Université du 7 novembre à Carthage
Ecole Polytechnique de Tunisie — Le 1^{er} février 2008

Epreuve de Mathématiques 2
Durée 1h30

Année d'étude: première année
Enseignants: H. Chebli - M. Bouaziz

N.B. *Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté de la rédaction et au soin porté à la présentation.*

Exercice 1. Soit T_n une distribution définie par la fonction

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{k!}$$

1. Montrer que (T_n) converge vers 0 dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $T_n \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et que (T_n) ne converge pas dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. On pourra utiliser la fonction $\phi(x) = e^{-x^2/2}$.

Exercice 2. Soit $a > 0$. On désigne par Y_a la fonction qui vaut 1 sur $]a, +\infty[$ et 0 sur $]-\infty, a[$ et par H_a la distribution associée à Y_a.

1. Montrer que $H'_a = \delta_a$
2. Montrer que $H_{-a} - H_a$ est une distribution paire à support compact
3. Calculer $\overline{\mathcal{F}}(H_{-a} - H_a)$
4. En déduire la transformée de Fourier de la distribution définie par la fonction $\sin(ax)/x$.

Exercice 3. Calculer la transformée de Fourier de la distribution tempérée sur $\mathbb{R}$ définie par la fonction $x \mapsto F(x) = e^{-a|x|}$, $(a > 0)$, et en déduire celle de la fonction $x \mapsto G(x) = x/(1 + x^2)$.

Fin

Corrigé

Exercice 1.

1. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, il existe $R > 0$ tel que $\mathrm{supp}(\phi) \subset [-R, R]$. Il vient

$$\Big|\int_{\mathbb{R}} \frac{x^{2k}}{k!}\phi(x)\,dx\Big| \leq \frac{R^{2k+1}}{(2k+1)k!}\|\phi\|_\infty$$

   Le second membre de l'inégalité ci-dessus, est le terme général d'une série convergente, donc

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\int_{\mathbb{R}} \frac{x^{2k}}{k!}\phi(x)\,dx$$

   tend vers 0 quand n tend vers l'infini, cela veut dire que

$$\lim_{n\to\infty}\langle T_n, \phi\rangle = 0$$

   La suite (T_n) converge donc vers 0 dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

2. Considérons la fonction définie par $\phi(x) = e^{-x^2/2}$. Elle appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et posons

$$I_k = \int_{\mathbb{R}} \frac{x^{2k}}{k!}e^{-x^2/2}\,dx$$

   On montre par récurrence sur k que

$$I_k = \frac{2k-1}{k}I_{k-1}$$

   Comme $I_0 = \sqrt{2\pi}$, il vient

$$I_k = \frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{1\cdot 2\cdots k}\sqrt{2\pi}$$

   et par suite

$$\langle T_n, \phi\rangle = \frac{\sqrt{2\pi}}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{1\cdot 2\cdots k}$$

   Le second membre tend vers l'infini avec n, donc (T_n) ne converge pas dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Exercice 2.

1. On peut voir que $H_a = \tau_a H$, où H est la distribution de Heaviside. Il en résulte que $H'_a = \tau_a H' = \tau_a \delta = \delta_a$. On peut aussi remarquer que Y_a présente une discontinuité au point a et son saut en ce point vaut 1, comme elle est constante ailleurs, sa dérivé au sens des distributions est égal à δ_a.

2. La distribution $H_{-a} - H_a$ est définie par la fonction $Y_{-a} - Y_a$ et celle-ci vaut 1 sur $]-a, a[$ et 0 ailleurs, c'est donc une fonction paire dont le support est $[-a, a]$. Il en est de même de la distribution $H_a - H_{-a}$.

3. Pour calculer $\overline{\mathcal{F}}(H_{-a} - H_a)$, il suffit de calculer $\overline{\mathcal{F}}(Y_{-a} - Y_a)$. Il vient
$$\overline{\mathcal{F}}(Y_{-a} - Y_a)(\xi) = \int_{-a}^{a} e^{2i\pi x\xi}\, dx = \frac{\sin(2\pi a\xi)}{\pi\xi}$$
et $\overline{\mathcal{F}}(H_{-a} - H_a)$ est la distribution définie par la fonction $\dfrac{\sin(2\pi a\xi)}{\pi\xi}$.

4. Puisque $H_{-a} - H_a$ est paire, on peut voir que
$$\overline{\mathcal{F}}(H_{-a} - H_a) = \mathcal{F}(H_{-a} - H_a)$$
On en déduit que la transformée de Fourier de la distibution définie par la fonction $\dfrac{\sin(2\pi a\xi)}{\pi\xi}$ est égale à $H_{-a} - H_a$ et il suffit de remplacer a par $a/(2\pi)$ pour répondre à la question.

Exercice 3.

1. On a $\mathcal{F}(e^{2i\pi ax}) = \delta_a$, en remplaçant a par $a/(2\pi)$, on obtient
$$\mathcal{F}(e^{iax}) = \delta_{a/2\pi}$$

2. En utilisant ce qui précède, il vien
$$\mathcal{F}(\sin(ax)) = \frac{1}{2}(\delta_{a/2\pi} - \delta_{-a/2\pi})$$
D'autre part, on sait que
$$(-2i\pi)\mathcal{F}(x \sin ax) = (\mathcal{F}(\sin ax))'$$
Donc
$$\mathcal{F}(x \sin ax) = -\frac{1}{4i\pi}(\delta'_{a/2\pi} - \delta'_{-a/2\pi})$$

3. La fonction $F : x \mapsto e^{-a|x|}$ est paire et intégrable; on a donc

$$\mathcal{F}F(\xi) = 2\Re\mathrm{e}\left(\int_0^\infty e^{-ax} e^{-2i\pi x\xi}\,dx\right)$$

Un calcul élémentaire donne

$$\int_0^\infty e^{-ax} e^{-2i\pi x\xi}\,dx = \frac{1}{2i\pi\xi + a}$$

On en déduit que

$$\mathcal{F}F(\xi) = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2\xi^2}$$

En prenant $a = 2\pi$, il vient

$$\mathcal{F}F(\xi) = \frac{(\pi)^{-1}}{1+\xi^2}$$

La formule d'inversion de Fourier permet d'écrire

$$e^{-2\pi|x|} = \frac{1}{\pi}\mathcal{F}\Big(\frac{1}{1+\xi^2}\Big)(x)$$

En appliquant la relation $(\mathcal{F}f)' = (-2i\pi)\mathcal{F}(xf)$, on trouve

$$\mathcal{F}\Big(\frac{\xi}{1+\xi^2}\Big)(x) = -i\pi\mathrm{sgn}(x)e^{-2\pi|x|}$$

où $\mathrm{sgn}(x)$ désigne le signe de x.