Université du 7 novembre à Carthage
Ecole Polytechnique de Tunisie — Le 29 février 2008

Epreuve de Mathématiques 2
Durée 2h

Année d'étude : première année
Enseignants : H. Chebli - M. Bouaziz

N.B. *Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté de la rédaction et au soin porté à la présentation.*

Exercice 1. Soient $E = L^2((0,1), dx)$ et A l'opérateur de multiplication défini sur E par : $Af = xf$.

1. Montrer que A est un opérateur continu et déterminer sa norme.
2. Montrer que A est un opérateur auto-adjoint et positif.
3. Déterminer le spectre ponctuel $\sigma_p(A)$ et le spectre $\sigma(A)$.
4. Montrer que A n'est pas un opérateur compact.

Exercice 2.

1. Montrer que l'inverse dans $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ de la distribution $H + \delta'$ est la distribution $\cos(x)H$
2. En déduire la résolution de l'équation intégrale

$$\int_0^x \cos(x-t)f(t)\,dt = g(x), \quad x \geq 0$$

Exercice 3. Soit E un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$. Un opérateur $A \in \mathcal{L}(E)$ est dit positif si $\langle f, Af \rangle \geq 0$ pour tout $f \in E$. Soit $A \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur positif

1) Montrer que A est auto-adjoint.

2) Montrer que pour tout entier k, A^k est auto-adjoint.

On rappelle que pour un opérateur auto-adjoint $B \in \mathcal{L}(E)$,

$$\|B\| = \sup_{\|\phi\|=1} |\langle \phi, B\phi \rangle|$$

3) En considérant l'opérateur $B = A - \|A\| I$, où I est l'opérateur identité, montrer que

$$\left\| \frac{A}{\|A\|} - I \right\| \leq 1$$

Exercice 4. On pose

$$T = 3 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{(-1+3k)} - \delta_{(1+3k)}$$

1) Montrer que T est une distribution sur $\mathbb{R}$ périodique de période 3.
2) Montrer que T est la dérivée au sens des distributions d'une fonction f périodique de période 3 qu'on déterminera.
3) Soit F la primitive de f qui vérifie $F(0) = 0$. Montrer que

$$F(x) = \begin{cases} x, & \text{si } -1 < x < 1 \\ 3 - 2x, & \text{si } \quad 1 < x < 2 \end{cases}$$

4) Calculer les coefficients de Fourier (a_n) et (b_n) de F.
5) En déduire que le développement en série de Fourier de T est donné par

$$T = -4 \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{2n\pi x}{3}\right).$$

Fin.

Corrigé de l'exercice 4.

1) Pour une fonction test ϕ,

$$\langle T, \phi\rangle = 3\sum_{k\in\mathbb{Z}} [\phi(-1+3k) - \phi(1+3k)]$$

Puisque le support de ϕ est compact, la somme ci-dessus est limitée à un nombre fini N de termes. Il vient

$$|\langle T, \phi\rangle| 3N \sup_{x\in\mathbb{R}} |\phi(x)|$$

Cela prouve que $\phi \mapsto \langle T, \phi\rangle$ est bien définie, de période 3 et est linéaire. Si (ϕ_n) est une suite dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini, leur support est contenu dans un même intervalle de $\mathbb{R}$ et $\|\phi_n\|_\infty$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Donc

$$\lim_{n\to\infty} \langle T, \phi\rangle| = 0$$

2) T est la dérivée au sens des distributions d'une fonction f discontinue en $x_k = -1+3k$ et $y_k = 1+3k$, constante en dehors de ces points. Le saut de f en x_k est 3 et son saut en y_k est -3. Donc f est de la forme

$$f(x) = \begin{cases} a, & \text{si } -1 < x < 1 \\ a-3, & \text{si } 1 < x < 2 \end{cases}$$

3) Une primitive F de f, périodique de période 3 est de la forme

$$F(x) \begin{cases} ax+b, & \text{si } -1 < x < 1 \\ (a-3)x+c, & \text{si } 1 < x < 2 \end{cases}$$

La condition $F(0)$ impose $b = 0$, la continuité de F impose

$$a = a - 3 + c \quad \text{et} \quad F(-1) = F(2)$$

ce qui donne $a = 1$ et $c = 3$. On en déduit l'expression de F annoncée. On vérifie que F est une fonction continue, paire et de période 3.

4) Puisque F est impaire, ses coefficients (a_n) sont nuls. Ses coefficients (b_n) sont donnés par

$$b_n = \frac{4}{3}\int_0^{3/2} F(x)\sin(2n\pi x/3)\,dx, \quad n \geq 1$$

En tenant compte de l'expression de F, on a

$$b_n = \frac{4}{3}\int_0^1 x\sin(2n\pi x/3)\,dx + \frac{4}{3}\int_1^{3/2} x\sin(2n\pi x/3)\,dx$$

En effectuant les intégrations, on obtient

$$b_n = \frac{9}{n^2\pi^2} \sin(2n\pi/3)$$

On en déduit que la série de Fourier de F est absolument convergente vers F en tout point x de $\mathbb{R}$, on a donc

$$F(x) = \frac{9}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin(2n\pi/3) \sin(2n\pi x/3)$$

5) En dérivant deux fois terme à terme, au sens des distributions la série ci-dessus, on en déduit l'égalité

$$T = -4 \sum_{n=1}^{\infty} \sin\Big(\frac{2n\pi}{3}\Big) \sin\Big(\frac{2n\pi x}{3}\Big).$$

Corrigé de l'exercice 1.

1) Il est clair que l'opérateur défini sur $L^2(0,1)$ par $Af = xf$ est linéaire. D'autre part, pour tout f dans $L^2(0,1)$, on a :

$$\|Af\|^2 = \int_0^1 x^2 |f(x)|^2 dx \leq \int_0^1 |f(x)|^2 dx = \|f\|^2$$

Cela montre que l'opérateur A est continu sur $L^2(0,1)$ et que $\|A\| \leq 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par f_n la fonction caractéristique de l'intervalle $[1/n, 1]$. On a

$$\|Af_n\|^2 = \int_{1-\frac{1}{n}}^1 x^2 dx \geq \int_{1-\frac{1}{n}}^1 (1-1/n)^2 dx = (1-1/n)^2 \|f_n\|^2$$

Il en résulte que

$$\frac{\|Af_n\|}{\|f_n\|} \geq 1 - \frac{1}{n}; \forall n \in \mathbb{N}^*$$

On en déduit que $\|A\| = 1$.

2) Puisque A est l'opérateur de multiplication par une foonction réelle, il est auto-adjoint et, pour toute f dans E, on a $\langle Af, f\rangle \geq 0$. Cela prouve que A est un opérateur positif.

3) Puisque $\|A\| = 1$, on a $\sigma(A) \subset [0,1]$. Si λ est dans le spectre pontuel, il existe $f \in E$ non identiquement nul tel que $Af = \lambda f$, c'est-à-dire tel que $(x-\lambda)f = 0$. Cette équation impose que f est nul sauf peut être en $x = \lambda$, c'est-à-dire que f est presque partout nul ; ce qui est absurde. On en déduit que le spectre ponctuel de A est vide. Par ailleurs, si g est dans E, pour tout $\lambda \in [0,1]$, l'équation $(A - \lambda I)f = g$ n'admet pour solution possible que $f = g/(x - \lambda)$. Or celle-ci n'appartient pas à E. Ainsi, un tel λ appartient au spectre de A. Il en résulte que $\sigma(A) = [0,1]$.

4) On sait que le spectre de tout opérateur auto-adjoint et compact est non vide, en conséquence l'opérateur A n'est pas compact.

Corrigé de l'exercice 3.

1) Puisque A est borné, il admet un adjoint A^* dans $\mathcal{L}(E)$ et

$$\langle f, Af\rangle = \langle A^* f, f\rangle, \quad \forall f \in E$$

Comme A est positif, $\langle f, Af\rangle$ est réel (positif), donc

$$\langle f, Af\rangle = \langle Af, f\rangle = \langle A^* f, f\rangle, \quad \forall f \in E$$

c'est-à-dire que

$$\langle f, (A - A^*)f\rangle = 0, \quad \forall f \in E$$

On en déduit que $A = A^*$ (voir corollaire 4.10, chapitre sur les opérateurs bornés).

2) Puisque A est auto-adjoint, A^k est auto-adjoint pour tout entier $k > 0$.
- si $k = 2p$,

$$\langle A^{2p} f, f\rangle = \langle A^p f, A^p f\rangle = \|Af\|^2 \geq 0$$

- si $k = 2p + 1$, en posant $\phi = Af$, on a

$$\langle f, A^{2p+1} f\rangle = \langle A^p, A(A^p f)\rangle = \langle \phi, A\phi\rangle \geq 0$$

Ainsi, A^k est auto-adjoint positif.

3) On a

$$\|A - \|A\|I\| = \sup_{\|\phi\|=1} |\langle \phi, (A - \|A\|I)\phi\rangle|$$

Puisque $0 \leq \langle \phi, A\phi\rangle \leq \|A\|$, on a

$$|\langle \phi, (A - \|A\|I)\phi\rangle| = \|A\| - \langle \phi, A\phi\rangle \leq \|A\|$$

Cela prouve que $\|A - \|A\|I\| \leq \|A\|$. Ce qui équivaut à la relation voulue.