big) = 0$$

Il existe donc une constante c telle que

$$2i\pi(\mathcal{F}H) - \mathrm{vp}(1/x) = c\delta$$

En prenant la transformée de Fourier inverse des deux membres, il vient

$$2i\pi\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}H - \overline{\mathcal{F}}(\mathrm{vp}(1/x)) = c\overline{\mathcal{F}}\delta$$

Or, $\overline{\mathcal{F}}\delta = 1$ et l'exemple précédent montre que $\overline{\mathcal{F}}(\mathrm{vp}(1/x)) = 2i\pi H - i\pi$, on a donc

$$2i\pi H - (2i\pi H - i\pi) = c$$

d'où on déduit que $c = i\pi$ et par suite

$$\mathcal{F}H = \frac{1}{2i\pi}\mathrm{vp}(1/x) + i\pi\delta$$

Le calcul de la transformée de Fourier de $e^{2i\pi\lambda x}H$ est une conséquence immédiate de ce qui précède, en effet

$$\mathcal{F}(e^{2i\pi\lambda x}H) = \tau_\lambda \mathcal{F}H = \frac{1}{2i\pi}\mathrm{vp}\Big(\frac{1}{x-\lambda}\Big) + i\pi\delta_\lambda$$

La transformée de Fourier de $\cos(2\pi\lambda x)H$ s'en déduit facilement. $\square$

Exercice 6

Nous avons affaire à une distribution à support compact. Par conséquent, sa transformée de Fourier est la fonction C^∞ définie par

$$\mathcal{F}(d\sigma_r)(\xi) = \int_{\|x\|=r} \exp(-2i\pi x.\xi)d\sigma_r(x)$$

L'intégrant $e^{(-2i\pi x.\xi)} = e^{(-2i\pi\|\xi\|r\cos(\theta))}$ ne dépend que de l'angle θ entre les vecteurs x et ξ. Comme la mesure superficielle σ_r est invariante par rotation, on prendra, pour simplifier les calculs, l'axe $\overrightarrow{oz}$ parallèle au vecteur $\overrightarrow{o\xi}$ et on utilise les coordonnées sphériques :

$$\begin{array}{rcl} x & = & r\omega, \qquad \omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \\ \omega_1 & = & \cos\theta, \quad \omega_2 = \sin\theta\cos\varphi, \quad \omega_3 = \sin\theta\sin\varphi \\ \theta & \in &]0,\pi[, \qquad \varphi \in]0, 2\pi[\end{array}$$

On a ainsi

$$d\sigma_r = r^2 d\omega = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

On obtient alors facilement

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F}(d\sigma_r)(\xi) & = & r^2 \displaystyle\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \exp(-2i\pi r\,\|\xi\|\cos\theta)\sin\theta\, d\varphi d\theta \\ & = & 2r\dfrac{\sin(2\pi r\,\|\xi\|)}{\|\xi\|} \qquad \square \end{array}$$