



ELECTROCINETIQUE

Mosbah AMLOUK

Khaled RAOUADI

Said RIDENE

Attention !

Ce produit pédagogique numérisé est la propriété exclusive de l'UVT. Il est strictement interdit de la reproduire à des fins commerciales. Seul le téléchargement ou impression pour un usage personnel (1 copie par utilisateur) est permis.

Guide d'étude et fiche descriptive

Le but de ce module est de se familiariser aux concepts de base de l'électrocinétique.

Un résumé du cours

Le cours se divise en cinq chapitres: 1. En premier lieu sera présentée des Généralités sur le courant électrique et des applications en utilisant les lois d'Ohm et de Joule.

2. En second chapitre seront abordées les méthodes d'analyse des réseaux linéaires et plus spécifiquement l'application des théorèmes généraux sur des circuits électriques en courant continu.

3. En troisième chapitre sera présentée une étude des réseaux électriques en régimes transitoire et sinusoïdal.

4. Dans le quatrième chapitre ont été détaillées les réponses fréquentielles à une excitation sinusoïdale permanente pour des quadripôles (RC,...).

5. En dernier chapitre une présentation sommaire sur les diodes à jonction (Jonction P-N, diode Zener) a été présentée ainsi qu'une étude de quelques circuits se basant sur ces diodes.

Les mots clés de la leçon

Mots clefs : Lois d'Ohm et de Joule, réseaux linéaires: Théorèmes généraux, régimes transitoire et sinusoïdal, les quadripôles et les diodes à jonction.

Public cible :

Ce module destiné aux étudiants de licence de physique (première année de Licence) et des écoles préparatoires des études d'ingénieurs.

La durée de travail de l'étudiant : 21 Heures pour le cours et 21 heures pour les exercices.

La date de la dernière mise à jour : Année 2009

Les pré requis nécessaires : Les connaissances des propriétés générales des réseaux linéaires (loi des nœuds et loi des mailles) et des dipôles passifs et actifs (courant, tension, loi d'Ohm pour un dipôle passif....)

Les objectifs généraux du cours :

Ce module rassemble les éléments essentiels de l'électrocinétique enseignée dans le domaine de la physique générale. Il est structuré en cinq chapitres de cours et un groupe d'exercices couvrant l'ensemble des concepts abordés tout au long de ce module : loi d'Ohm, loi de Joule, lois de Kirchhoff, identifier le courant et la tension pour un dipôle et de tracer ses caractéristiques courant -tension . L'étudiant découvre en quelques pages, l'essentiel du cours où les connaissances indispensables sont présentées, de manière claire et précise. Il est ensuite confronté à une grande variété d'exercices: des simples applications du cours aux exercices plus élaborés, en passant par des thèmes très classiques. Ces exercices au nombre de 65 contiennent plus de 350 illustrations et figures de circuits. Leur résolution est systématiquement présentée dans tous les détails.

Les objectifs spécifiques

•1 : d'écrire l'expression du courant et celle de la densité du courant en régime continu dans un fil conducteur. Ensuite, de donner les lois de l'électrocinétique (loi d'Ohm, loi de Joule, lois de Kirchhoff) pour un réseau linéaire. Enfin, de schématiser les circuits équivalents en donnant les expressions des résistances équivalentes.

2: d'analyse des réseaux linéaires en termes de courant et de tension en appliquant les théorèmes généraux sur des circuits électriques en courant continu.

Ensuite, de discuter le signe et l'effet de l'intensité de courant sur les différents dipôles formant les réseaux.

3: de donner les expressions des courants et tensions en régime transitoire (régimes : apériodique, critique et pseudopériodique) pour les circuits LC, RC et LRC. Ensuite, d'écrire les impédances complexes pour chaque branche pour un réseau linéaire. Enfin, de choisir le théorème adéquat pour simplifier et schématiser les circuits équivalents et identifier le courant et la tension pour un dipôle.

4: d'écrire la fonction de transfert et le gain en décibel (en tension, en courant et en puissance). Ensuite, De représenter le diagramme de Bode. Enfin, de connaître le type de filtre (passe-bas, passe-haut, passe-bande et coupe bande).

5: de tracer la caractéristique non linéaire $I(V)$ d'une diode à jonction. Ensuite, de schématiser le circuit équivalent à une diode à jonction dans un réseau linéaire. Enfin, d'identifier et d'énumérer son rôle dans un réseau électrique.

CV des auteurs

CV bref: L'équipe pédagogique responsable de ce module est constituée :

▶ **Mosbah AMLOUK** Professeur de Physique à la Faculté des Sciences de Bizerte, membre de l'Équipe de Physique des Dispositifs à Semi-conducteurs. Ses recherches sont axées sur l'élaboration et l'étude des propriétés optoélectroniques de couches minces semi-conductrices.

▶ **Khaled RAOUADI** Professeur de Physique à la Faculté des Sciences de Bizerte, membre du laboratoire Matériaux, Organisation et Propriétés. Ses recherches sont axées sur l'étude des matériaux diélectriques ainsi que les polymères isolants.

▶ **Said RIDENE** est Maître Assistant à la Faculté des Sciences de Bizerte effectue des recherches dans le domaine de la physique des semi-conducteurs où il s'intéresse à la modélisation des hétéro-structures. Ses travaux sont principalement axés sur le calcul des structures de bandes, des transitions optiques dans les semi-conducteurs massifs et les structures lasers à multi-puits quantiques.

Mots clefs : Lois d'Ohm et de Joule, réseaux linéaires: Théorèmes généraux, régimes transitoire et sinusoïdal, les quadripôles et les diodes à jonction.

Introduction

Ce module destiné aux étudiants de licence de physique et des écoles préparatoires des études d'ingénieurs, rassemble les éléments essentiels de l'électrocinétique enseignée dans le domaine de la physique générale.

Il est structuré en cinq chapitres de cours et un groupe d'exercices couvrant l'ensemble des concepts abordés tout au long de ce module.

La présentation de ce guide d'étude a été conçue de manière à aborder progressivement les différentes notions. Au sein de chaque chapitre, l'étudiant découvre en quelques pages, l'essentiel du cours où les connaissances indispensables sont présentées, de manière claire et précise. Il est ensuite confronté à une grande variété d'exercices: des simples applications du cours aux exercices plus élaborés, en passant par des thèmes très classiques. Ces exercices au nombre de 65 contiennent plus de 350 illustrations et figures de circuits. Leur résolution est systématiquement présentée dans tous les détails. Ils permettent au lecteur de se familiariser avec les bases de l'électrocinétique, puis, en abordant des sujets plus complexes, d'acquérir suffisamment de recul et de savoir-faire pour résoudre avec succès n'importe quel problème.

En somme, ce module a été conçu avec un souci constant de pédagogie et une volonté de rendre les concepts de l'électrocinétique accessibles à chacun. Nous souhaitons que tout étudiant qui s'en sert puisse y trouver les clés de sa réussite.

Contenu du cours

ELECTROCINETIQUE : Éléments de cours et exercices corrigés

Le cours se divise en cinq chapitres:

- 1. En premier lieu sera présentée des Généralités sur le courant électrique et des applications en utilisant les lois d'Ohm et de Joule.**
- 2. En second chapitre seront abordées les méthodes d'analyse des réseaux linéaires et plus spécifiquement l'application des théorèmes généraux sur des circuits électriques en courant continu.**
- 3. En troisième chapitre sera présentée une étude des réseaux électriques en régimes transitoire et sinusoïdal.**
- 4. Dans le quatrième chapitre ont été détaillées les réponses fréquentielles à une excitation sinusoïdale permanente pour des quadripôles (RC,...).**
- 5. En dernier chapitre une présentation sommaire sur les diodes à jonction (Jonction P-N, diode Zener) a été présentée ainsi qu'une étude de quelques circuits se basant sur ces diodes.**

Buts et objectifs du cours

Le but de ce module est de se familiariser aux concepts de base de l'électrocinétique.

Plus spécifiquement, au terme de ce module, l'étudiant ou l'étudiante sera en mesure:

▶ **Chapitre 1:** d'écrire l'expression du courant et celle de la densité du courant en régime continu dans un fil conducteur. Ensuite, de donner les lois de l'électrocinétique (loi d'Ohm, loi de Joule, lois de Kirchhoff) pour un réseau linéaire. Enfin, de schématiser les circuits équivalents en donnant les expressions des résistances équivalentes.

▶ **Chapitre 2:** d'analyse des réseaux linéaires en termes de courant et de tension en appliquant les théorèmes généraux sur des circuits électriques en courant continu. Ensuite, de discuter le signe et l'effet de l'intensité de courant sur les différents dipôles formant les réseaux.

▶ **Chapitre 3:** de donner les expressions des courants et tensions en régime transitoire (régimes : apériodique, critique et pseudopériodique) pour les circuits LC, RC et LRC. Ensuite, d'écrire les impédances complexes pour chaque branche pour un réseau linéaire. Enfin, de choisir le théorème adéquat pour simplifier et schématiser les circuits équivalents et identifier le courant et la tension pour un dipôle.

▶ **Chapitre 4:** d'écrire la fonction de transfert et le gain en décibel (en tension, en courant et en puissance). Ensuite, De représenter le diagramme de Bode. Enfin, de connaître le type de filtre (passe-bas, passe-haut, passe-bande et coupe bande).

► **Chapitre 5: de tracer la caractéristique non linéaire $I(V)$ d'une diode à jonction. Ensuite, de schématiser le circuit équivalent à une diode à jonction dans un réseau linéaire. Enfin, d'identifier et d'énumérer son rôle dans un réseau électrique.**

Accueil du module 1 « Généralités sur le courant électrique : Lois d'Ohm et de Joule »

Ce chapitre traite des généralités sur le courant électrique : définition, vecteur densité de courant et notion sur la résistance d'un conducteur. Il introduit les caractéristiques des dipôles passifs (résistors) et des dipôles actifs (générateurs et récepteurs actifs). La puissance électrique en régime stationnaire d'un résistor est explicité en évoquant l'effet de Joule. Aussi, il traite les caractéristiques courant-tension des associations de dipôles (série et parallèle). Enfin, des applications en fin du chapitre sur ces dipôles en utilisant les lois d'Ohm et de Joule.

Les mots clés de la leçon

Mots clefs : caractéristiques courant-tension, lois d'Ohm et de Joule, dipôles passifs et actifs et associations de dipôles.

La durée de travail de l'étudiant :

environ 3-4 heures pour le cours et les applications

Les pré-requis nécessaires :

Les connaissances des propriétés générales du courant continu. Aussi, la connaissance des propriétés des réseaux linéaires (loi des nœuds et loi des mailles) et des dipôles passifs et actifs (courant, tension, loi d'Ohm pour un dipôle passif....)

Les objectifs de la leçon :

Ce chapitre rassemble les propriétés essentielles d'un réseau électrique : loi d'Ohm, loi de Joule, lois de Kirchhoff, identifier le courant et la tension pour un dipôle (passif et actif) et de tracer ses caractéristiques courant -tension . Aussi, il groupe un certain nombre d'exercices couvrant l'ensemble des caractéristiques des différentes associations (série et parallèle) de ces dipôles.

Objectifs

- 1- d'écrire l'expression du courant et celle de la densité du courant en régime continu dans un fil conducteur.
- 2-Ensuite, de donner les lois de l'électrocinétique (loi d'Ohm, loi de Joule, lois de Kirchhoff) pour un réseau linéaire.
- 3-Aussi, de schématiser les circuits équivalents en donnant les expressions des résistances équivalentes.
- 4-Enfin, de tracer la caractéristique linéaire $I(V)$ d'un dipôle. Ensuite, de schématiser le circuit équivalent à une diode à jonction dans un réseau linéaire. Enfin, d'identifier et d'énumérer son rôle dans un réseau électrique.

I/ Définitions

Un conducteur est un corps dans lequel des porteurs de charges peuvent se déplacer sous l'action d'un champ électrique $\vec{\mathcal{E}}$. Il est caractérisé par sa conductivité. Le courant électrique résulte du mouvement d'ensemble de ces porteurs de charges.

Soit \vec{v}_i la vitesse d'un porteur i . En absence de $\vec{\mathcal{E}}$ et à température uniforme, les porteurs sont en agitation thermique telle que leur mouvement est aléatoire de manière que la vitesse moyenne :

$$\langle \vec{v}_i \rangle = \vec{0}$$

Cette valeur moyenne s'étend sur un grand nombre de porteurs compris dans un petit volume dV . Lorsque $\langle \vec{v}_i \rangle \neq \vec{0}$, on dit qu'il y a un mouvement d'ensemble de porteurs donc un courant électrique.

II/ Vecteur densité de courant

L'intensité I du courant électrique à travers une surface (S) d'un

conducteur est donnée par : $I = \frac{dQ}{dt}$ où, dQ est la quantité de charge qui traverse (S) pendant l'intervalle de temps dt .

Lorsqu'il y a un seul type de porteur de charge, on définit, pour caractériser le mouvement d'ensemble des porteurs à la vitesse \vec{v} , le vecteur densité

de courant \vec{J} par : $\vec{J} = nq\vec{v}$, n étant le nombre de porteurs de charge par unité de volume et q désigne la charge du porteur. En général, on distingue plusieurs porteurs dans les électrolytes ou les semi-conducteurs.... Dans ces cas, le vecteur \vec{J} s'écrit de la manière générale suivante :

$$\vec{J} = \sum_k n_k q_k \vec{v}_k$$
 k représente le type de porteur présent dans le milieu considéré.

Exemple

Soit un cylindre, d'axe $x'Ox$ et de section droite S_0 , contenant des porteurs se déplaçant avec la vitesse \vec{v} selon l'axe des x où $\vec{v} = \frac{dx}{dt}$.

La charge dQ traversant S_0 est celle qui existait dans le volume dV avec $dV = S_0 dx = S_0 v dt$.

On définit la densité de charge par unité de volume ρ par :

$$\rho = nq = \frac{dQ}{dV} \text{ d'où : } dQ = nq dV = nqS_0 v dt.$$

On obtient : $I = \frac{dQ}{dt} = nqS_0 v = JS_0$

Dans le système international (SI), I s'exprime en ampère (A), Q en coulomb (C), t en seconde (s) et J s'exprime en ampère par mètre carré (A/m²).

Remarque

Dans le cas général, la relation liant I à \vec{J} s'exprime à l'aide de la double intégrale : $I = \iint \vec{J} \cdot d\vec{S}$

Si le courant circule sur une surface (Σ), il s'agit d'une nappe de courant (ou courant surfacique) et le vecteur densité de courant surfacique est défini par

: $\vec{J}_s = \sigma \vec{v}$ où, σ est la densité surfacique des charges mobiles ($\sigma = \frac{dQ}{d\Sigma}$).

Dans le système international, J_s s'exprime en (A/m).

III/ Tension ou différence de potentiel (d.d.p.)

On rappelle que pour un champ électrique uniforme $\vec{\mathcal{E}}$, créé par une différence de potentiel donnée par deux plaques parallèles A et B portées aux potentiels V_A et V_B ($V_A > V_B$), on a la relation : $\mathcal{E} = \frac{V_A - V_B}{d_{AB}}$ où d_{AB} est la distance entre les deux plaques.

La chute élémentaire du potentiel s'écrit : $-dV = \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{l}$. Par intégration, $\int_A^B -dV = \int_A^B \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{l} = V_A - V_B = U_{AB}$, est la tension (ou d.d.p.) entre

ces points. Dans le système international, l'unité de potentiel est le volt (V); c'est également celle de la tension U (ou d.d.p.).

IV/ Loi d'Ohm locale : notion de résistance

La conduction électrique est dite ohmique si, $\vec{J} = \gamma \vec{E}$; cette relation est connue sous le nom de la loi d'Ohm locale. γ est la conductivité électrique ; c'est une caractéristique du matériau.

Plus la conductivité est grande, plus le matériau est conducteur ($\gamma_{\text{cuivre}} = 58.10^6 \Omega^{-1}.m^{-1}$ et $\gamma_{\text{verre}} = 10^{-11} \Omega^{-1}.m^{-1}$).

La loi d'Ohm intégrale s'écrit : $U_{AB} = R.I$ où R est la résistance du conducteur.

$$R = \frac{\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\iint \vec{J} \cdot d\vec{S}} = \frac{\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\iint \gamma \vec{E} \cdot d\vec{S}}$$

Exemple de calcul de résistance

On considère un conducteur cylindrique de faible section droite S , parcouru par un courant I de densité uniforme \vec{J} . Deux sections droites A et B de ce conducteur, séparées par la distance $l = AB$, sont soumises aux potentiels V_A et V_B .

On peut écrire :

$$U_{AB} = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \mathcal{E} l$$

$$I = \iint \vec{J} \cdot d\vec{S} = JS = \gamma \mathcal{E} S$$

$$\text{d'où : } R = \frac{\mathcal{E} l}{I} = \frac{\mathcal{E} l}{\gamma \mathcal{E} S}$$

$$\text{Donc : } R = \frac{1}{\gamma} \frac{l}{S} \text{ ou } R = \rho_e \frac{l}{S}$$

$$\rho_e = \frac{1}{\gamma} \text{ est la résistivité électrique qui s'exprime en } (\Omega.m).$$

Ordres de grandeur

Cas d'une installation électrique :

$$I = 10 \text{ A}, S = 1 \text{ mm}^2 \text{ et } J = \frac{I}{S} = 10^7 \text{ A/m}^2.$$

Les fils électriques utilisés sont en cuivre de masse molaire $M = 64 \text{ g}$. Sa masse volumique $\rho_m \simeq 9 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$;

$$n = \frac{N \rho_m}{M} = \frac{6,02 \cdot 10^{23} \times 9 \cdot 10^3}{64 \cdot 10^{-3}} \simeq 8,5 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}, n \text{ est le nombre}$$

d'atomes par m^3 et N est le nombre d'Avogadro. Sachant qu'un atome de cuivre

donne un électron de conduction, la densité volumique de charge est :

$$\rho = n q_e = -8,5 \cdot 10^{28} \times 1,6 \cdot 10^{-19} = -13,5 \cdot 10^9 \text{ C/m}^3$$

$$\text{et } v = \frac{J}{|\rho|} = 0,74 \text{ mm/s} < 3 \text{ m/h}.$$

On remarque que contrairement à ce qui est communément admis, la vitesse de mouvement d'ensemble (ou vitesse de dérive) est très faible, de l'ordre de celle d'un escargot !

V/ Dipôle électrocinétique

Définitions

Un dipôle électrocinétique est un ensemble de conducteurs possédant deux bornes. On distingue deux catégories :

Les dipôles passifs

Ce sont des dipôles (les résistors) qui ne transforment l'énergie électrique qu'en énergie calorifique.

Les dipôles actifs

On distingue deux types de dipôles actifs :

a- Les générateurs qui transforment de l'énergie non électrique en une énergie électrique.

b- Les récepteurs qui transforment de l'énergie électrique en énergie autre que calorifique.

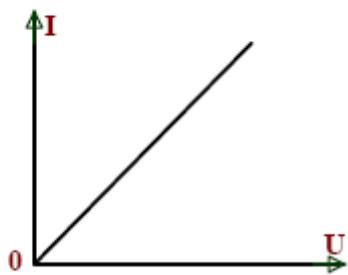
VI/ Caractéristique d'un dipôle

C'est la courbe représentative de la fonction $I = f(U)$ où I est l'intensité du courant qui traverse le dipôle et U la différence de potentiel aux bornes du dipôle.

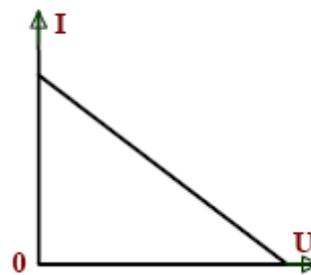
Dipôle linéaire

La caractéristique est une droite.

Deux exemples sont représentés en figure 1.1



résistance ohmique (résistor)



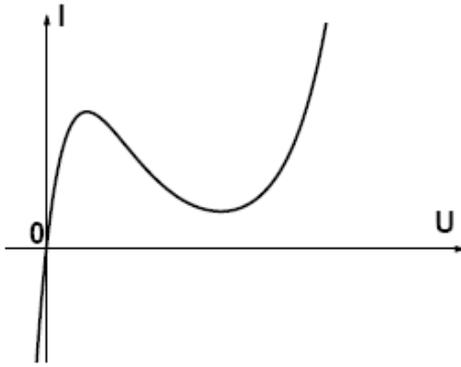
accumulateur (générateur)

Fig.1.1

Dipôle non linéaire

La fonction $I = f(U)$ n'est pas une droite.

La figure 1.2 en représente deux exemples /.



En un point de fonctionnement $P(U_1, I_1)$ de la caractéristique de la figure 1.2 (diodes) on définit deux types de résistances :

$$R_s = \left(\frac{U_1}{I_1} \right)$$

a- la résistance statique :

$$R_d = \left(\frac{dU}{dI} \right)_P$$

b- la résistance dynamique :

On remarque que si le dipôle est linéaire, $R_s = R_d$. La résistance R_d peut avoir une valeur négative (cas de la diode tunnel, figure 1.2). Comme dipôle non linéaire, on étudiera plus en détail la diode à jonction au chapitre 5.

VII/ Etude des dipôles passifs (résistors)

Puissance électrique en régime stationnaire

Soit l'élément de force $d\vec{F}$ agissant sur les porteurs contenus dans l'élément de volume dV d'un conducteur : $d\vec{F} = dq\vec{E} = \rho dV\vec{E}$

Pendant la durée dt , le travail de $d\vec{F}$ est d^2W tel que :

$$d^2W = d\vec{l} \cdot d\vec{F} = \rho dV \vec{E} \cdot \vec{v} dt$$

d'où : $d^2W = \vec{J} \cdot \vec{E} dV dt$

La puissance électrique dP , reçue par le dipôle, est donnée par :

$$dP = \frac{d^2W}{dt} = \vec{J} \cdot \vec{E} dV, P = \iiint \vec{J} \cdot \vec{E} dV, \text{ avec } dV = d\vec{S} \cdot d\vec{l}.$$

L'intégrale triple représente tout simplement une sommation de tous les éléments de puissance dP . Fig.1.3

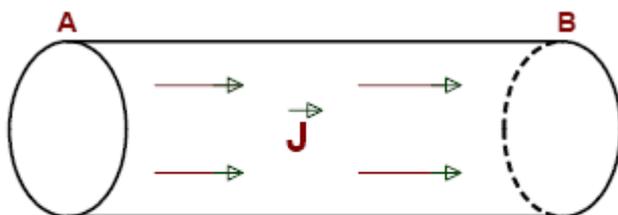


Fig.1.3

On peut écrire cette intégrale, qui représente la puissance totale reçue par

le dipôle de la manière suivante :

$$P = \int_A^B \vec{E} \cdot \left(\iint \vec{J} \cdot d\vec{S} \right) d\vec{l} = I_{AB} \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = I_{AB} (V_A - V_B) = UI$$

Convention récepteur

Pour un récepteur passif, le courant I et la tension U sont représentés par deux flèches opposées. Ceci correspond à une puissance reçue par le dipôle : $P = UI > 0$

Fig1.4

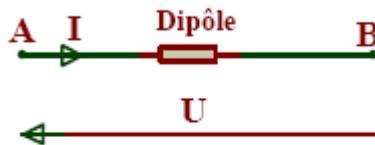


Fig.1.4

Remarque

Si la puissance reçue $P = UI < 0$, les vecteurs correspondants à I et à U ont même sens et le dipôle est qualifié de dipôle générateur. Fig1.5

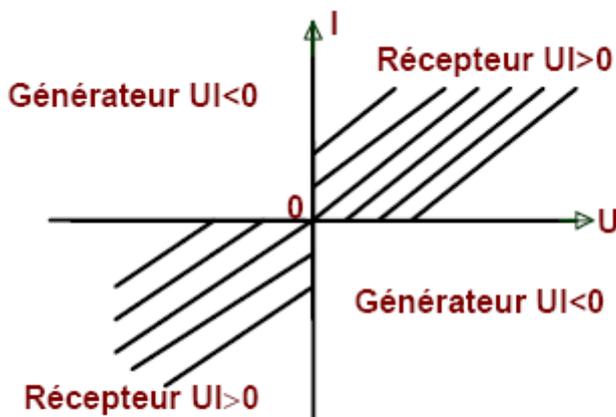


Fig.1.5

VIII/ Effet Joule

L'élément de puissance, reçue par un dipôle passif de conductivité électrique γ , s'écrit :

$$dP = \vec{J} \cdot \vec{E} dV = \frac{J^2}{\gamma} dV$$

Dans le modèle de conduction, on suppose qu'il y a des frottements au cours du mouvement d'ensemble des porteurs entraînant une puissance perdue dP' . Le bilan

en énergie stationnaire est tel que : $dP + dP' = 0$ avec, $dP' = \frac{-J^2}{\gamma} dV < 0$

Le signe (-), indique que dP' est une énergie perdue ou cédée à l'extérieur : c'est l'effet *Joule*, qui traduit la transformation de toute l'énergie reçue par le dipôle en chaleur. Dans le cas d'un résistor, la résistance R reçoit la puissance :

$$P = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R}$$

Association de résistors

Groupement en série

Dans un circuit électrique, deux dipôles sont dits montés en série s'ils sont traversés par le même courant d'intensité I . Les tensions aux bornes de ces deux dipôles en série s'ajoutent.

Cette définition peut se généraliser pour plusieurs dipôles en série, Fig1.6.

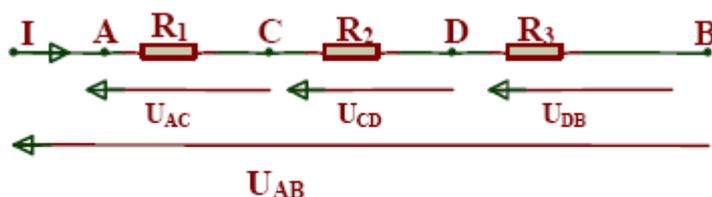


Fig.1.6

$$U_{AB} = V_A - V_B = (V_A - V_C) + (V_C - V_D) + (V_D - V_B)$$

$$U_{AB} = (R_1 + R_2 + R_3) I = R_{\acute{e}q} I, R_{\acute{e}q} = R_1 + R_2 + R_3$$

où $R_{\acute{e}q}$ est la résistance équivalente de cette association de résistors.

Dans le cas d'une association de N résistors en série, on a :

$$R_{\acute{e}q} = \sum_{i=1}^N R_i$$

Groupement en parallèle

Dans un circuit électrique, deux dipôles sont dits montés en parallèle s'ils sont soumis à la même tension U . Les courants traversant ces dipôles en parallèle s'ajoutent.

Cette définition peut se généraliser pour plusieurs dipôles en parallèle, Fig1.7.

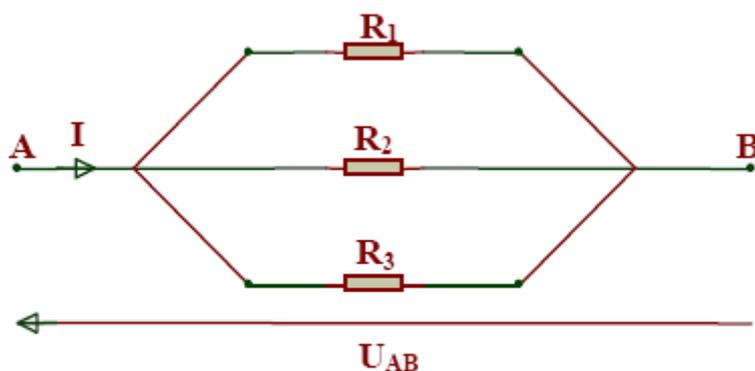


Fig.1.7

Les courants traversant R_1 , R_2 et R_3 s'écrivent

$$I_1 = \frac{U}{R_1}, I_2 = \frac{U}{R_2} \text{ et } I_3 = \frac{U}{R_3}$$

Le courant total est $I = I_1 + I_2 + I_3$

$$\text{d'où : } \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3} = \frac{U}{R_{\text{éq}}}$$

La résistance équivalente est telle que :

$$\frac{1}{R_{\text{éq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Ce résultat pourrait être obtenu en tenant compte de la puissance électrique. En effet, la puissance totale est donnée par la somme de puissances reçues par les

trois résistors :

$$P_e = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{U^2}{R_1} + \frac{U^2}{R_2} + \frac{U^2}{R_3}$$

d'où :

$$P_e = U^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = \frac{U^2}{R_{\acute{e}q}}$$

Pour une association de N résistors en parallèle :

$$\frac{1}{R_{\acute{e}q}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}$$

Remarque :

En introduisant la conductance $G = \frac{1}{R}$, il vient :

$$\frac{1}{G_{\acute{e}q}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{G_i}$$

en série

$$G_{\acute{e}q} = \sum_{i=1}^N G_i$$

en parallèle

Dans le système international, G s'exprime en Ω^{-1} ou en siemens (S).

Exemple d'application

Association mixte de résistors

Une association est dite mixte si elle comporte des résistors placés en série et d'autres en parallèle. Fig1.8.

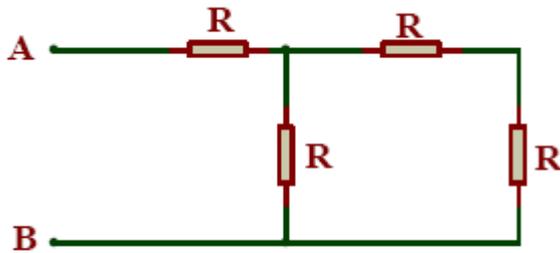


Fig.1.8

Dans le cas de la figure 1.8, les lois d'associations des résistors aboutissent à la

résistance équivalente R_{AB} entre les points A et B ,

$$R_{AB} = \frac{5R}{3}$$

IX/ Etude des dipôles actifs

Loi d'Ohm aux bornes d'un générateur de tension

Un dipôle générateur de tension est représenté par le schéma suivant :Fig1.9.

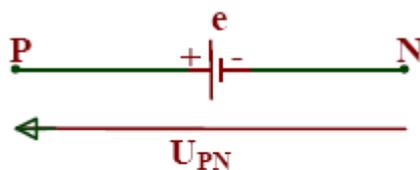


Fig.1.9

Lorsque le générateur fonctionne, les électrons se déplacent, à l'intérieur du générateur, du pôle P vers le pôle N . On peut attribuer ce mouvement à un champ électromoteur $\vec{\mathcal{E}}_m$ qui assure un "pompage" permanent de ces électrons vers le circuit extérieur.

Circuit ouvert

Lorsque le circuit est ouvert, on peut considérer que les électrons sont aurepos.

L'application de la relation fondamentale de la dynamique (*R.F.D.*) s'écrit :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} ; \quad q_e (\vec{\mathcal{E}}_s + \vec{\mathcal{E}}_m) = \vec{0}$$

avec $\vec{\mathcal{E}}_s$ le champ électrostatique dirigé de P vers N .

$$V_P - V_N = \int_P^N \vec{\mathcal{E}}_s \cdot d\vec{l}, \quad \vec{\mathcal{E}}_s = -\vec{\mathcal{E}}_m$$

$$\text{d'où : } \int_N^P \vec{\mathcal{E}}_m \cdot d\vec{l} = V_P - V_N = e$$

e est appelée force électromotrice (*f.e.m*) du générateur.

Circuit fermé

En régime stationnaire les électrons en mouvement avec la vitesse \vec{v} , à l'intérieur du générateur subissent l'action de forces de frottement, la (*R.F.D.*) donne :

$$-h\vec{v} + q_e (\vec{\mathcal{E}}_s + \vec{\mathcal{E}}_m) = \vec{0}$$

avec h est le coefficient de frottement visqueux. En déduit que :

$$\vec{v} = \frac{q_e (\vec{\mathcal{E}}_s + \vec{\mathcal{E}}_m)}{h}$$

$$\vec{J} = nq_e \vec{v} = \frac{nq_e^2}{h} (\vec{\mathcal{E}}_s + \vec{\mathcal{E}}_m) = \gamma (\vec{\mathcal{E}}_s + \vec{\mathcal{E}}_m) = \gamma \vec{\mathcal{E}}_T$$

$$\int_N^P \vec{\mathcal{E}}_T \cdot d\vec{l} = \int_N^P \vec{\mathcal{E}}_s \cdot d\vec{l} + \int_N^P \vec{\mathcal{E}}_m \cdot d\vec{l}$$

$$\text{or, } rI = -(V_P - V_N) + e$$

r est la résistance interne du générateur. D'où : $V_P - V_N = e - rI$

Cette équation représente la loi d'Ohm aux bornes du générateur.

La puissance reçue par le circuit extérieur est :

$$P = UI = (V_P - V_N) I = (e - rI) I \text{ soit : } P = eI - rI^2$$

d'où le bilan énergétique : $eI = rI^2 + (V_P - V_N) I$

rI^2 est la puissance perdue par effet Joule, tandis que $(V_P - V_N) I$ est la puissance cédée à l'extérieur du générateur et eI est la puissance totale

développée par le générateur.

Une autre définition de la *f.e.m* est $e = \frac{P}{I}$

Loi d'Ohm aux bornes d'un récepteur

Un récepteur (Fig1.10)

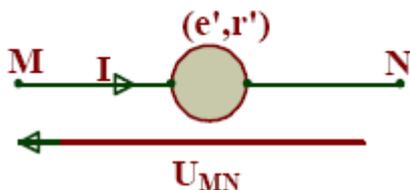


Fig.1.10

est un dipôle qui transforme l'énergie électrique en énergie utile (chimique ou motrice, autre que l'effet Joule). Il est alors caractérisé par une force contre-électromotrice définie par :

$e' = \frac{P'}{I}$ où P' est la puissance transformée par le récepteur.

Sachant que P est la puissance délivrée par le générateur, le bilan énergétique est:

$$P = (V_M - V_N) I = P' + rI^2$$

$(V_M - V_N) I$ représente la puissance reçue par le récepteur. P' est la puissance transformée et rI^2 est la puissance dissipée par effet Joule. L'équation traduisant la loi d'Ohm aux bornes du récepteur est : $V_M - V_N = e' + rI$

XI/ Schématisations

Générateur de tension

A partir de la loi d'Ohm, on peut écrire : $I = \frac{e}{r} - \frac{U}{r}$, avec $U = V_P - V_N$,

Fig1.11.

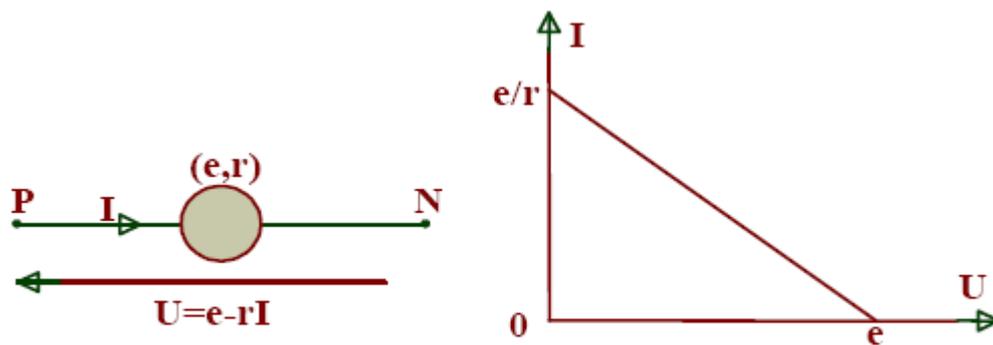


Fig.1.11

Dans le cas d'un générateur de tension idéal ($r = 0$; $U = e$), on obtient la caractéristique et le schéma équivalent de Fig1.12.

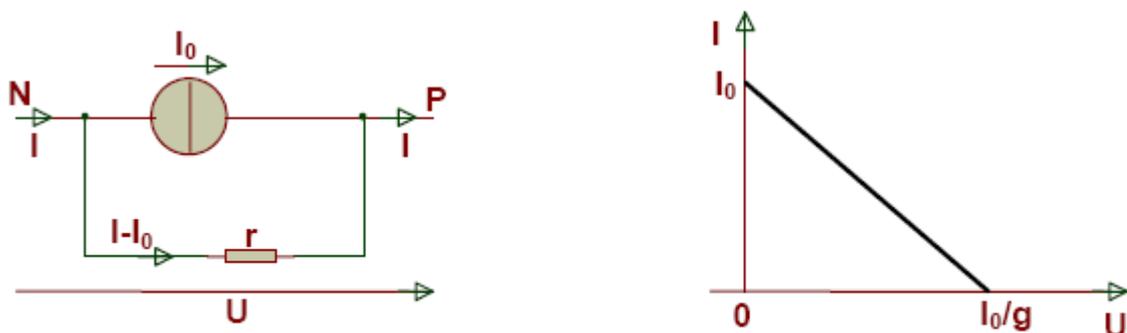


Fig.1.13

Quel que soit le courant débité par le générateur, la tension entre ses bornes est constante.

Générateur de courant

L'équation $I = \frac{e}{r} - \frac{U}{r}$ peut s'écrire sous la forme :

$$I = I_0 - gU \text{ avec } I_0 = \frac{e}{r} \text{ (} I_0 \text{ est l'intensité du courant du court-circuit)}$$

$g = \frac{1}{r}$ (g est la conductance interne de générateur).

Cette équation permet d'avoir le circuit de la figure 1.13 et sa caractéristique.

Fig1.13.

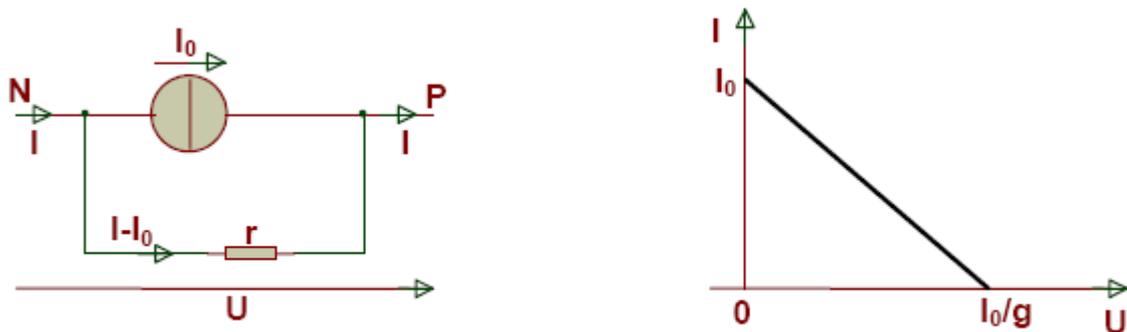


Fig.1.13

Lorsque r tend vers l'infini, $\frac{1}{r}$ tend vers zéro, on a un générateur de courant idéal représenté par sa caractéristique sur la Fig1.14.

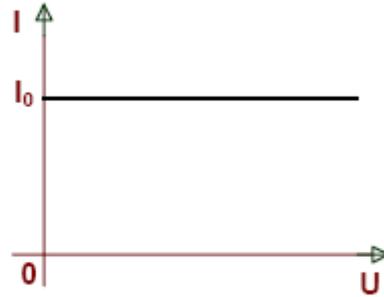


Fig.1.14

Récepteur

Les récepteurs non polarisés ont un comportement indépendant du sens du courant.

Ces récepteurs ne fonctionnent que lorsque $U \geq e'$ ce qui correspond à $I \geq 0$;

Fig1.15.

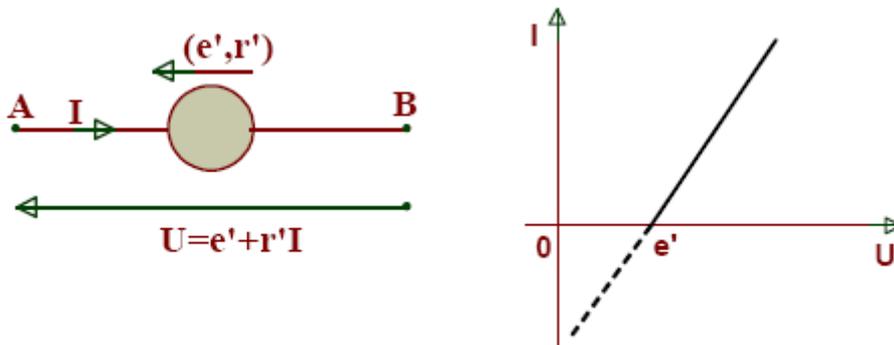


Fig.1.15

Par contre, les récepteurs polarisés, dotés de pôles bien définis, fonctionnent pour le sens inversé du courant soit comme générateurs (voltamètres polarisés), soit comme résistances pures (certains moteurs), Fig1.16.

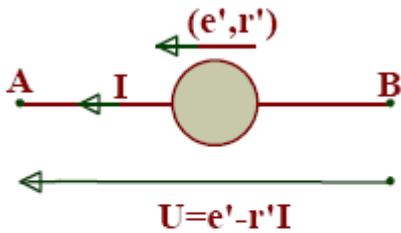


Fig.1.16

XI/ Association de générateurs

Générateurs de tension en série

Un ensemble de n générateurs de tension linéaires (e_k, r_k) , montés en série (figure 1.17), peut être remplacé par un générateur de tension unique linéaire de f.e.m e_{eq} et de résistance interne r_{eq} .

Fig1.17.

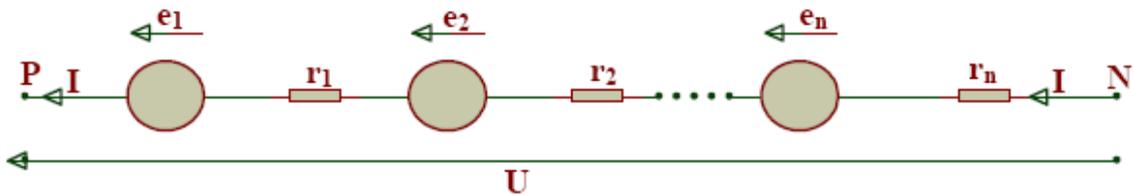


Fig.1.17

$$U = V_P - V_N = e_1 - r_1 I + \dots + e_n - r_n I = \underbrace{\sum_{i=1}^n e_i}_{e_{\acute{e}q}} - I \underbrace{\sum_{i=1}^n r_i}_{r_{\acute{e}q}} = e_{\acute{e}q} - I r_{\acute{e}q}$$

Cette association est toujours réalisée, en pratique avec des générateurs de

Accueil du module « Notions sur les diodes à jonction »

Ce chapitre étudie la caractéristique non linéaire $I(V)$ d'une diode à jonction. Ensuite, de schématiser le circuit équivalent à une diode à jonction dans un réseau linéaire. Enfin, d'identifier et d'énumérer son rôle dans un réseau électrique.. Enfin, un groupe d'exercices couvrant l'essentiel des connaissances sur ces diodes (simple et de Zener) et leurs rôles dans les réseaux linéaires.

Les mots clés de la leçon

Mots clefs : notion sur un semi-conducteur de type p et n, la caractéristique non linéaire $I(V)$ d'une diode à jonction, diodes n-p et diode

La durée de travail de l'étudiant :

environ 2-3 heures pour le cours et les applications

Les pré-requis nécessaires :

Les connaissances des propriétés générales du courant continu. Aussi, la connaissance des propriétés des réseaux linéaires (loi des nœuds et loi des mailles) et des impédances des branches d'un réseau linéaire.

Les objectifs de la leçon :

Ce chapitre traite l'utilité d'une diode à jonction dans un réseau linéaire. Aussi, de schématiser le circuit équivalent à une diode à jonction dans un réseau linéaire. Enfin, des applications en fin du chapitre sur ces diodes et leurs importances physiques ont été proposées.

Objectifs

- 1-de donner la fonction caractérisation $I(V)$ non linéaire d'une diode à jonction.**
- 2- de schématiser les circuits équivalents en présence de ces diodes à jonctions**
- 3- Enfin, d'identifier et d'énumérer son rôle dans un réseau électrique.**

I/ Jonction P-N

Elle est fabriquée à partir d'un semi-conducteur (silicium par exemple) de type **P** qu'on met en contact avec un semi-conducteur de type **N**.

Le silicium est dit semi-conducteur de type **N** lorsqu'il est dopé avec des atomes contenant 5 électrons de valence (P, As,...). Ces atomes libèrent facilement le cinquième électron et deviennent des ions positifs. Pour un semi-conducteur de type **N** les ions positifs sont fixes et les électrons sont des porteurs libres majoritaires.

Par contre, le silicium devient un semi-conducteur de type **P** lorsqu'il est dopé avec des atomes contenant 3 électrons de valence (Ga, In,...). Ces atomes captent facilement un électron provenant du silicium et deviennent des ions négatifs. La vacance laissée sur l'atome du silicium est appelée trou, qui d'un point de vue électrique est un porteur libre de charge positive. Pour un semi-conducteur de type **P** les ions sont fixes et les trous sont des porteurs libres majoritaires.

Fig.5.1 représente les trois cas de silicium dans lesquels les atomes de silicium ne sont pas représentés.

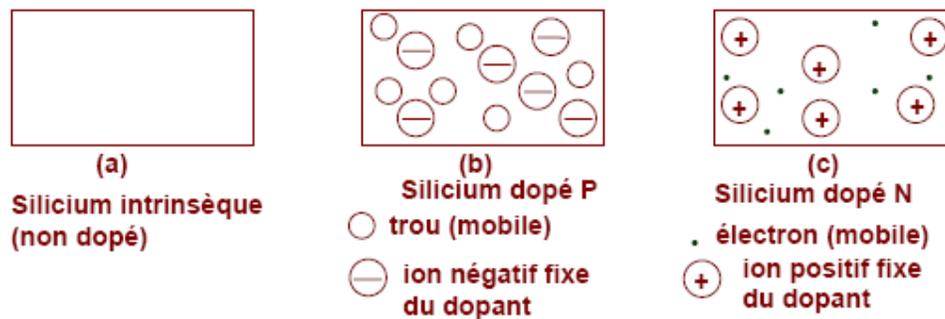


Fig. 5.1

- (a) le silicium non dopé est dit intrinsèque
- (b) le silicium est dopé **P** à une certaine concentration du dopant
- (c) le silicium est dopé **N**, à la même concentration du dopant

Au contact des semi-conducteurs type *P*-type *N*, il se produit une diffusion des charges mobiles de part et d'autre de la zone de jonction dans laquelle les électrons et les trous se recombinent.

Il apparaît donc de part et d'autre de la frontière une zone dépourvue de charges mobiles. A la frontière des deux semi-conducteurs, il y a donc apparition d'un champ électrostatique interne $\vec{\mathcal{E}}_i$, Fig.5.2

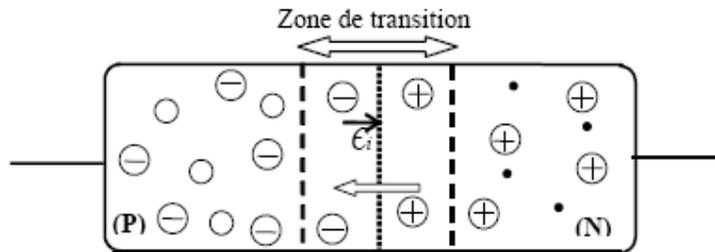


Fig. 5.2

II/ La diode à jonction

Principe de fonctionnement

La jonction P-N est soumise à une différence de potentiel $V_A - V_B = U$, entraînant l'apparition d'un champ électrostatique externe dont le module est supérieure à celui de $\vec{\mathcal{E}}_i$.

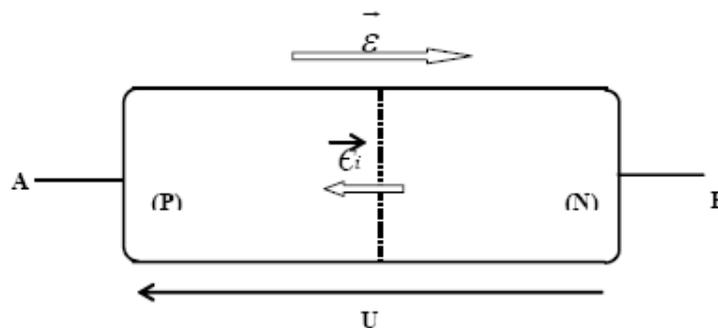


Fig. 5.3

Nous envisageons les deux cas suivants:

▶ $U > 0$, le champ $\vec{\mathcal{E}}$ est opposé à $\vec{\mathcal{E}}_i$ et le champ résultant au niveau de la jonction $\vec{\mathcal{E}}_i + \vec{\mathcal{E}}$ possède le sens opposé à celui de $\vec{\mathcal{E}}_i$.

Ce champ résultant, tend ainsi à entraîner les trous de la zone P vers la zone N et les électrons de la zone N vers la zone P . La diode est polarisée en direct et est parcourue par un courant d'intensité non nulle.

▶ $U < 0$ le champ $\vec{\mathcal{E}}$ renforce $\vec{\mathcal{E}}_i$ ce qui rend plus difficile le déplacement des porteurs: la diode est polarisée en inverse et est parcourue par un courant nul,

Fig.5.4

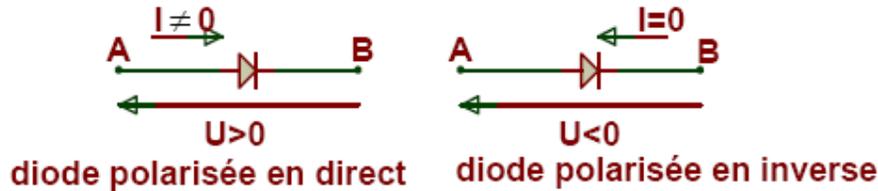


Fig. 5.4

Caractéristique de la diode

L'intensité I du courant traversant la diode, est donnée par l'expression suivante:

$$I = I_s \left[\exp\left(\frac{q_e U}{\eta k_B T}\right) - 1 \right]$$

η est un facteur dépendant du semi-conducteur qui renseigne sur le type de conduction dans la jonction, $k_B = 1,34.10^{-23} JK^{-1}$ est la constante de Boltzmann, T la température thermodynamique en Kelvin (K) et I_s le courant de saturation tel que I tend vers $-I_s$ lorsque la diode est polarisée en inverse et U suffisamment grande sans toutefois dépasser une tension limite dite de claquage pour laquelle la diode est détériorée.

Fig.5.5 représente l'allure de la variation de I en fonction de la tension U appliquée à la diode.

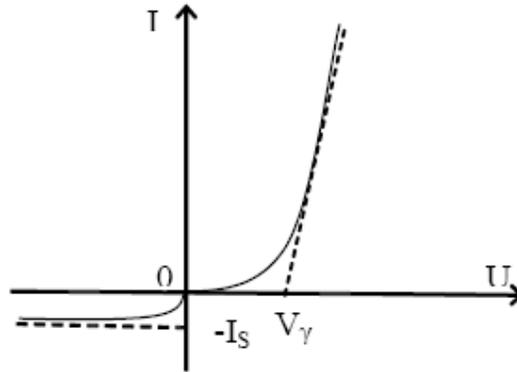


Fig. 5.5

V_γ représente la tension seuil telle que pour $U > V_\gamma$, I est différent de zéro.

Ordres de grandeur dans une diode (au silicium):

▸ le courant de saturation: $I_s \simeq 10^{-9} \text{ A}$

▸ la tension seuil: $V_\gamma \simeq 0,6 \text{ V}$

Modélisation de la diode

Lorsque la diode est passante, l'intensité qui la traverse est de l'ordre du mA . A cette échelle, on peut négliger le courant de saturation (de l'ordre du nA).

La caractérisation de la diode peut être modélisée pour une caractéristique simplifiée représentée sur Fig.5.6

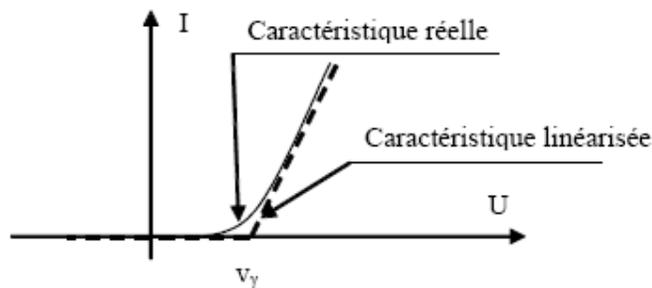


Fig. 5.6

A partir de cette figure, on peut écrire pour la caractéristique linéarisée, le comportement suivant:

Pour $U > V_\gamma$ on a: $I = \frac{1}{r_d}(U - V_\gamma)$ droite linéaire où r_d représente une résistance ohmique et pour $U < V_\gamma$ on a: $I = 0$.

On déduit que le schéma équivalent de la diode est un récepteur de f.c.e.m V_γ en série avec un résistor de résistance r_d . La valeur de r_d est donnée par l'inverse de la tangente à la courbe autour du point du fonctionnement. Fig.5.7

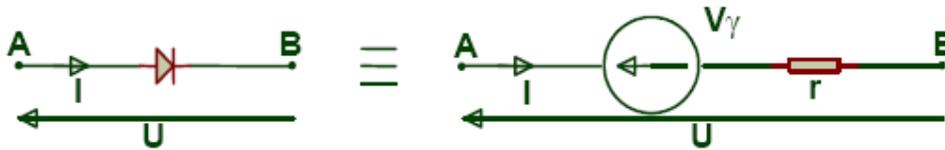


Fig. 5.7

Point de fonctionnement

On considère le circuit de charge représenté sur la figure 5.8 et comportant un générateur de tension E ; en série avec une résistance R ; et une diode de tension seuil $V_\gamma < E$; et polarisée en direct sous la tension U ; On se propose d'exprimer l'intensité I ; du courant traversant la diode. Fig.5.8

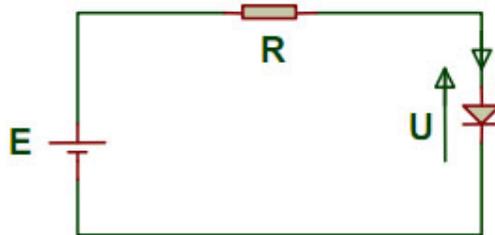


Fig. 5.8

La loi des mailles donne:

$E = RI + U$ d'où: $I = -\frac{U}{R} + \frac{E}{R}$; cette équation $I=f(U)$; est appelée droite de charge statique. Elle coupe la caractéristique de la diode au point $M(I_M, U_M)$; appelé point de fonctionnement. Fig.5.9

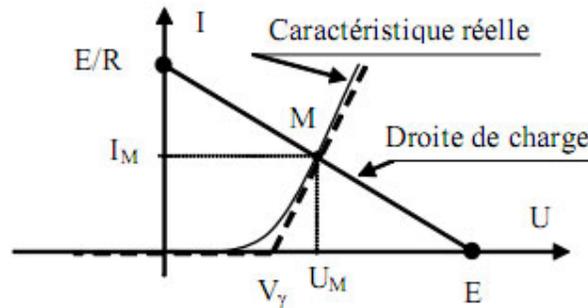


Fig. 5.9

Pour ce point de fonctionnement, on peut remplacer la diode par une tension seuil V_γ ; (intersection de la tangente avec l'axe des tensions) en série avec une résistance r_d : pente de la tangente. r_d ; est appelée la résistance dynamique de la diode:

$$r_d = \frac{1}{\left(\frac{dI}{dU}\right)_M}$$

Remarque: Le point de fonctionnement d'une diode dépend du circuit de charge (E, R); Pour un même circuit de charge, le point de fonctionnement d'une diode dépend des caractéristiques de V_γ ; et r_d ; de la diode.

Diodes parfaites

La diode est dite parfaite si sa résistance dynamique est nulle ($r_d = 0$). Lorsque V_γ est non nulle, on obtient la caractéristique représentée sur la Fig.5.10

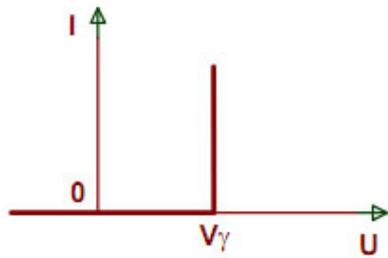


Fig. 5.10

On a, selon que $U > V_\gamma$ ou $U < V_\gamma$ les schémas équivalents de la diode parfaite sont représentés sur la Fig.5.11

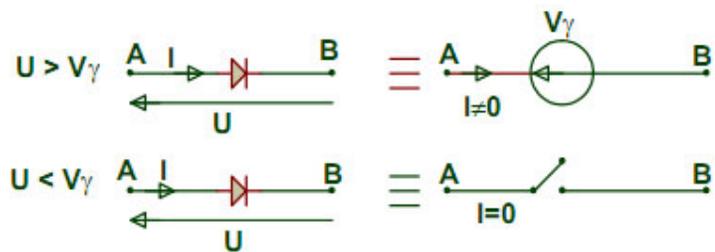


Fig. 5.11

La diode est qualifiée d'idéale lorsque $V_\gamma = 0$, Fig.5.12

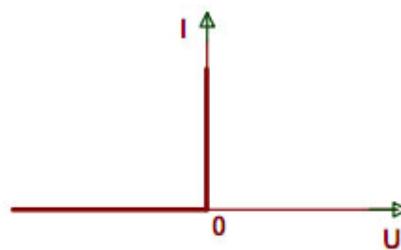


Fig. 5.12

Les schémas équivalents seront soit un circuit ouvert ou un court-circuit, Fig.5.13

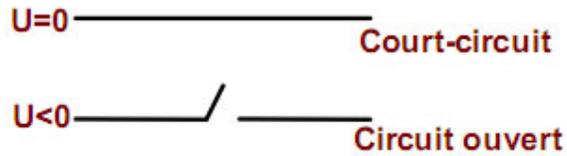


Fig. 5.13

III/ Etude de quelques circuits à diodes

Redressement simple alternance

On considère le circuit suivant, alimenté par une tension d'entrée v_e sinusoïdale: $v_e = v_0 \sin \omega t$. Le circuit comporte une diode à jonction de tension seuil $V_\gamma < v_0$ et de résistance dynamique r_d et une résistance R . la tension de sortie est prise aux bornes de R Fig.5.14 .

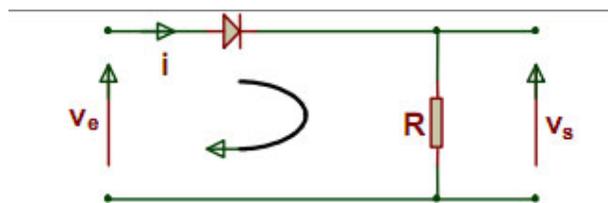


Fig. 5.14

Lorsque $v_e > V_\gamma$, la diode conduit le courant et le schéma équivalent du circuit est celui représenté sur la figure Fig.5.15

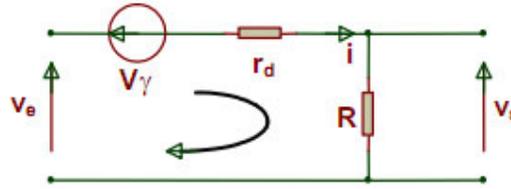


Fig. 5.15

On se propose de déterminer la tension de sortie v_s :

la loi des mailles donne:

ce qui donne:

$$+V_e - V_\gamma - r_d i - R i = 0 \text{ d'où : } i = \frac{v_e - V_\gamma}{R + r_d},$$

Si $R \gg r_d$, on obtient: $v_s \simeq v_e - V_\gamma$

Comme $v_e > V_\gamma$, $i > 0$ et la diode est dite passante et alors v_s est une tension positive.

Lorsque $v_e < V_\gamma$, $i = 0$, d'où $v_s = R i = 0$, on dit que la diode ne conduit pas.

Ainsi $v_s \geq 0$ et $i \geq 0$, on dit alors que la tension et le courant sont redressés.

Remarque:

Dans le cas d'une diode idéale ($V_\gamma = 0$, $r_d = 0$), $v_s = v_e$ si $v_e > 0$ et $v_s = 0$ si $v_e < 0$. Les allures de $v_s(t)$ et $v_e(t)$ sont dans ce cas données sur la figure 5.16.

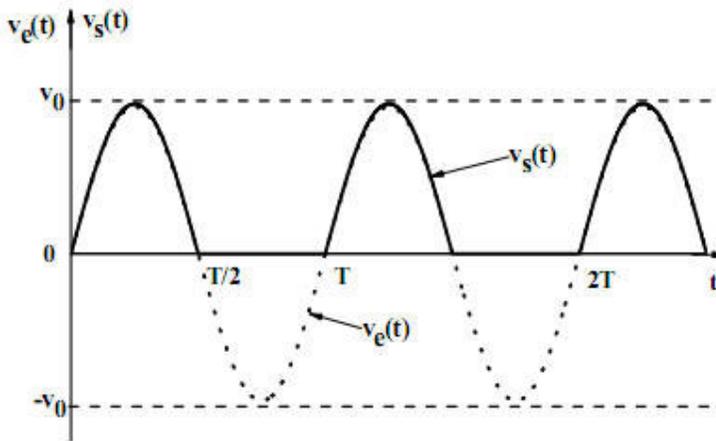


Fig. 5.16

Ainsi, pour une diode idéale, les valeurs moyennes des deux tensions sont:

$$\langle v_e \rangle = 0 \text{ et } \langle v_s \rangle = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} v_0 \sin(\omega t) dt = \frac{v_0}{\pi}$$

Redressement double alternance

Considérons un circuit comportant quatre diodes idéales (D_1, D_2, D_3 et D_4), et un résistor de résistance R . La tension d'entrée $v_e(t)$ est sinusoïdale et la tension de sortie $v_s(t)$ est prise aux bornes de R comme indiqué sur Fig.5.17

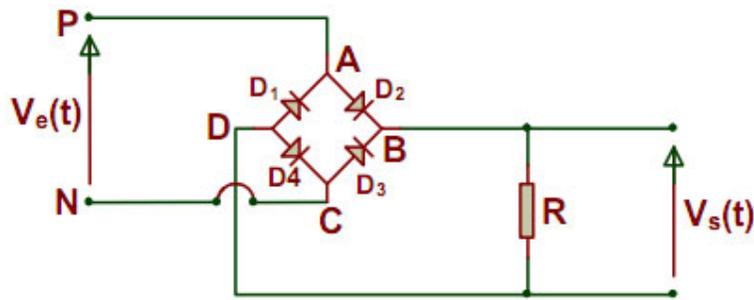


Fig. 5.17

Lors de l'alternance positive de $v_e(t)$, les diodes D_2 et D_4 sont passantes:

$$V_P = V_B \text{ et } V_N = V_D$$

d'où: $V_P - V_N = V_B - V_D$ et par conséquent: $v_s = v_e$

Pendant l'alternance négative, ce sont les diodes D_1 et D_3 qui sont passantes:

$$V_P = V_D \text{ et } V_N = V_B$$

d'où: $V_P - V_N = V_D - V_B = -v_s$

or $V_P - V_N = v_e < 0$ donc: $v_s = -v_e < 0$

Fig.5.18 donne l'allure de $v_s(t)$.

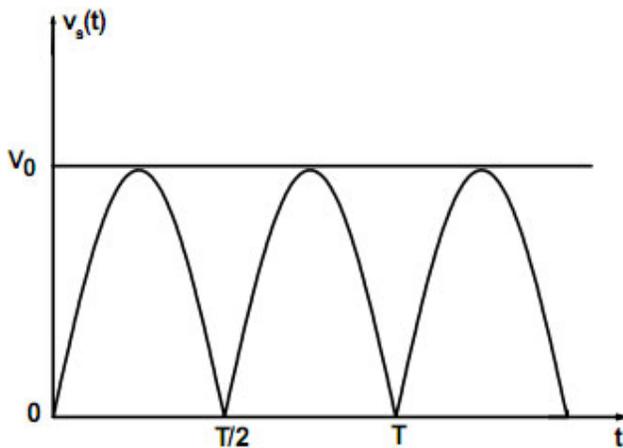


Fig. 5.18

Dans ce cas, les tensions moyennes sont: $\langle v_e \rangle = 0$ et $\langle v_s \rangle = \frac{2v_0}{\pi}$, double de la valeur obtenue par le redressement simple alternance.

Circuit de comptage d'impulsions: Pompe à diode

De nombreuses applications nécessitent des dispositifs de comptage d'impulsions (échos de radar par exemple). On considère le cas de tension v_e en créneaux, d'amplitude A et de durée

$\Delta t = T/2$ où T est la période de v_e , Fig.5.19

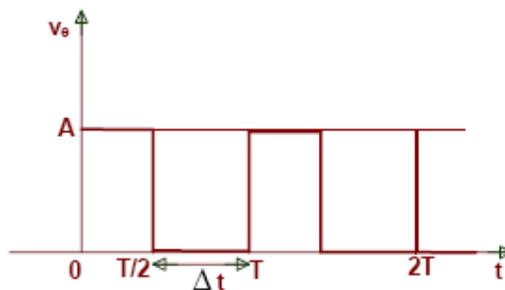


Fig. 5.19

Cette tension alimente le circuit représenté sur la Fig.5.20 où D_1 et D_2 sont deux diodes idéales.

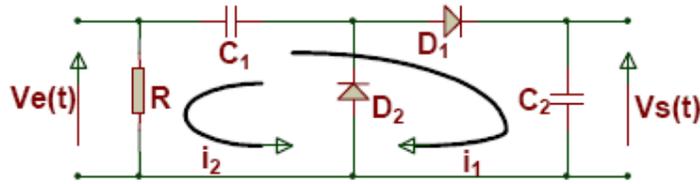


Fig. 5.20

Au cours du premier créneau de V_e , le courant i_1 charge C_1 et C_2 à travers D_1 . Lorsque V_e s'annule, C_1 se décharge dans R à travers D_2 et C_2 ne peut pas se décharger et garde une tension V_1 .

Au cours du second créneau, le phénomène se répète et C_2 aura une tension $V_2 > V_1$ et ainsi de suite. La mesure de v_s permet d'avoir le nombre de marches

(Fig.5.21) tant que C_2 n'est pas saturé. A la saturation, le condensateur est déchargé automatiquement par un circuit annexe.

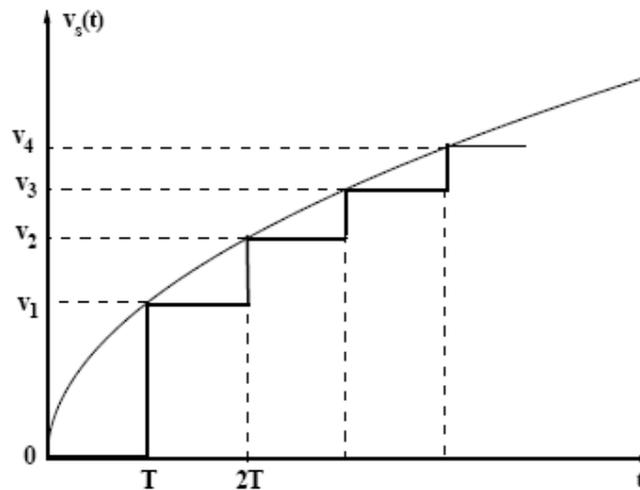


Fig. 5.21

Doubleur de tension

On considère le montage représenté sur la figure 5.22 comprenant deux diodes idéales D_1 et D_2 et deux condensateurs identiques C_1 et C_2 de même capacité C . Ce circuit est alimenté par une tension sinusoïdale: $v_e = v_0 \sin \omega t$. Fig.5.22

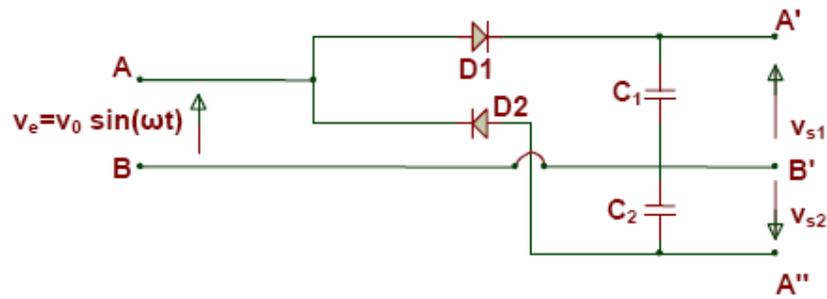


Fig. 5.22

Pendant l'alternance positive, $V_A - V_B > 0$, D_1 est passante et D_2 est bloquée. Le circuit précédent est équivalent à celui représenté sur la Fig.5.23 .

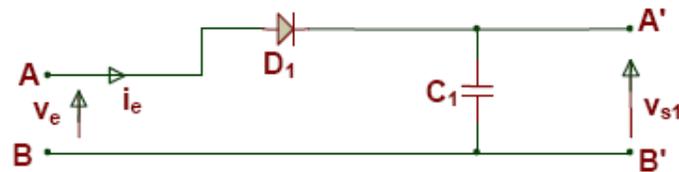


Fig. 5.23

Le courant $i_e > 0$ charge le premier condensateur et $v_{s1} = v$

Pendant l'alternance négative, $V_A - V_B < 0$, D_1 est bloquée et D_2 est passante. Le circuit précédent est équivalent à celui représenté sur Fig.5.24 .

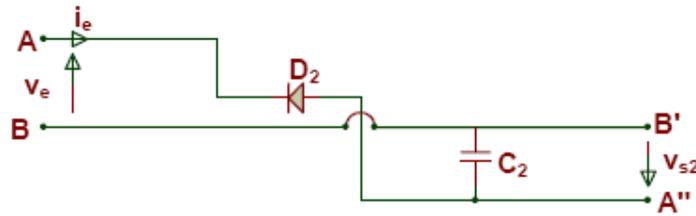


Fig. 5.24

Le courant $i_e < 0$ charge le deuxième condensateur $v_{s2} = -v_e$, de manière à avoir $V_{A'} - V_{A''} = 2v_e$.

Les condensateurs C_1 et C_2 se déchargent dans un circuit annexe pour que cette opération se répète d'une façon périodique.

IV/ Diode Zener

Une diode Zener est un cas particulier de diode dont la caractéristique $I = f(V)$ ressemble à celle de la diode à jonction pour une polarisation directe avec une tension seuil V_γ . En polarisation inverse, la diode Zener, à la différence avec une diode normale, peut être parcourue par un courant important lorsque la tension atteint une valeur caractéristique $-V_z$ de quelques volts sans claquer, Fig.5.25.

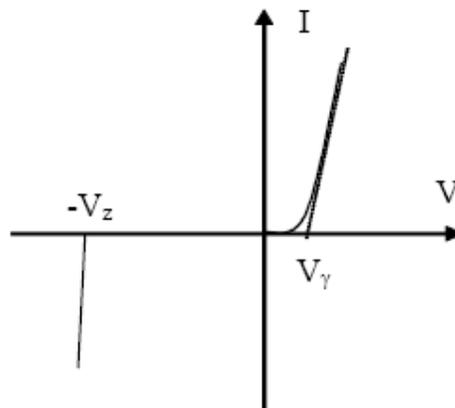


Fig. 5.25

En polarisation inverse: la diode Zener est de nouveau conductrice pour un tension $|V| \geq |V_z|$. De plus, quel que soit le courant i , la tension aux bornes de

la diode est constante d'où, l'intérêt de la diode Zener. Une diode Zener est fréquemment utilisée pour stabiliser une tension Fig.5.26 .

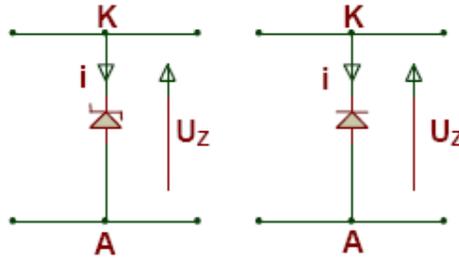


Fig. 5.26

La diode Zener peut être symbolisée par les deux schémas équivalents suivants, figure 5.26:

En pratique, la diode Zener est remplacée dans les circuits par une tension V_z , en série avec une résistance interne r_z , Fig.5.27 .

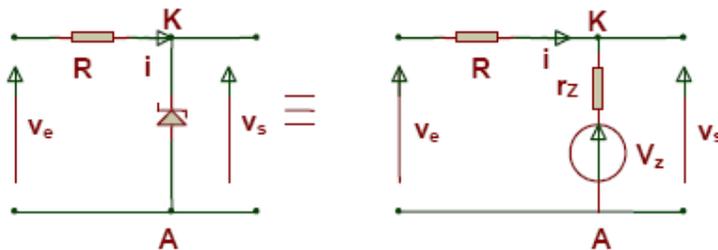


Fig. 5.27

La tension de sortie est: $v_s = U_z = V_z + r_z i$.

En général, r_z est une résistance faible. Pour une tension inférieure à $|V_z|$, la diode se comporte comme un interrupteur ouvert.

Pour plus de détails concernant la diode Zener, le lecteur peut consulter les exercices proposés.

Accueil du module « Réponse fréquentielle à une excitation sinusoïdale permanente: les quadripôles »

Ce chapitre traite les expressions de la fonction de transfert et le gain en décibel (en tension, en courant et en puissance). Ensuite, il introduit la représentation du diagramme de Bode pour les quadripôles RC , CR Aussi, de connaître le type de filtre (passe-bas, passe-haut, passe-bande et coupe bande).

Enfin, un groupe d'exercices couvrant l'essentiel des connaissances sur ces quadripôles du premier ordre et même pour des quadripôles de second ordre.

Les mots clés de la leçon

Mots clefs : la fonction de transfert et le gain en décibel, diagramme de Bode, quadripôles RC , CR, filtre (passe-bas, passe-haut, passe-bande et coupe bande)

La durée de travail de l'étudiant :

environ 5-6 heures pour le cours et les applications

Les pré-requis nécessaires :

Les connaissances des propriétés générales du courant continu. Aussi, la connaissance des propriétés des réseaux linéaires (loi des nœuds et loi des mailles) et des impédances complexes des éléments R, C et L.

Les objectifs de la leçon :

Ce chapitre traite l'écriture de la fonction de transfert(en tension) d'un quadripôle RC, Cr et autres. Un calcul de la fréquence de sortie d'un quadripôle par le biais de la représentation du gain en décibel du quadripôle (diagramme de Bode) est faite. Aussi, de reconnaître le type de filtre (passe-bas, passe-haut, passe-bande

et coupe bande). Enfin, des applications en fin du chapitre sur ces quadripôles ont été proposées.

Objectifs

1- de donner la fonction de transfert en tension d'un quadripôle RC, CR et autres.

Pour une excitation sinusoïdale.

2- de schématiser les circuits équivalents en donnant les expressions des impédances complexes équivalentes.

3- de donner les expressions du gain en décibel et de donner le diagramme de Bode pour les quadripôles RC , CR Aussi, de connaître le type de filtre (passe-bas, passe-haut, passe-bande et coupe bande).

I/ Caractéristiques d'un quadripôle

C'est un circuit à quatre bornes possédant deux bornes d'entrée et deux bornes de sortie. On considère dans ce chapitre des quadripôles passifs et linéaires et ne contenant pas de source d'énergie. fig4-1

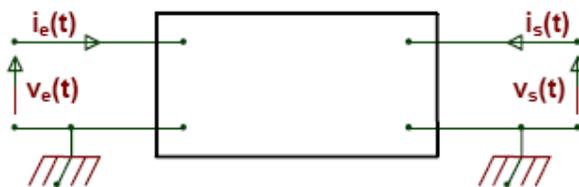


Fig. 4.1

Les indices e et s sont respectivement associés aux dipôles de commande (ou entrée) et de charge (ou sortie).

A partir de ce chapitre, on suppose que les bornes d'entrée et de sortie du bas des figures présentées sont reliées à la masse (ou à la terre de potentiel nul). Il

Réponse fréquentielle à une excitation sinusoïdale permanente: les quadripôles

s'ensuit que les tensions d'entrée u_e et de sortie u_s sont respectivement égales aux potentiels v_e d'entrée et v_s de sortie.

L'étude donne lieu à la définition de plusieurs gains:

▶ un gain de tension: $G_v = \frac{v_s}{v_e}$, noté ultérieurement par G .

▶ un gain d'intensité: $G_i = \frac{i_s}{i_e}$

▶ un gain de puissance : $G_p = \frac{P_s}{P_e}$ qui est nécessairement inférieur à 1 à cause des pertes par effet Joule.

Dans cet ouvrage, on ne traite que le gain de tension G

II/ Fonction de transfert d'un quadripôle

En général, il y a un déphasage φ entre v_s et v_e . Il est donc commode d'utiliser la notation complexe, soit:

$$\begin{aligned}\bar{v}_e &= v_{0e} \exp j(\omega t - \Phi) \\ \bar{v}_s &= v_{0s} \exp j(\omega t - \Psi)\end{aligned}$$

On définit alors la fonction de transfert du quadripôle comme le rapport de la tension de sortie sur la tension d'entrée et on se limitera aux tensions et aux intensités de courant alternatives:

$$\bar{H}(j\omega) = \frac{\bar{v}_s(\omega)}{\bar{v}_e(\omega)} = \frac{v_{0s}(\omega)}{v_{0e}(\omega)} \exp [j\varphi(\omega)] \text{ avec } \varphi = \phi - \psi$$

ou bien, $\overline{H}(j\omega) = G(\omega) \exp[j\varphi(\omega)]$ avec $G(\omega) = \frac{v_{0s}(\omega)}{v_{0e}(\omega)}$ est le module de la fonction de transfert qui n'est autre que la valeur du gain en tension et $\varphi(\omega)$ est l'argument de cette fonction.

III/ Etude du quadripôle RC

Fonction de transfert

On considère le quadripôle suivant: fig4-2



Fig. 4.2

On se place dans le cas où $i_s \simeq 0$, cette situation correspond à un dipôle de charge qui n'est autre qu'un appareil possédant une impédance infinie servant à mesurer v_s (voltmètre ou oscilloscope).

Les tensions ont les expressions suivantes:

$$\overline{v}_e = \left(R - \frac{j}{C\omega} \right) \overline{i}_e = \overline{Z}_e \overline{i}_e$$

$$\overline{v}_s = -\frac{j}{C\omega} \overline{i}_e = \overline{Z}_s \overline{i}_e$$

ainsi,

$$\overline{H}(j\omega) = \frac{\overline{v}_s}{\overline{v}_e} = \frac{-\frac{j}{C\omega}}{R - \frac{j}{C\omega}} = \frac{1}{C\omega \left(jR + \frac{1}{C\omega} \right)} = \frac{1}{(1 + jRC\omega)}$$

En posant $\omega_0 = \frac{1}{RC}$, on obtient:

$$\bar{H}(j\omega) = \frac{1}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_0}\right)}$$

Etude du gain

Le module $G(\omega)$ de la fonction de transfert est:

$$G(\omega) = |\overline{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

En posant $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, on obtient : $G(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$

Examinons les cas particuliers suivants :

- Pour les fréquences faibles ($\omega \ll \omega_0$ ou $x \ll 1$), $G(x) \rightarrow 1$
- Par contre pour les hautes fréquences ($\omega \gg \omega_0$ ou $x \gg 1$), $G(x) \rightarrow 0$.

Le calcul des dérivés première et seconde conduit aux expressions suivantes:

$$G'(x) = \frac{-x}{(1 + x^2)^{3/2}} \quad \text{et} \quad G''(x) = \frac{2x^2 - 1}{(1 + x^2)^{5/2}}$$

La fonction $G(x)$ présente un maximum pour $x = 0$ et un point d'inflexion

d'abscisse $x = +\frac{1}{\sqrt{2}}$

L'allure de $G(x)$ est illustrée dans la fig4-3.

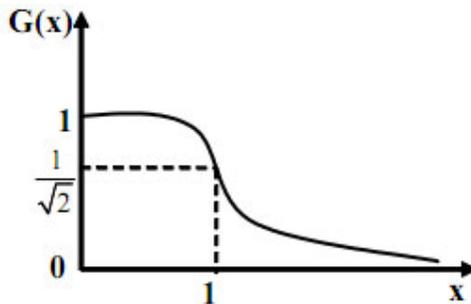


Fig. 4.3

En pratique, le gain d'un quadripôle s'exprime en décibel ($d B$), soit: $g(x) = 20 \text{Log}_{10} G(x) = 20 \log G(x)$. En effet, le tracé de la courbe $G(x)$, c'est-à-dire, se fait dans un domaine allant des basses fréquences ($f \approx 10^2 \text{ Hz}$) au domaine des hautes fréquences ($f \approx 10^6 \text{ Hz}$), donc il est plus commode d'utiliser une échelle logarithmique.

Représentation de Bode

C'est une représentation qui concerne les courbes représentatives des fonctions suivantes:

$$g_{dB}(\omega) = f\left(\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right)$$

$$\varphi(\omega) = f\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

$$g(x) = f(\log(x))$$

ou bien: $\varphi(x) = f(x)$

tracé de $g_{dB}(\omega)$:

$$g_{dB}(\omega) = 20 \log G(\omega) \text{ avec } G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

pour le filtre RC utilisé.

La construction de cette courbe nécessite l'étude des comportements asymptotiques suivants:

$\omega \ll \omega_0$; $G(\omega) \approx 1$; $g = 0$ ou $\frac{v_s}{v_e} = 1$

$\omega \gg \omega_0$; $G(\omega) \approx \frac{1}{\omega}$; $g = -20 \log \omega$ ou $\frac{v_s}{v_e} = \frac{1}{\omega}$

$$g_{dB} = -20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)$$

et droite de pente -20 dB / décade

D' autre part, pour:

$$\omega = \omega_0; G(\omega) \approx \frac{1}{\sqrt{2}}; g = -3 \text{ dB} \text{ ou } \frac{v_s}{v_e} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\omega = 10\omega_0; \log(x) = 1; g = -20 \text{ dB} \text{ ou } \frac{v_s}{v_e} = 0,1$$

la représentation de cette fonction se fait sur une échelle logarithmique. fig4-4.

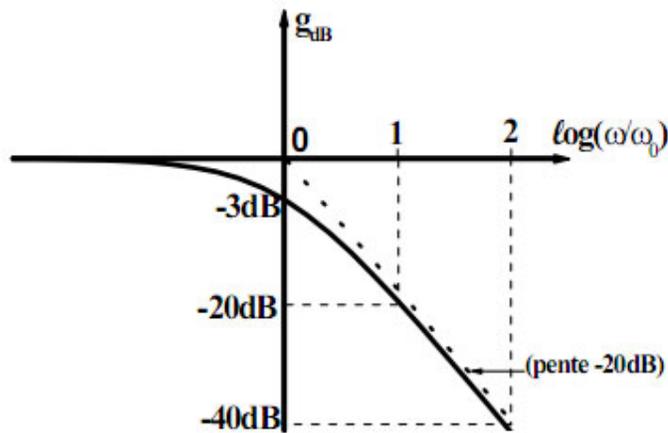


Fig. 4.4

A partir de la figure 4.4, on constate que pour $\omega > \omega_0$ le gain décroît rapidement; donc seules les excitations sinusoïdales dont les fréquences sont inférieures à $10\omega_0$ peuvent donner des réponses en v_s du quadripôle comprises entre v_e et $0,1 v_e$. On dit que ce quadripôle est un filtre passe-bas. Par convention, $\omega = \omega_0$ est dite fréquence de coupure de ce quadripôle.

tracé de $\varphi(\omega)$

On rappelle que la fonction de transfert peut s'écrire sous la forme suivante:

$$\overline{H}(j\omega) = \frac{\left(1 - j\frac{\omega}{\omega_0}\right)}{\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)}$$

L'argument $\varphi(\omega)$ est tel que:

$$\operatorname{tg}\varphi(\omega) = -\frac{\omega}{\omega_0}$$

La construction de cette courbe nécessite l'étude des comportements

asymptotiques suivants:

$$\omega \ll \omega_0; \operatorname{tg}\varphi(\omega) \rightarrow 0 \text{ et } \varphi \rightarrow 0$$

$$\omega \gg \omega_0; \operatorname{tg}\varphi(\omega) \rightarrow -\infty \text{ et } \varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$$

D'autre part, pour la fréquence de coupure:

$$\omega = \omega_0; \operatorname{tg}\varphi(\omega) = -1 \text{ et } \varphi = -\frac{\pi}{4}$$

A partir de la fig4-5

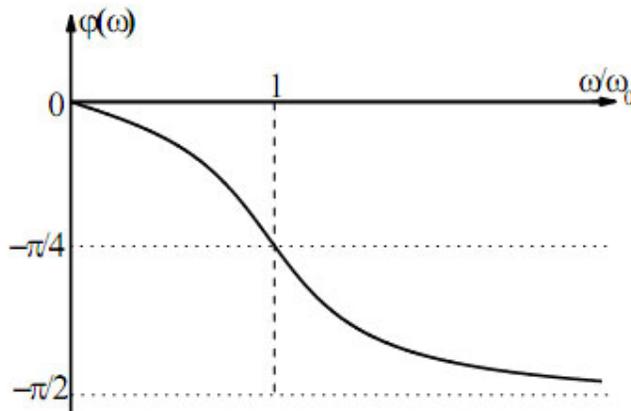


Fig. 4.5

on constate que si $\omega \ll \omega_0$, la tension de sortie v_s est en phase avec la tension d'entrée v_e . Par contre, pour $\omega \gg \omega_0$, v_s est en quadrature de phase avec v_e .

IV/ Etude d'un quadripôle CR

Fonction de transfert

On considère le quadripôle suivant:

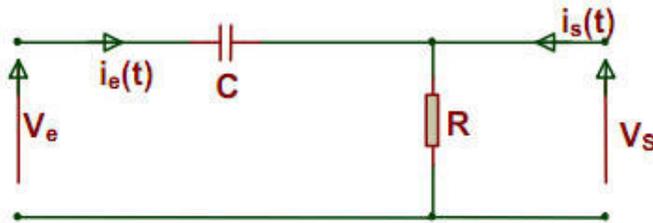


Fig. 4.6

Pou l'étude de ce quadripôle, on se place aussi dans le cas où $i_s = 0$.

Les tensions ont les expressions suivantes:

$$\bar{v}_e = \left(R + \frac{1}{jC\omega} \right) \bar{i}_e$$

$$\bar{v}_s = R\bar{i}_e$$

La fonction de transfert s'écrit:

$$\bar{H}(j\omega) = \frac{\bar{v}_s}{\bar{v}_e} = \frac{R}{\left(R + \frac{1}{jC\omega} \right)} \quad \text{on pose} \quad RC = \frac{1}{\omega_0}$$

$$\bar{H}(j\omega) = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_0} \right)}$$

d'où:

En posant $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, on obtient:

$$\bar{H}(j\omega) = \bar{H}(x) = \frac{jx}{(1 + jx)}, \quad \text{en multipliant par l'expression conjuguée ($$

$1 - jx$), on trouve:

$$\overline{H}(x) = \frac{jx + x^2}{(1 + x^2)}$$

Représentation de Bode

Le module de la fonction de transfert est donné par:

$$G(\omega) = |\overline{H}(j\omega)| = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

tracé de $g_{dB}(\omega)$:

$$g_{dB}(\omega) = 20 \log \left(\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \right)$$

La construction de cette courbe nécessite l'étude des comportements

asymptotiques suivants:

$\omega \ll \omega_0$; ($x \ll 1$); $G(\omega) \approx \frac{\omega}{\omega_0} \approx x$ et $g_{dB} = 20 \log x$ droite de

pente 20 dB / décade.

$\omega \gg \omega_0$; ($x \gg 1$); $G(\omega) \rightarrow 1$ et $g_{dB} \rightarrow 0$

D' autre part, pour $\omega = \omega_0$; ($x = 1$); $G(\omega) \approx \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $g_{dB} = -3dB$

La représentation de cette fonction se fait sur une échelle logarithmique.

A partir de la fig4-7,

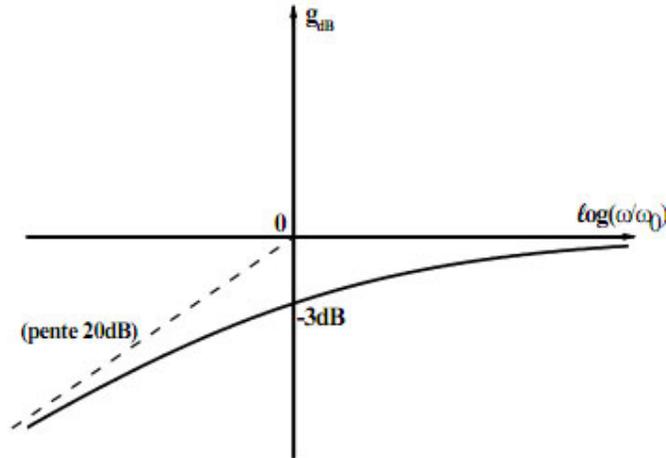


Fig. 4.7

on remarque que pour $\omega \ll \omega_0$ le gain décroît rapidement ce qui correspond à $v_s \ll v_e$, donc seules les excitations sinusoïdales dont les fréquences sont supérieures à ω_0 donnent des réponses du quadripôle tel que $v_s = v_e$. Ce quadripôle est qualifié de filtre passe-haut.

tracé de $\varphi(\omega)$

$$\varphi(\omega) = f\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right); \operatorname{tg} \varphi(\omega) = \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{1}{x}$$

La construction de cette courbe nécessite l'étude des comportements asymptotiques suivants:

▷ $\omega \ll \omega_0$ ($x \ll 1$); $\operatorname{tg} \varphi(\omega) \rightarrow \infty$ et $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}$

▷ $\omega \gg \omega_0$ ($x \gg 1$); $\operatorname{tg} \varphi(\omega) \rightarrow 0$ et $\varphi \rightarrow 0$

D' autre part, pour la fréquence de coupure:

$$\omega = \omega_0 \quad (x = 1); \operatorname{tg} \varphi(\omega) = 1 \text{ et } \varphi = \frac{\pi}{4}$$

A partir de la fig4-8.,

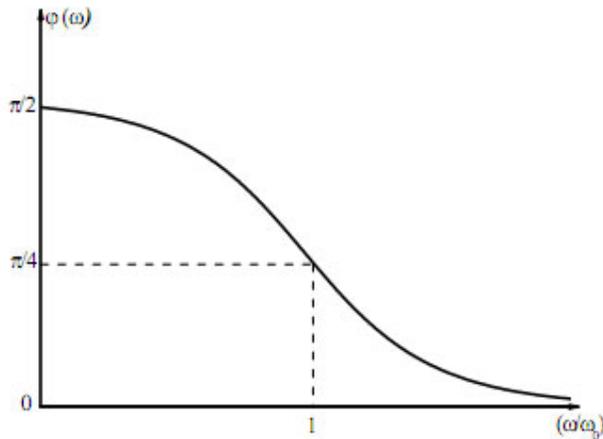


Fig. 4.8

on constate que si $\omega \ll \omega_0$, la tension de sortie v_s est en quadrature de phase avec la tension d'entrée v_e . Par contre, pour $\omega \gg \omega_0$, v_s est en phase avec v_e .

V/ Etude d'un quadripôle passe-bande

Fonction de transfert

On considère le quadripôle suivant, comportant deux résistors de résistance R et deux condensateurs de capacité C tel que représenté sur la fig4-9:

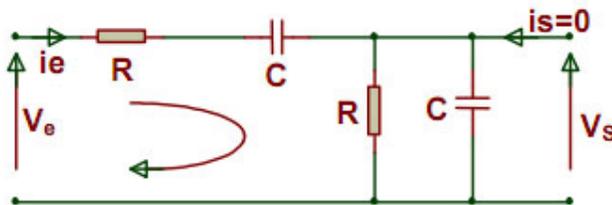


Fig. 4.9

Du point de vue impédance, le montage précédent peut être remplacé par celui de la fig4-10:

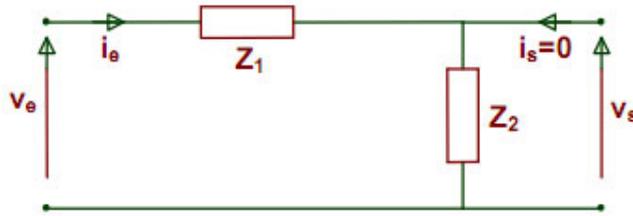


Fig. 4.10

avec: $\bar{Z}_1 = R + \frac{1}{jC\omega}$ et \bar{Z}_2 est telle que

$$\frac{1}{\bar{Z}_2} = \frac{1}{R} + jC\omega$$

$$\bar{Z}_2 = \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

d'où:

On obtient:

$$\bar{H}(j\omega) = \frac{\bar{v}_s}{\bar{v}_e} = \frac{\bar{Z}_2 \bar{i}_e}{[\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2] \bar{i}_e}$$

$$\bar{H}(j\omega) = \frac{R}{RC\omega(1 + jRC\omega) + \frac{(1 + jRC\omega)}{jC\omega} + RC\omega}$$

On pose:

$$RC = \frac{1}{\omega_0}$$

$$\bar{H}(j\omega) = \frac{j \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)}{3j \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + 1}$$

ou encore $\bar{H}(x) = \frac{jx}{3jx - x^2 + 1}$ avec $x = \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)$

Réponse fréquentielle à une excitation sinusoïdale permanente: les quadripôles

$$\overline{H}(x) = \frac{1}{3 + j(x - 1/x)} \text{ dont le module}$$

$$G(\omega) = G(x) = |\overline{H}(x)| = \frac{1}{\sqrt{9 + (x - 1/x)^2}} = \frac{x}{\sqrt{7x^2 + x^4 + 1}}$$

Représentation de BODE

étude de la variation de $G(x)$

La dérivé de $G(x)$ donne:

$$\frac{dG(x)}{dx} = \frac{2(1 - x^4)}{x^4 + 7x^2 + 1}$$

Cette dérivé s'annule pour $x = 1$.

$$\frac{dG(x)}{dx}$$

Pour $x > 1$; $\frac{dG(x)}{dx} < 0$; $x < 1$ donc $G(x)$ est une fonction décroissante.

Lorsque $x < 1$; la fonction est alors croissante.

$$G(x = 1) = G_{max} = \frac{1}{3}$$

La valeur

On peut définir deux fréquences de coupure ω_{C_1} et ω_{C_2} telles que

$$G(\omega_{C_1}) = G(\omega_{C_2}) = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

tracé de $g_{dB}(\omega)$

La construction de cette courbe nécessite l'étude des comportements

asymptotiques suivants:

$$\frac{\omega}{\omega_0} \ll 1; (x \ll 1); G(\omega) \simeq x \text{ et } g_{dB} = 20 \log x = 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right);$$

c'est une droite de pente 20 dB / décade.

$$\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1; (x \gg 1); G(\omega) \simeq \frac{x}{x^2} \simeq \frac{1}{x};$$

et $g_{dB} = -20 \log x = -20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)$: c'est une droite de

pende $-20dB/décade$.

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{RC}, g_{dB} = 20 \log \frac{1}{3} = -9,54dB.$$

Pour la valeur particulière

Par contre, pour les valeurs critiques ωC_1 et ωC_2 , le gain est:

$$g_{dB} = 20 \log \frac{1}{3\sqrt{2}} = -12,55dB.$$

$$g_{dB} = f\left(\log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)\right)$$

La représentation de la courbe

est portée sur la figure

4.11.

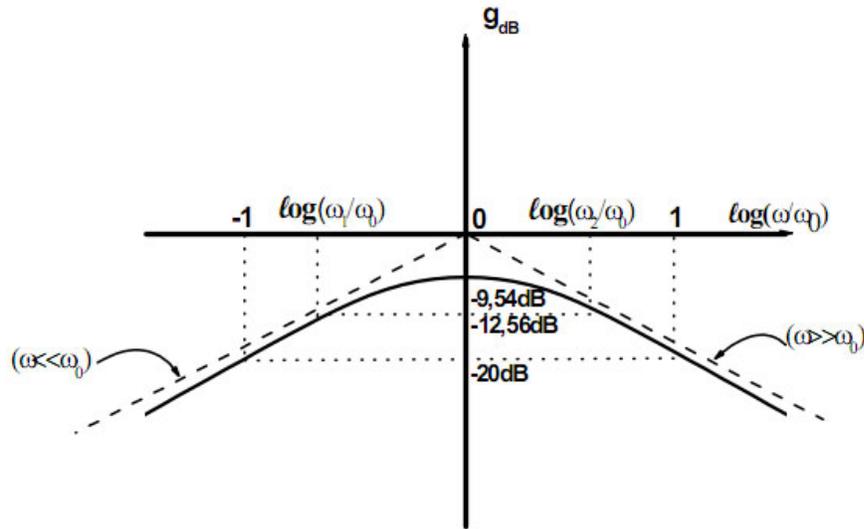


Fig. 4.11

N

ous délimitons le domaine de fréquence pour lequel le gain est tel que:

$$\frac{G_{max}}{\sqrt{2}} < G < G_{max}$$

Graphiquement, en traçant la droite $gdB = -12,56dB$; celle ci coupe la courbe en deux

points d'abscisses $\log\left(\frac{\omega C_1}{\omega_0}\right)$ et $\log\left(\frac{\omega C_2}{\omega_0}\right)$. En conséquence ce filtre est dit

passé-bande pour la bande: $\Delta\omega = \omega C_2 - \omega C_1$

V/ Quadripôle débitant sur une charge d'impédance Z_C

Matrice impédance

On considère le schéma représenté sur la fig4-12

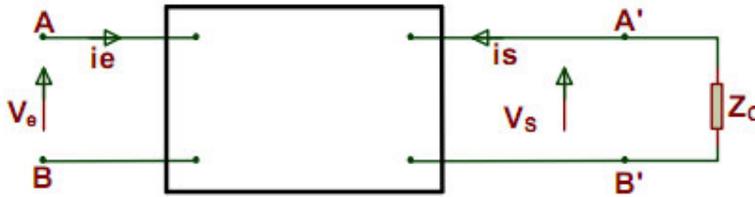


Fig. 4.12

En utilisant la notation complexe, on peut écrire du fait de la linéarité les expressions des tensions d'entrée et de sortie comme suit:

$$\bar{v}_e = \bar{Z}_{11}\bar{i}_e + \bar{Z}_{12}\bar{i}_s \quad (1)$$

$$\bar{v}_s = \bar{Z}_{21}\bar{i}_e + \bar{Z}_{22}\bar{i}_s \quad (2)$$

Les termes \bar{Z}_{ij} , sont des paramètres qui caractérisent le quadripôle

(indépendamment de v_e et v_s) et la matrice $(\bar{Z}_{ij}) = \begin{pmatrix} \bar{Z}_{11} & \bar{Z}_{12} \\ \bar{Z}_{21} & \bar{Z}_{22} \end{pmatrix}$ est dite

matrice impédance du quadripôle:

$$\begin{pmatrix} \bar{v}_e \\ \bar{v}_s \end{pmatrix} = (\bar{Z}_{ij}) \begin{pmatrix} \bar{i}_e \\ \bar{i}_s \end{pmatrix}$$

Exemple: Cas d'un transformateur

Dans cet exemple, on considère deux circuits de self-inductances L_1 et L_2 , couplés par un coefficient de mutuelle-inductance M . En désignant les grandeurs (tensions, courants) d'entrée et de sortie selon les conventions précédemment utilisées pour les quadripôles (figure 4.13), on peut écrire:

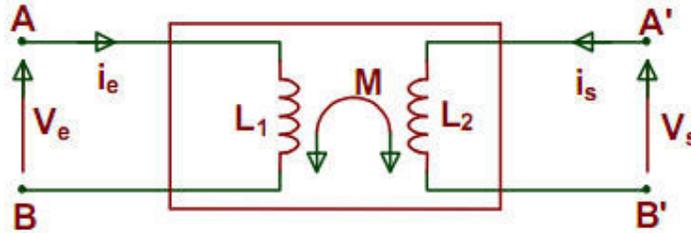


Fig. 4.13

$$\begin{cases} \bar{v}_e = L_1 \frac{d\bar{i}_e}{dt} + M \frac{d\bar{i}_s}{dt} \\ \bar{v}_s = M \frac{d\bar{i}_e}{dt} + L_2 \frac{d\bar{i}_s}{dt} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \bar{v}_e = jL_1\omega\bar{i}_e + jM\omega\bar{i}_s \\ \bar{v}_s = jM\omega\bar{i}_e + jL_2\omega\bar{i}_s \end{cases}$$

$$(\bar{Z}_{ij}) = \begin{pmatrix} jL_1\omega & jM\omega \\ jM\omega & jL_2\omega \end{pmatrix}$$

la matrice impédance s'écrit donc:

Impédance d'entrée

Entre les bornes $A'B'$ (fig4-12), on peut exprimer \bar{v}_s de deux manières:

l'une en fonction de la charge \bar{Z}_C et \bar{i}_s et l'autre à partir de l'équation (2) précédente.

$$\begin{aligned} \bar{v}_s &= -\bar{Z}_C\bar{i}_s \\ \bar{v}_s &= \bar{Z}_{21}\bar{i}_e + \bar{Z}_{22}\bar{i}_s \end{aligned}$$

Réponse fréquentielle à une excitation sinusoïdale permanente: les quadripôles

$$\bar{i}_s = -\frac{\bar{Z}_{21}}{\bar{Z}_{22} + \bar{Z}_C} \bar{i}_e$$

ce qui permet d'écrire:

$$\bar{v}_e = \left(\bar{Z}_{11} - \frac{\bar{Z}_{12}\bar{Z}_{21}}{\bar{Z}_{22} + \bar{Z}_C} \right) \bar{i}_e$$

\bar{Z}_e est appelée impédance d'entrée du quadripôle, elle dépend de \bar{Z}_C sauf dans le cas $\bar{Z}_{12} = 0$ ou bien $\bar{Z}_{21} = 0$.

Accueil du module « Etude des Réseaux électriques en régimes transitoire et sinusoïdal »

Ce chapitre traite les expressions des courants et tensions en régime transitoire (régimes : apériodique, critique et pseudopériodique) pour les circuits LC, RC et LRC. Ensuite, d'écrire les impédances complexes pour chaque branche pour un réseau linéaire. Enfin, de choisir le théorème adéquat pour simplifier et schématiser les circuits équivalents et identifier le courant et la tension pour un dipôle du réseau. Enfin, des applications en fin du chapitre sur ces régimes en appliquant les théorèmes généraux ont été proposées afin de reconnaître l'intensité du courant dans différentes branches du réseau linéaire.

Les mots clés de la leçon

Mots clefs : régimes : apériodique, critique et pseudopériodique, circuits LC, RC et LRC et impédances complexes, puissance complexe.

La durée de travail de l'étudiant :

environ 5-6 heures pour le cours et les applications

Les pré-requis nécessaires :

Les connaissances des propriétés générales du courant continu. Aussi, la connaissance des propriétés des réseaux linéaires (loi des nœuds et loi des mailles) et des dipôles passifs et actifs (courant, tension, loi d'Ohm pour un dipôle passif....) et une connaissance des théorèmes généraux et l'écriture des nombres complexes.

Les objectifs de la leçon :

Ce chapitre rassemble les applications du calcul de l'intensité d'un réseau électrique dans un dipôle ou branche du réseau en régime transitoire et sinusoïdal . Aussi, il groupe un certain nombre d'exercices utilisant les théorèmes généraux pour le calcul de l'intensité du courant alternatif ai sein d'un dipôle du réseau.. Enfin, ce chapitre introduit la notion de puissance complexe d'un dipole R, L et C.

Objectifs

- 1- de donner les lois de l'électrocinétique (loi d'Ohm, loi de Joule, lois de Kirchhoff) pour un réseau linéaire en régime transitoire et sinusoïdal.
- 2- de schématiser les circuits équivalents en donnant les expressions des impédances complexes équivalentes.
- 3- Aussi, de pouvoir choisir le théorème adéquat pour la recherche du courant dans une branche du réseau en régime sinusoïdal.

I/ Introduction

Dans le chapitre précédent, ont été étudiés des circuits électriques composés de dipôles générateurs de tension ou de courant continus associés à des dipôles récepteurs et des résistances. Dans ce chapitre, sont présentés deux autres types de dipôles très utilisés dans les circuits électroniques à savoir les condensateurs et les bobines. On commence d'abord par une étude de circuits simples en un régime transitoire qui se manifeste juste avant l'établissement d'un régime stationnaire. Ce dernier régime est caractérisé par une tension et un courant qui varient dans le temps. Une autre classe de régimes variables sont caractérisés par une tension et un courant périodiques. L'établissement de l'un de ces régimes dépend des sources d'alimentation et des éléments du circuit. Dans la première partie, on étudie les caractéristiques des nouveaux dipôles

(condensateurs et bobines) utilisés et leurs comportements en régime transitoire. La deuxième partie de ce chapitre est consacrée à l'étude des circuits électriques en régime variable sinusoïdal de basses fréquences. On y introduit la notion d'impédance complexe qui permet, par comparaison à l'étude en régime continu, d'écrire la loi d'Ohm et d'appliquer les théorèmes généraux déjà étudiés dans le chapitre précédent.

II/ Circuits en régime transitoire

Caractéristiques d'un condensateur

Un condensateur est un dipôle qui, en régime continu, emmagasine une charge électrique Q_0 proportionnelle à la tension continue U_0 qui lui est appliquée telle que : $Q_0 = C U_0$. Dans la

Fig.3.1.a

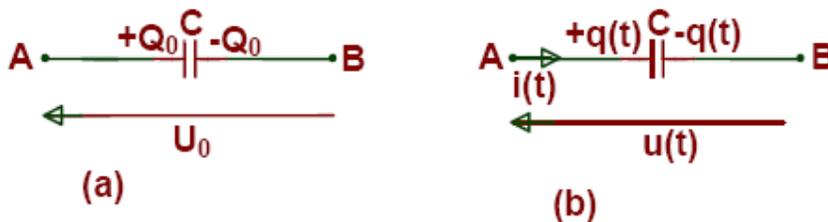


Fig.3.1

la charge $+Q_0$ est portée par l'armature **A** et la charge $-Q_0$ par l'armature **B**. Le coefficient de proportionnalité **C** est appelé capacité du condensateur. Son unité dans le système **SI** est le farad, noté **F**. Cette unité est trop grande et on ne rencontre pour les composantes électroniques, communément utilisées que des sous-multiples allant du micro-farad ($10^{-6} F$) au pico-farad ($10^{-12} F$). En régime variable, cette relation reste vraie et s'écrit à l'instant t : $q(t) = Cu(t) = C [V_A(t) - V_B(t)]$, Fig.3.1.b .

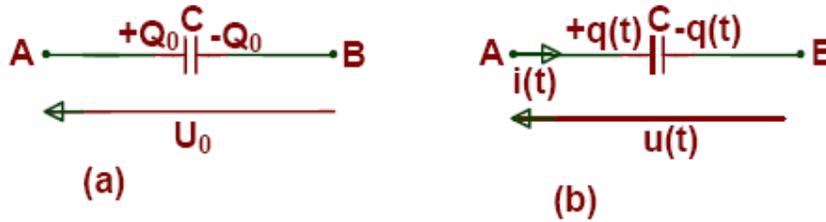


Fig.3.1

On comprend ainsi, qu'au cours de la charge, le mouvement des porteurs de charges se manifeste par un courant instantané $i(t)$ qui traverse le

condensateur:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \frac{du(t)}{dt}.$$

Remarque:

$i(t)$ est toujours une fonction positive. Au cours de la charge, on

écrit $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ puisque $q(t)$ est une fonction croissante du temps; Par

contre, on écrira $i(t) = -\frac{dq(t)}{dt}$ au cours de la décharge puisque dans ce cas $q(t)$ est une fonction décroissante du temps.

Au cours de la charge d'un condensateur, la puissance instantanée reçue par le condensateur s'écrit:

$$p(t) = u(t)i(t) = Cu(t) \frac{du(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}Cu^2(t) \right].$$

Si on suppose que le condensateur est initialement déchargé, l'énergie reçue par le condensateur au bout d'un temps t_0 est:

$$W = \int_0^{t_0} p(t)dt = \frac{1}{2}C \int_0^{t_0} \frac{d}{dt} [u^2(t)] dt = \frac{1}{2}C [u^2(t_0) - u^2(0)] = \frac{1}{2}Cu^2(t_0),$$

$u(0) = 0.$

Autrement :

$$W = \int_0^{t_0} p(t)dt = \int_0^{t_0} u(t)i(t)dt = \int_0^{t_0} C u(t) \frac{du(t)}{dt} dt. \text{ Si } t_0 \rightarrow \infty, u \rightarrow U_0$$

et $q \rightarrow Q_0$

$$W = C \int_0^{U_0} u du = \frac{1}{2} C U_0^2 = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C}$$

On retrouve ainsi l'expression de l'énergie électrostatique stockée dans un

condensateur $W = \frac{Q_0^2}{2C}$.

Association de condensateurs

En série

Considérons l'association en série de n condensateurs dont le k ème a la capacité C_k , avec $1 \leq k \leq n$, Fig.3.2

Chacun de ces condensateurs est traversé par la même intensité de courant i . On peut écrire pour chaque condensateur une relation entre cette intensité et la

$$i = C_k \frac{du_k}{dt}$$

tension à ses bornes: où u_k représente la tension aux bornes du condensateur numéro k .

Par définition, le condensateur équivalent entre A et B, de capacité C est tel que

$$i = C \frac{du}{dt} \text{ avec } u = \sum_{k=1}^n u_k$$

$$\frac{du}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{du_k}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{i}{C_k} = \frac{i}{C}$$

Ce qui donne :

$$\frac{1}{C} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k}$$

d'où:

Pour une association de condensateurs en série, l'inverse de la capacité équivalente est égale à la somme des inverses des capacités.

En parallèle

Considérons maintenant l'association en parallèle des n condensateurs précédents de capacités C_k , avec $1 \leq k \leq n$, Fig.3. 3

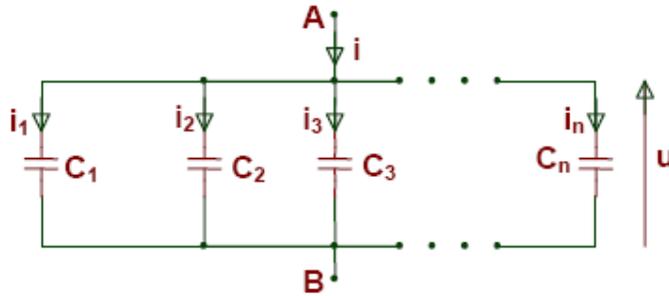


Fig.3.3

Chaque condensateur est soumis à la même tension u et est traversé par un courant d'intensité $i_k : i_k = C_k \frac{du}{dt}$

L'intensité du courant total qui traverse le condensateur équivalent C est égale à la somme de ces intensités:

$$i = C \frac{du}{dt} = \sum_{k=1}^n i_k = \sum_{k=1}^n C_k \frac{du}{dt} = \frac{du}{dt} \sum_{k=1}^n C_k$$

$$C = \sum_{k=1}^n C_k$$

donc:

Pour une association de condensateurs en parallèle, la capacité équivalente est égale à la somme des capacités.

Caractéristique d'une bobine

Dans une bobine, le flux magnétique instantané est proportionnel au courant i qui la parcourt :

$$\Phi = L i .$$

Le coefficient L est appelé inductance propre ou self-inductance de la bobine. Il s'exprime en henry (H). Lorsque le courant varie, il apparaît dans la bobine une *f.e.m.* induite qui s'oppose à la variation du courant (*loi de Lenz-Faraday*) :

La figure suivante montre le symbole que nous utilisons pour une bobine et sa modélisation en convention

récepteur:Fig.3.4



Fig.3.4

A cette modélisation correspond l'équation:

$$u(t) = V_A(t) - V_B(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

La puissance instantanée reçue par une bobine s'écrit alors:

$$p(t) = u(t)i(t) = Li(t) \frac{di(t)}{dt} = \frac{1}{2}L \frac{d}{dt} [i^2(t)]$$

Si on suppose que la bobine est initialement non parcourue par un courant,

l'énergie reçue par la bobine au bout d'un temps t_0 est:

$$W = \int_0^{t_0} p(t)dt = \frac{1}{2}L \int_0^{t_0} \frac{d}{dt} [i^2(t)] dt = \frac{1}{2}L [i^2(t_0) - i^2(0)] = \frac{1}{2}Li^2(t_0)$$

puisque $i(0) = 0$.

Autrement: $W = \int_0^{t_0} p(t)dt = \int_0^{t_0} u(t)i(t)dt = \int_0^{t_0} Li \frac{di}{dt} dt$, on retrouve

$$W = \frac{LI_0^2}{2}$$

l'expression de l'énergie magnétique stockée dans une bobine:

Association de bobines

En série

On considère l'association en série de n bobines d'inductances propres L_k , avec $1 \leq k \leq n$, Fig.3.5

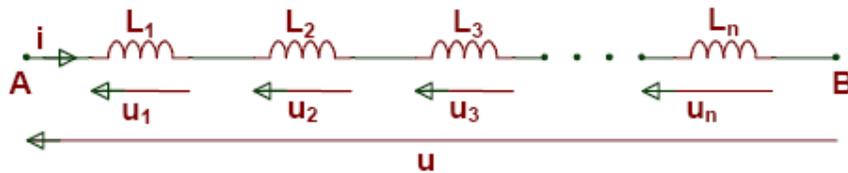


Fig.3.5

Chaque bobine est traversée par le même courant i et est soumise à une

$$u_k(t) = L_k \frac{di(t)}{dt}$$

tension

La tension aux bornes A et B de l'ensemble est égale à la somme des tensions partielles, donc:

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

d'où:

Pour une association de bobines en série l'inductance équivalente est égale à la somme des inductances.

En parallèle

On considère l'association en parallèle de n bobines d'inductances propres L_k , avec $1 \leq k \leq n$, Fig.3.6

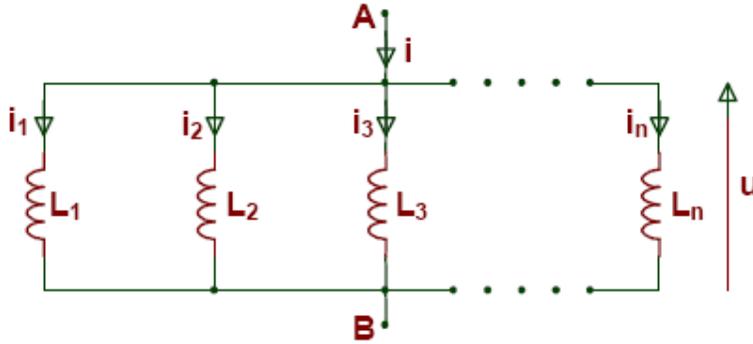


Fig.3.6

Chaque bobine est soumise à la même tension u et est traversée par un courant i_k , tel que :

$$u(t) = L_k \frac{di_k(t)}{dt}$$

L'intensité totale est égale à la somme des intensités partielles, donc:

$$i(t) = \sum_{k=1}^n i_k(t)$$

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{u(t)}{L} = \sum_{k=1}^n \frac{di_k(t)}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{u(t)}{L_k}$$

d'où:

$$\frac{1}{L} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k}$$

Par conséquent:

Pour une association de bobines en parallèle, l'inverse de l'inductance propre équivalente est la somme des inverses des inductances propres.

Etude de la charge d'un condensateur

On considère le circuit schématisé sur la Fig.3.7

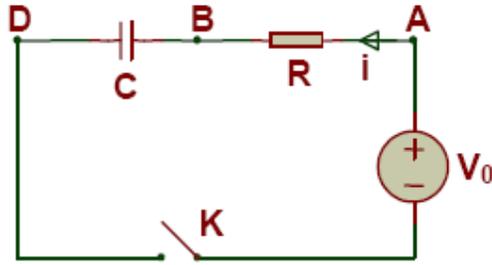


Fig.3.7

La charge $q(t)$ du condensateur de capacité C est obtenue à l'aide d'un générateur de tension continue V_0 et d'une résistance R . On suppose que la charge initiale du condensateur est nulle et qu'on ferme l'interrupteur K à l'instant $t = 0$.

A tout instant $t > 0$, la loi des mailles permet d'écrire:

$$V_0 = V_A - V_D = (V_A - V_B) + (V_B - V_D) = Ri(t) + \frac{q(t)}{C}$$

avec la relation entre la charge et l'intensité : $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$

On obtient donc l'équation différentielle suivante : $\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{RC} = \frac{V_0}{R}$

Toute solution de cette équation différentielle du premier ordre, linéaire, à coefficients constants et avec second membre peut s'écrire comme la somme d'une solution générale de l'équation sans second membre (équation homogène) et une solution particulière de l'équation complète avec second membre.

Comme solution particulière de l'équation complète, on peut considérer le régime stationnaire (indépendant du temps): $\frac{dq(t)}{dt} = 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$ $q(t) = CV_0$

La solution de l'équation différentielle sans second membre donne:

$$\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{RC} = 0 \Leftrightarrow \frac{dq(t)}{q(t)} = -\frac{dt}{RC} \Leftrightarrow q(t) = Ke^{-\frac{t}{RC}}$$

La solution générale s'écrit donc :

$$q(t) = CV_0 + Ke^{-\frac{t}{RC}}$$

La solution vérifiant la condition initiale :

$$t = 0, q(t = 0) = CV_0 + K = 0, \text{ d'où : } K = -CV_0$$

$$q(t) = CV_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), u(t) = V_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

On a donc :

$$\text{et } i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} = i_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

avec $\tau = RC$: constante de temps exprimée en seconde.

Les figures 3.8 (a,b) donnent les allures des évolutions temporelles de la tension et de l'intensité aux bornes du condensateur.

Remarque:

Plus τ est petit, plus rapidement $q(t)$, $i(t)$ et $u(t)$ atteignent leurs valeurs finales. La constante de temps τ est également désignée temps de relaxation du circuit (R, C).

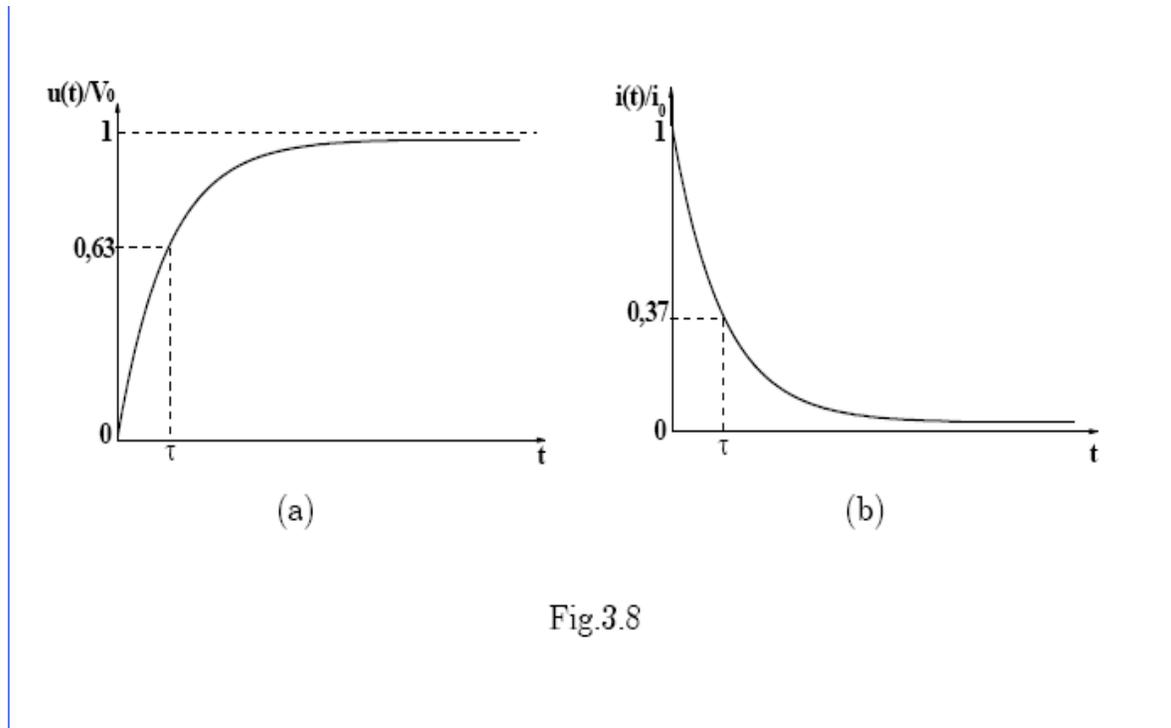


Fig.3.8

Décharge dans une résistance d'un condensateur initialement chargé

On considère la décharge à travers une résistance non inductive R , d'un condensateur de capacité C , doté d'une charge initiale Q_0 , Fig.3.9

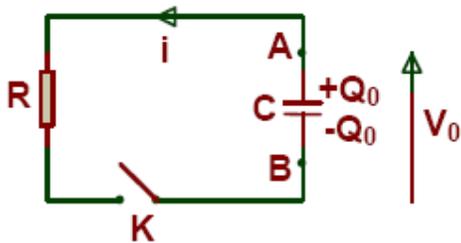


Fig.3.9

At=0, on ferme l'interrupteur K .

un instant t , la loi des mailles donne:

$$V_A - V_B - Ri = 0$$

La charge q du condensateur obéit à la relation suivante: $\frac{q}{C} - Ri = 0$

$$i = -\frac{dq}{dt} > 0$$

Le courant i est engendré par une diminution de la charge:

On obtient alors: $\frac{dq}{dt} + \frac{q}{\tau} = 0$ avec $\tau = RC$, dont la solution est de la

forme: $q = Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $Q_0 = CV_0$

Aussi: $u_C = \frac{q}{C} = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ et $i = -\frac{dq}{dt} = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} = i_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ est le courant maximum initial (au début de la décharge).

Fig.3.10

donne l'évolution dans le temps de la charge du condensateur au cours de la décharge.

Bilan d'énergie:

L'énergie dissipée à travers la résistance R est:

$$W_R = \int_0^{\infty} Ri^2 dt = \frac{V_0^2}{R} \int_0^{\infty} e^{-2\frac{t}{\tau}} dt = \frac{1}{2} CV_0^2 = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C}$$

On constate que durant la décharge, le condensateur restitue au circuit extérieur (résistance) l'énergie qu'il avait emmagasinée au départ.

Etablissement d'un courant à travers une bobine

On considère le circuit présenté sur la Fig.3.11

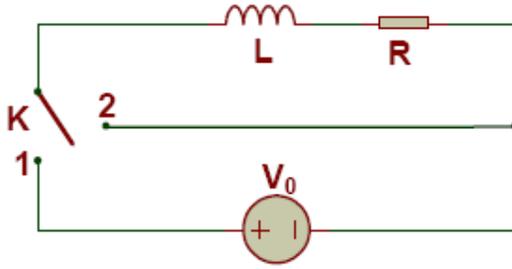


Fig.3.11

On suppose qu'initialement l'interrupteur est ouvert et qu'aucun courant ne circule : $i(t=0) = 0$. A l'instant $t=0$ on ferme l'interrupteur en position 1. Pour $t > 0$, la loi des

$$V_0 = L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t)$$

mailles permet d'écrire :

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) - V_0 = 0$$

Ce qui donne l'équation différentielle :

On retrouve une équation différentielle du premier ordre, linéaire, à coefficients constants et avec second membre, dont la solution générale de l'équation sans second membre s'écrit :

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = 0 \text{ d'où : } i(t) = K e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ avec } \tau = \frac{L}{R}, \text{ temps de relaxation.}$$

Comme solution particulière de l'équation complète, on peut chercher le régime

stationnaire, soit : $i = \frac{V_0}{R}$, ce qui donne pour la solution complète

: $i(t) = \frac{V_0}{R} + K e^{-\frac{t}{\tau}}$ où k est une constante définie par la condition initiale

$K = -\frac{V_0}{R}$, de ce fait :

$$i(t) = \frac{V_0}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = i_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \text{ avec } i_0 = \frac{V_0}{R}$$

et $u(t) = L \frac{di(t)}{dt} = \frac{LV_0}{\tau R} e^{-\frac{t}{\tau}} = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$

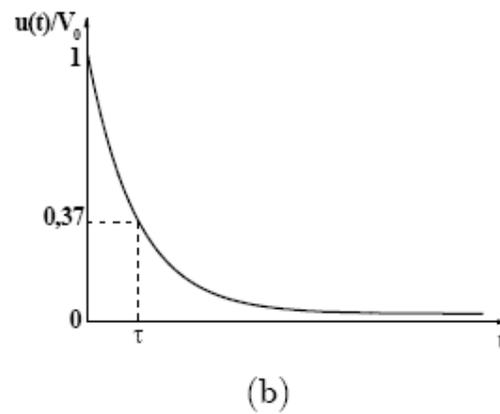
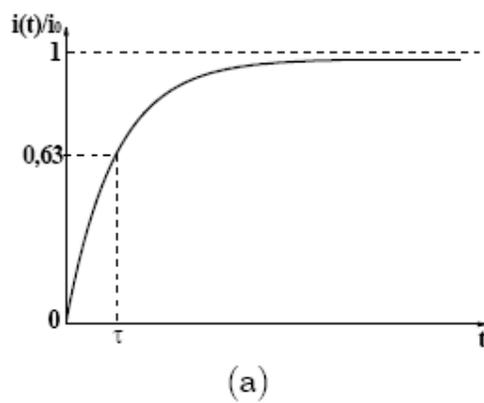


Fig.3.12

Remarque

On constate que ce temps de relaxation obéit à la même observation faite à propos de la charge d'un condensateur.

Rupture de courant

La bobine de Fig.3.11 étant parcourue par l'intensité de courant maximale $i_0 = \frac{V_0}{R}$, on inverse instantanément l'interrupteur K de la position 1 vers 2. A un instant t ultérieur, un courant variable d'intensité $i(t)$ parcourt la résistance R .

La bobine agit comme un générateur de $f.e.m.e = -L \frac{di}{dt}$.

La loi des mailles donne:

$$e = Ri = -L \frac{di}{dt}$$

d'où: $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0$

$$i = i_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}, \tau = \frac{L}{R}$$

Donc :

Fig.3.13

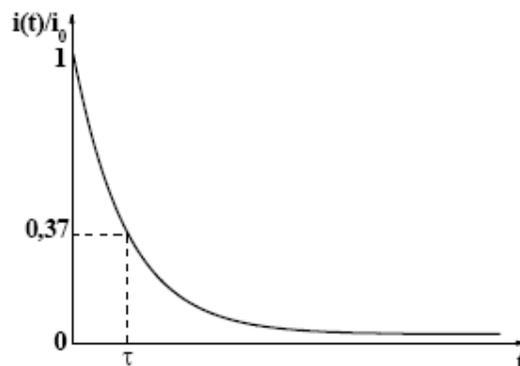


Fig.3.13

donne l'évolution dans le temps du courant de rupture dans une bobine.

Bilan d'énergie:

L'énergie emmagasinée dans la bobine est dissipée à travers la résistance R . En effet,

$$W_R = \int_0^\infty Ri^2 dt = \frac{V_0^2}{R} \int_0^\infty e^{-2\frac{t}{\tau}} dt = \frac{1}{2}L\frac{V_0^2}{R^2} = \frac{1}{2}Li_0^2$$

Etude de la décharge d'un condensateur à travers une bobine et une résistance

On considère le circuit *RLC* série de la Fig.3.14 On suppose qu'initialement le condensateur est chargé et qu'il ne circule aucun courant (interrupteur ouvert) : $q(t=0) = Q_0$ et $i(t=0) = 0$

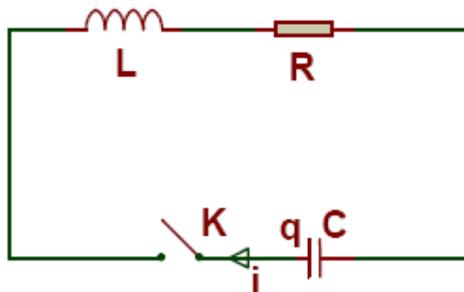


Fig.3.14

A l'instant $t > 0$, la *d.d.p.* $\frac{q(t)}{C}$ et la *f.e.m.* $e = -L\frac{di(t)}{dt}$ aux bornes respectives du condensateur de capacité C et de la bobine d'inductance propre L jouent le rôle de sources de tension pour ce circuit.

La loi des mailles permet d'écrire :

$$\frac{q(t)}{C} = L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) \text{ et } i(t) = -\frac{dq(t)}{dt}$$

On obtient l'équation différentielle suivante :

$$LC \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + RC \frac{dq(t)}{dt} + q(t) = 0$$

ou bien : $\frac{d^2 q(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{LC} q(t) = 0$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre sans second membre.

Pour résoudre cette équation il faut chercher les racines de l'équation

caractéristique associée de type : $r^2 + 2\alpha r + \omega_0^2 = 0$

$$\alpha = \frac{R}{2L} \text{ et } \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

où

Celle-ci a pour discriminant : $\Delta' = \alpha^2 - \omega_0^2$

La valeur de la résistance pour laquelle ce discriminant est nul est appelée

$$R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

résistance critique:

Les solutions de l'équation différentielle sont différentes selon le nombre et le type

des racines de l'équation caractéristique. On dit que le régime est critique si $\Delta' =$

0 , apériodique si $\Delta' > 0$ et pseudo-périodique si $\Delta' < 0$.

Cas de forte résistance:

L'amortissement est fort, $\alpha > \omega_0$ et le discriminant $\Delta' > 0$.

L'équation caractéristique admet alors deux racines réelles distinctes :

$$r_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \text{ et } r_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$r_1 r_2 = \frac{1}{LC} = \omega_0^2$$

et r_1 et r_2 sont de même signe (négatives) puisque

La solution de l'équation différentielle de la forme :

$$q(t) = \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}$$

n'est autre que la somme de deux fonctions exponentielles décroissantes dans le temps sans oscillations.

De même, $i(t)$ s'écrit:

$$i(t) = -\lambda_1 r_1 e^{r_1 t} - \lambda_2 r_2 e^{r_2 t}$$

Les paramètres λ_1 et λ_2 sont définis par les conditions initiales :

$$q(t=0) = \lambda_1 + \lambda_2 = Q_0$$

$$i(t=0) = -\lambda_1 r_1 - \lambda_2 r_2 = 0$$

d'où:

$$\lambda_1 = -\frac{r_2 Q_0}{r_1 - r_2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{r_1 Q_0}{r_1 - r_2}$$

Soit en reportant dans les expressions de la charge et de l'intensité :

$$q(t) = \frac{Q_0}{r_1 - r_2} (r_1 e^{r_2 t} - r_2 e^{r_1 t})$$

$$i(t) = \frac{r_1 r_2 Q_0}{r_1 - r_2} (e^{r_1 t} - e^{r_2 t})$$

Les figures 3.15 et 3.16 suivantes illustrent les évolutions temporelles de ces fonctions $q(t)$ et $i(t)$ en régimes aperiodiques.

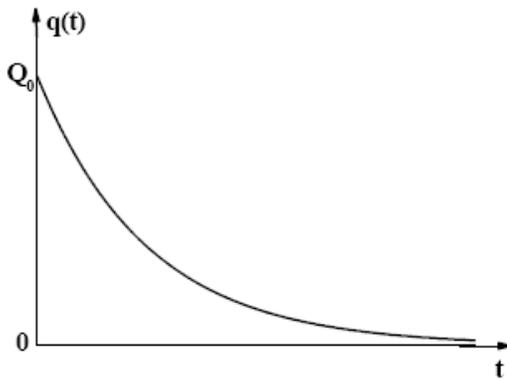


Fig.3.15



Fig.3.16

Cas de résistance critique:

L'amortissement est dit critique, $\alpha = \omega_0$ et le discriminant $\Delta' = 0$.

L'équation caractéristique a une solution double:

$$r = \frac{-R}{2L} = -\frac{1}{\sqrt{LC}} = -\frac{1}{\tau} \text{ avec } \tau = \sqrt{LC}$$

L'équation différentielle admet alors pour solution :

$q(t) = (\mu + \lambda t)e^{rt}$ où λ et μ sont deux constantes indépendantes du temps.

Ce qui donne pour l'intensité :

$$i(t) = -\frac{dq(t)}{dt} = -(\lambda + \mu r + \lambda r t) e^{rt}$$

Les constantes λ et μ sont définies par les conditions initiales :

$$q(t = 0) = Q_0 = \mu$$

$$i(t = 0) = 0, \text{ d'où: } (\lambda + \mu r) = 0$$

$$\lambda = -\mu r = \frac{Q_0}{\sqrt{LC}}$$

d'où:

Nous aurons donc pour la solution globale :

$$q(t) = Q_0 \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad i(t) = Q_0 \frac{t}{\tau^2} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

avec $\tau = \sqrt{LC}$

La dérivée par rapport au temps de $q(t)$ donne: $\frac{dq(t)}{dt} = -Q_0 \frac{t}{\tau^2} e^{-\frac{t}{\tau}}$. Le

maximum de $q(t)$ est obtenu pour $\frac{dq(t)}{dt} = 0$, soit $t = 0$ ou $t = \infty$. Par contre, la dérivée par rapport au temps de

$i(t)$ donne: $\frac{di(t)}{dt} = \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) \frac{Q_0}{\tau^2} e^{-\frac{t}{\tau}}$ Le maximum de $i(t)$ est obtenu

pour $\frac{di(t)}{dt} = 0$

Les figures 3.17 et 3.18 suivantes illustrent les allures des évolutions temporelles de la charge du condensateur et de l'intensité à travers la bobine. L'intensité est maximale pour $t = \tau$.

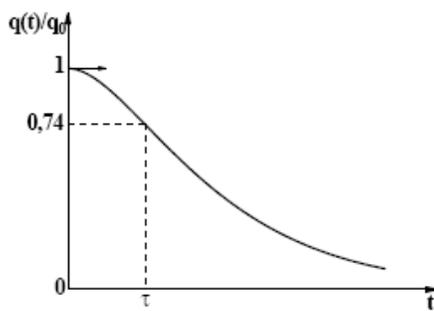


Fig.3.17

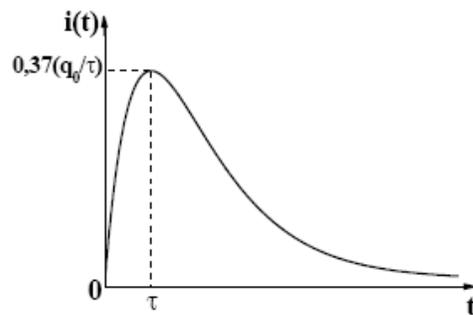


Fig.3.18

Cas de faible résistance:

L'amortissement est faible ou sous-critique, $\alpha < \omega_0$ et le discriminant $\Delta' < 0$.

L'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées :

$$r_1 = -\alpha + j\omega \quad \text{et} \quad r_2 = -\alpha - j\omega$$

où $\alpha = \frac{R}{2L}$, et $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ sont les valeurs absolues des parties réelle et imaginaire de ces racines.

Notons que ω peut s'écrire aussi sous la forme:

$$\omega = \frac{\sqrt{R_c^2 - R^2}}{2L} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \sqrt{\frac{1}{\tau^2} - \alpha^2}$$

La solution générale de l'équation différentielle s'écrit alors :

$$q(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} = Ae^{-\alpha t} e^{j\omega t} + Be^{-\alpha t} e^{-j\omega t}$$

D'où:

$$\begin{aligned} q(t) &= e^{-\alpha t} [(A + B) \cos \omega t + j(A - B) \sin \omega t] \\ &= (A + B) e^{-\alpha t} \left[\cos \omega t + j \frac{A - B}{A + B} \sin \omega t \right] \end{aligned}$$

En posant: $\tan \varphi = j \frac{B - A}{A + B}$, $q(t)$ aura pour forme:

$$q(t) = \frac{(A + B)}{\cos \varphi} e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi)$$

Compte tenu des conditions initiales:

$$At = 0, \quad q(t = 0) = Q_0 = A + B$$

$$\text{et} \quad i(t = 0) = -\frac{dq}{dt}(t=0) = 0 = (A + B)(\alpha + \omega \tan \varphi)$$

On aura donc: $\tan \varphi = -\frac{\alpha}{\omega}$

$$\text{et} \quad \frac{(A + B)}{\cos \varphi} = (A + B) \sqrt{1 + \tan^2 \varphi} = Q_0 \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{\omega^2}}$$

Il s'ensuit:

$$q(t) = \frac{(A + B)}{\cos \varphi} = Q_0 \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{\omega^2}} e^{-\alpha t} \cos \left(\omega t + \arctan \left(-\frac{\alpha}{\omega} \right) \right)$$

ou bien:

$$q(t) = \frac{Q_0}{\cos \varphi} e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi)$$

La charge est une fonction sinusoïdale dont l'amplitude s'amortit dans le temps,

Fig.3.19 .

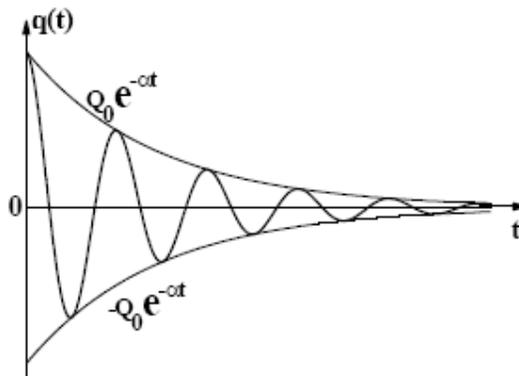


Fig.3.19

L'amortissement est traduit par deux exponentielles symétriques de constante de temps $\tau = \sqrt{LC}$. C'est le régime pseudo-périodique dans lequel l'oscillation de la charge (ou la tension aux bornes du condensateur) est tronquée en amplitude

dans le temps et présente une pseudo-période:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{\omega^2}}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{\omega^2}}}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$$

où T_0 est la période d'oscillations propres du circuit sans amortissement, relative à un circuit LC non résistif.

Le courant, traversant un condensateur au cours de sa décharge, $i(t)$ est représenté dans le temps par le même type d'allure pseudo-périodique, Fig.3.20 .

$$i(t) = -\frac{dq(t)}{dt} = \frac{\omega Q_0}{\cos^2 \varphi} e^{-\alpha t} \sin \omega t$$

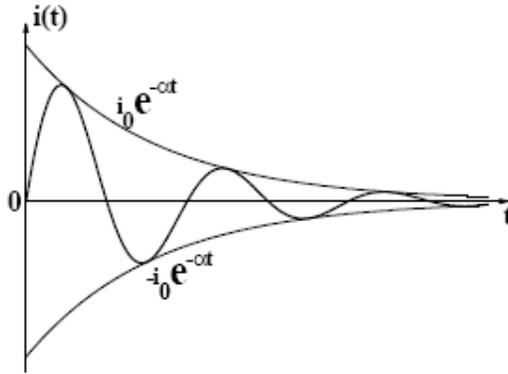


Fig.3.20

Ces oscillations traduisent l'échange périodique de l'énergie électrique entre le condensateur et la bobine ; l'amortissement est dû à la résistance qui transforme progressivement cette énergie en chaleur.

III/ Régime sinusoïdal permanent

Dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires (*A.R.Q.S.*) et pour un circuit ne comportant que des dipôles linéaires en série, l'intensité du courant $i(t)$ a la même valeur en tout point du circuit. Ceci est réalisable dans le domaine des basses fréquences dans lequel les valeurs des résistances, des capacités et des self-inductances sont indépendantes de la fréquence. En outre, dans cette approximation, les théorèmes généraux de l'électrocinétique, présentés dans le chapitre 2, restent valables pour les réseaux linéaires, en remplaçant les intensités

de courant et les tensions par leurs grandeurs respectives instantanées.

Fig.3.21 représente un circuit linéaire alimenté par une f.e.m. alternative:

$$e(t) = e_0 \cos \omega t \text{ où } e_0 \text{ est l'amplitude de } e(t) \text{ et } \omega t \text{ la phase.}$$

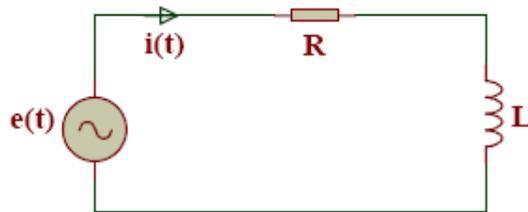


Fig.3.21

La loi des mailles s'écrit:

$$e - Ri - L \frac{di}{dt} = 0$$

d'où: $Ri + L \frac{di}{dt} = e_0 \cos \omega t$

Pour résoudre cette équation, on considère d'abord l'équation sans second membre:

$$Ri + L \frac{di}{dt} = 0, \text{ dont la solution est } i_1(t) = i_{10} \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) = i_{10} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Ce courant correspond à un régime transitoire qui disparaît rapidement, figure 3.22.

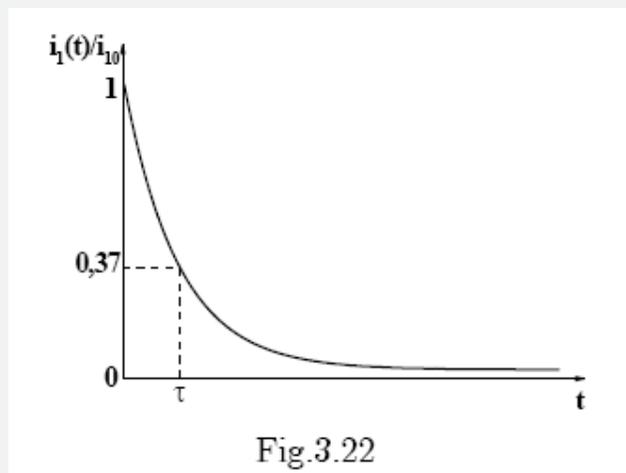


Fig.3.22

La solution particulière avec second membre est calculée à partir de:

$$Ri + L \frac{di}{dt} = e_0 \cos \omega t$$

Elle est de la forme: $i_2(t) = i_{20} \cos(\omega t - \varphi)$

La solution générale $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$. Comme $i_1(t)$ tend rapidement vers zéro, l'équation précédente devient alors $i(t) = i_2(t) = i_0 \cos(\omega t - \varphi)$ où φ ; est le déphasage entre le courant et la tension. Ce courant décrit un régime qui dure qu'on appelle régime sinusoïdal permanent.

En remplaçant $i(t)$ par sa valeur, on obtient:

$$-Li_0\omega \sin(\omega t - \varphi) + Ri_0 \cos(\omega t - \varphi) = e_0 \cos \omega t$$

qui donne: $-L\omega \cos \varphi + R \sin \varphi = 0$

$$L\omega \sin \varphi + R \cos \varphi = \frac{e_0}{i_0} \text{ et } \tan \varphi = \frac{L\omega}{R}$$

En multipliant par $\sin \varphi$; et par $\cos \varphi$, le système d'équations précédentes, on aura:

$$R(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \frac{e_0}{i_0} \cos \varphi$$

d'autre

$$\frac{1}{\cos^2 \varphi} = 1 + \tan^2 \varphi, \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{L\omega}{R}\right)^2}}$$

part,

$$i_0 = \frac{e_0}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$$

donc: et par suite $i(t)$ est alors:

$$i(t) = \frac{e_0}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \cos(\omega t - \varphi)$$

Impédance complexe d'un dipôle linéaire

Notation complexe

Dans le cas général, la tension alternative $u(t)$ et le courant sinusoïdal $i(t)$

s'écrivent comme suit:

$$u(t) = u_0 \cos(\omega t - \psi)$$

$$i(t) = i_0 \cos(\omega t - \varphi)$$

Dans le but d'alléger la résolution des équations différentielles, on associe à ces grandeurs les nombres complexes $\bar{u}(t)$ et $\bar{i}(t)$ tels que:

$$\bar{u}(t) = u_0 \exp j(\omega t - \psi) = u_0 [\cos(\omega t - \psi) + j \sin(\omega t - \psi)]$$

$$\bar{i}(t) = i_0 \exp j(\omega t - \Phi) = i_0 [\cos(\omega t - \Phi) + j \sin(\omega t - \Phi)]$$

On peut écrire aussi:

$$\bar{u}(t) = \bar{u}_0 \exp j\omega t \text{ et } \bar{i}(t) = \bar{i}_0 \exp j\omega t$$

où \bar{u}_0 et \bar{i}_0 sont appelés les amplitudes complexes de la tension et du courant.

Remarque:

Les grandeurs $i(t)$ et $u(t)$ correspondent aux parties réelles de $\bar{i}(t)$ et $\bar{u}(t)$.

Impédance complexe

a- Définition

Aux bornes d'un dipôle, la tension complexe $\bar{u}(t)$ est proportionnelle au courant $\bar{i}(t)$,

le coefficient de proportionnalité \bar{Z} s'appelle l'impédance complexe.

$$\bar{Z} = \frac{\bar{u}(t)}{\bar{i}(t)} = \frac{\bar{u}_0}{\bar{i}_0} = \frac{u_0}{i_0} e^{-j(\Psi-\Phi)}$$

$$\bar{Z} = |\bar{Z}| e^{-j(\Psi-\Phi)} \text{ avec } |\bar{Z}| = \frac{u_0}{i_0}$$

ou encore $\bar{Z} = |\bar{Z}| e^{j\varphi}$ où $\varphi = -(\Psi - \Phi)$.

b- Loi d'Ohm en notation complexe

$$\bar{Z} = \frac{\bar{u}_0}{\bar{i}_0} \text{ d'où } \bar{u}_0 = \bar{Z}\bar{i}_0$$

En utilisant les amplitudes complexes on a: $\bar{u}_0 = \bar{Z}\bar{i}_0$, cette relation représente la loi d'Ohm en notation complexe (elle rappelle la relation $U=RI$ en régime continu).

c- Remarque:

\bar{Z} peut s'écrire sous la forme suivante: $\bar{Z} = R + jS$

où R et S sont respectivement la résistance et la réactance du dipôle.

$$\bar{A} = \frac{1}{\bar{Z}} = \bar{Z}^{-1}$$

De même nous désignons par admittance complexe:

Applications aux dipôles R, L et C

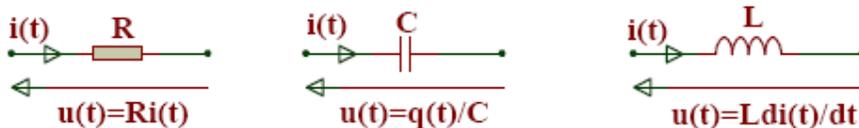


Fig.3.23

• Résistance pure:

$$u = Ri \Rightarrow \bar{u} = R\bar{i}$$

d'où : $\bar{Z} = R$ et $\varphi = 0$

► **Self-inductance:**

$$u = L \frac{di}{dt} \Rightarrow \frac{d\bar{i}}{dt} = j\omega \bar{i}$$

$$\bar{u} = jL\omega \bar{i} \Rightarrow \bar{Z} = jL\omega = L\omega \exp(j\frac{\pi}{2})$$

d'où: $|\bar{Z}| = L\omega$ et $\varphi = \frac{\pi}{2}$

► **Capacité:**

$$u = \frac{q}{C} \text{ et } i = \frac{dq}{dt} = \frac{C du}{dt} \Rightarrow \frac{d\bar{u}}{dt} = j\omega \bar{u}$$

$$\bar{i} = jC\omega \bar{u} \Rightarrow \bar{Z} = \frac{1}{jC\omega}$$

$$\bar{Z} = \left[-\frac{j}{C\omega} \right] = \frac{1}{C\omega} \left[\exp(-j\frac{\pi}{2}) \right]$$

d'où: $|\bar{Z}| = \frac{1}{C\omega}$ et $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

Remarque :

Les relations précédentes montrent qu'à haute fréquence, l'impédance d'un condensateur tend vers zéro ($\bar{Z}_C \rightarrow 0$) alors que celle d'une bobine d'inductance L se comporte comme un circuit ouvert ($\bar{Z}_L \rightarrow \infty$). Inversement à faible fréquence (ω très faible), l'impédance du condensateur tend vers ∞ ($\bar{Z}_C \rightarrow \infty$) alors que celle de la bobine tend vers zéro. On peut séparer les courants de hautes fréquences (*H.F*) des courants des

basses fréquences (B. F) à l'aide du montage suivant:

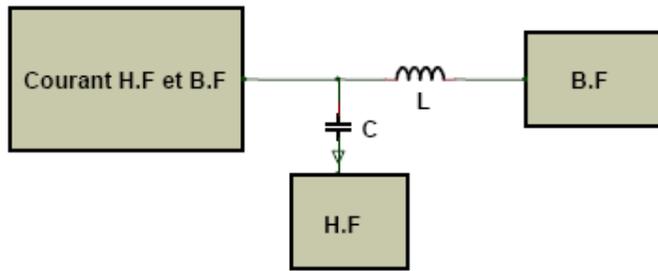


Fig.3.24

Association d'impédances

En série:

Pour une association de n impédances en série, l'impédance complexe

$$\bar{Z}_{\acute{e}q} = \sum_{k=1}^n \bar{Z}_k$$

équivalente est égale à la somme des impédances complexes:

En parallèle:

Pour une association de n impédances en parallèle, l'admittance complexe

équivalente est la somme des admittances complexes:

$$\frac{1}{\bar{Z}_{\acute{e}q}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\bar{Z}_k} \text{ ou bien } \bar{A}_{\acute{e}q} = \sum_{k=1}^n \bar{A}_k$$

Etude d'un circuit RLC série en régime sinusoïdal

Impédance du circuit

Considérons le circuit de la Fig.3.25

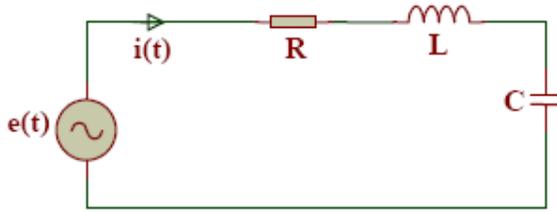


Fig.3.25

Les éléments du circuit sont en série, l'impédance complexe est:

$$\bar{Z} = \bar{Z}_R + \bar{Z}_L + \bar{Z}_C = R + jL\omega - \frac{j}{C\omega} = |\bar{Z}| \exp j\varphi$$

où φ est le déphasage de la tension u par rapport au courant i ;

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i, \quad \bar{Z} = R + j \left[L\omega - \frac{1}{C\omega} \right]$$

L'impédance complexe s'écrit:

$$|\bar{Z}| = Z = \sqrt{R^2 + \left[L\omega - \frac{1}{C\omega} \right]^2}$$

D'où:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} ; \quad \varphi = \operatorname{arctg} \left[\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \right]$$

et

Résonance d'intensité

Les valeurs du module et de la phase du courant se déduisent de la loi

d'Ohm $\bar{u} = \bar{Z} \bar{i}$ avec $\bar{u} = \bar{e} = e_0 \exp j\omega t$ soit:

$$i_0 = |\bar{i}_0| = \frac{e_0}{\sqrt{R^2 + \left[L\omega - \frac{1}{C\omega} \right]^2}}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \left[\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \right]$$

a- Etude de $i_0 = f(\omega)$

$$\frac{i_0}{e_0} = f(\omega)$$

L'allure de la résonance est donnée par la courbe

Fig.3.26

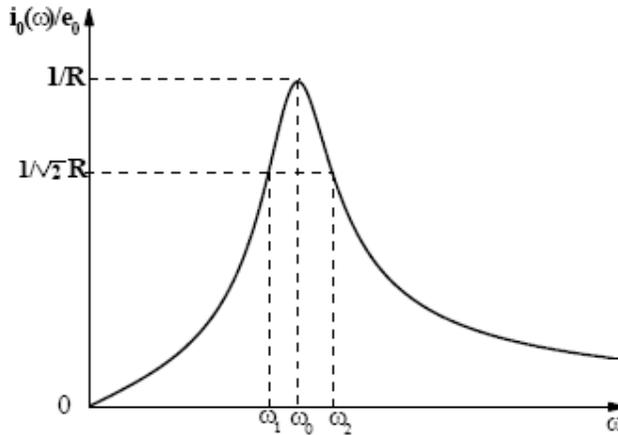


Fig.3.26

La résonance d'intensité est obtenue lorsque i_0 atteint une valeur

maximale $i_{0\max} = \frac{e_0}{R}$ pour $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, dite pulsation propre du circuit.

On définit aussi $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, la bande passante correspondant à des intensités i_0 comprises entre $i_{0\max}$ et $i_{0\max}/\sqrt{2}$.

Le facteur de qualité du circuit est donné par: $Q = \frac{U_C}{U}$ à la résonance.

Puisque à la résonance: $U_C = \frac{i_{0\max}}{C\omega_0}$, $U = Ri_{0\max}$ et $U_L = L\omega_0 i_{0\max}$,

on en déduit alors:

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$$

Remarque :

► Cette dénomination, donnée au facteur de qualité Q , est justifiée par le fait qu'aux bornes du condensateur, u_C prend, à la résonance d'intensité, une valeur $u_C = Qu$. Pour un circuit faiblement amorti ($Q \gg 1$), le condensateur subit des tensions éventuellement excessives (surtensions).

► En examinant la courbe $\frac{i_0(\omega)}{e_0}$ pour ω_0 , puis les valeurs de cette fonction pour $\frac{i_{0\max}}{e_0\sqrt{2}}$, on trouvera les valeurs de ω_1 et ω_2 , d'où on vérifie

que:
$$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

Lorsque $\Delta\omega$ diminue, le facteur de qualité Q augmente et la résonance est dite aiguë. Dans le cas contraire, on obtient une résonance dite floue.

b- Etude de $\varphi = f(\omega)$

L'allure du déphasage φ de la tension par rapport à l'intensité en fonction de ω est donnée par la courbe suivante : Fig.3.27

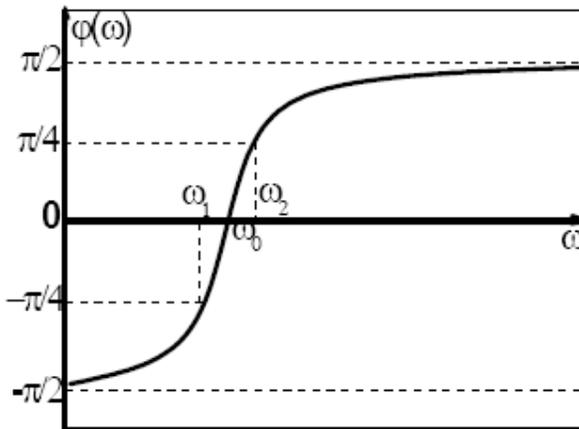


Fig.3.27

On remarque qu'à la résonance, $\varphi = 0$ et $-\pi/2 < \varphi < 0$ (circuit capacitif) pour $\omega < \omega_0$ et $0 < \varphi < +\pi/2$ (circuit inductif) pour $\omega > \omega_0$.

Puissance en régime sinusoïdal

Puissance moyenne

En introduisant les grandeurs efficaces, $u_{eff} = \frac{u_0}{\sqrt{2}}$ et $i_{eff} = \frac{i_0}{\sqrt{2}}$, on

aura
$$P_m = u_{eff} i_{eff} \cos \varphi$$

Comme pour un courant continu $P = UI$, on note l'appellation de $\cos \varphi$ par facteur de puissance. Afin d'économiser l'énergie, la *STEG*, impose une valeur de $\cos \varphi \simeq 0,9$ en Tunisie.

Puissance complexe

On la définit de manière que sa partie réelle représente la puissance moyenne P_m .

La puissance complexe \bar{P} est :
$$\bar{P} = \frac{1}{2} \bar{u} \bar{i}^*$$

Considérons les expressions suivantes:

$$u(t) = u_0 \cos(\omega t + \varphi) \text{ et } i(t) = i_0 \cos \omega t$$

en notation complexe:

$$\bar{u} = u_0 \exp(j\omega t) \exp(j\varphi) \text{ et si } \bar{i} = i_0 \exp(j\omega t)$$

La partie conjuguée de \bar{i} est : $\bar{i}^* = i_0 \exp(-j\omega t)$

La puissance complexe \bar{P} est alors:

$$\bar{P} = \frac{1}{2} u_0 i_0 \exp(j\varphi) = \frac{1}{2} u_0 i_0 (\cos \varphi + j \sin \varphi)$$

La puissance active: $P_m = \text{Re}(\bar{P})$

La puissance réactive: $P_r = \text{Im}(\bar{P}) = \frac{1}{2} u_0 i_0 \sin \varphi$

Autrements nous pouvons écrire que:

$$\begin{aligned}\bar{P} &= \frac{1}{2} \overline{ui^*} = \frac{1}{2} \overline{Z i i^*} = \frac{1}{2} \overline{Z i_0^2} = \frac{1}{2} Z i_0^2 (\cos \varphi + j \sin \varphi) \\ &= \frac{1}{2} i_0^2 (R + jS) \quad ; \quad \begin{cases} R = Z \cos \varphi \\ S = Z \sin \varphi \end{cases}\end{aligned}$$

$$\bar{P} = P_m + jP_r \text{ d'où : } P_m = \frac{1}{2} R i_0^2 \quad \text{:la puissance active.}$$

$$P_r = \frac{1}{2} S i_0^2 \quad \text{: la puissance réactive.}$$

Application: signification de la puissance réactive

Pour un circuit (R, L) série: $\bar{Z} = R + jL\omega$, d'où: $P_r = \frac{1}{2} L\omega i_0^2$

Or, l'énergie magnétique au sein d'une bobine est:

$$\begin{aligned}E_m &= \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} L i_0^2 \cos^2 \omega t \\ \frac{dE_m}{dt} &= -L\omega i_0^2 \cos \omega t \sin \omega t \\ &= \frac{-L\omega i_0^2}{2} \sin 2\omega t \\ &= -P_r \sin 2\omega t = P_r \sin (2\omega t + \pi)\end{aligned}$$

P_r : est donc l'amplitude de l'énergie oscillante dans la bobine laquelle est en opposition de phase par rapport à E_m .

Adaptation d'impédance

Soit le circuit suivant (figure 3.28), composé d'un générateur de tension sinusoïdale de *f.e.m e* et d'impédance \bar{Z} . Ce générateur alimente un dipôle, appelé charge, d'impédance \bar{Z} : Fig.3.28

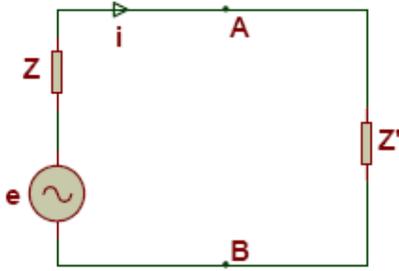


Fig.3.28

On désigne par $\bar{Z}' = R' + jS'$ l'impédance complexe de la charge, alors que $\bar{Z} = R + jS$ représente l'impédance complexe d'entrée au dipôle.

La loi d'Ohm donne:

$$\bar{i} = \frac{\bar{e}}{(\bar{Z} + \bar{Z}')}$$

En écrivant la puissance reçue par la charge:

$$P'_m = \frac{1}{2} R' i_0^2 = \frac{1}{2} R' \frac{e^2}{[(R + R')^2 + (S + S')^2]}$$

Pour les paramètres du générateur R et S fixés, la puissance P'_m est en premier lieu maximale pour $S = -S'$. Par conséquent, un circuit dans la charge, correspond à un circuit inductif dans le générateur et vice versa.

On obtient, ainsi:

$$P'_m = \frac{1}{2} R' \frac{e^2}{(R + R')^2}$$

En second lieu, cette dernière expression devient maximale lorsque

$R' = R$, ce qui donne:

$$P'_m = \frac{1}{8} \frac{e^2}{R}$$

La puissance reçue par le circuit est maximale si $\bar{Z}' = \bar{Z}^*$. On dit que l'impédance du circuit est adaptée à celle du générateur.

D'autre part, il ya lieu de remarque qu'un maximum de puissance dissipée dans la charge correspond aussi à un maximum de puissance dissipée par le générateur.

Accueil du module « Méthodes d'analyse des réseaux linéaires : Théorèmes généraux »

Ce chapitre traite les méthodes d'analyse des réseaux linéaires et plus spécifiquement l'application des théorèmes généraux sur des circuits électriques en courant continu. Enfin, des applications en fin du chapitre sur ces théorèmes ont été proposées afin de reconnaître l'intensité du courant dans différentes branches du réseau linéaire.

Les mots clés de la leçon

Mots clefs :, lois de Kirchhoff et des mailles, transformation de Kennelly, Théorème de superposition, théorème de Thévenin, Théorème de Norton, théorème de Millman.

La durée de travail de l'étudiant :

environ 5-6 heures pour le cours et les applications

Les pré-requis nécessaires :

Les connaissances des propriétés générales du courant continu. Aussi, la connaissance des propriétés des réseaux linéaires (loi des nœuds et loi des mailles) et des dipôles passifs et actifs (courant, tension, loi d'Ohm pour un dipôle passif...)

Les objectifs de la leçon :

Ce chapitre rassemble les applications des théorèmes généraux pour le calcul de l'intensité d'un réseau électrique dans un dipôle ou branche du réseau:théorème de superposition, théorème de Thévenin, Théorème de Norton et le théorème de Millman. Aussi, il groupe un certain nombre d'exercices

utilisant ces théorèmes. Enfin, la transformation de Kennelly, est introduite pour faciliter la recherche des intensités des courants dans des réseaux linéaires.

Objectifs

- 1-de donner les lois de l'électrocinétique (loi d'Ohm, loi de Joule, lois de Kirchhoff) pour un réseau linéaire.**
- 2-de schématiser les circuits équivalents en donnant les expressions des résistances équivalentes.**
- 3-Aussi, de pouvoir choisir le théorème adéquat pour la recherche du courant dans une branche du réseau.**

I/ Introduction

Dans la suite, on aura besoin d'une nomenclature pour la détermination de la valeur des courants, continus ou sinusoïdaux, circulant dans un circuit électrique.

Pour cela, on adopte les définitions suivantes:

- Un réseau est un assemblage très général de conducteurs dans lesquels circulent des courants. Ce réseau est qualifié de linéaire, s'il est constitué par des dipôles linéaires.

-Un nœud du réseau est un point d'intersection qui relie aux moins trois dipôles électrocinétiques.

- Une branche est une portion de circuit comprise entre deux nœuds consécutifs.

-Une maille est un ensemble de branches formant une boucle fermée.

Utilisant cette nomenclature, nous présentons dans ce qui suit les différentes méthodes d'analyse du circuit, appelées aussi théorèmes généraux. Ces théorèmes permettent le calcul de tous les courants et tensions dans le circuit.

II/ Les lois de Kirchhoff

Loi des noeuds

Pour un noeud la somme des courants entrants est égale à la somme des courants sortants.

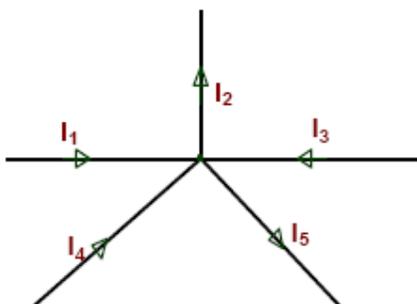


Fig.2.1.a

$$I_1 + I_3 + I_4 = I_2 + I_5$$

Remarque:

Les intensités des courants peuvent être rendues algébriques par une convention choisie. Si on considère les courants entrants positifs, les courants sortants seront négatifs, la relation précédente donne:

$$I_1 - I_2 + I_3 + I_4 - I_5 = 0$$

ou $\sum_i \varepsilon_i I_i = 0$ par convention: $\varepsilon = 1$ pour un courant entrant et $\varepsilon = -1$ pour un courant sortant .

Loi des mailles

Le long d'une maille, la somme algébrique des tensions est nulle. On exprime cette loi par la formule suivante: $\sum_i \varepsilon_i u_i = 0$
 ε_i vaut 1 si la tension u_i est orientée dans le sens du parcours arbitraire et -1 dans le cas contraire. Le circuit de la figure 2.1.b représente une maille formée par trois dipôles.

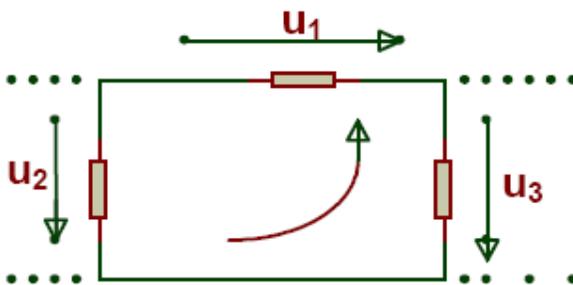


Fig. 2.1.b

L'application de cette loi permet d'écrire: $-u_1 + u_2 - u_3 = 0$

Remarque:

Pour un circuit comportant b branches et n noeuds, il faut déterminer b variables, les intensités des courants dans chaque branche. Il faut donc avoir un système de b équations indépendantes; les noeuds en fournissent $(n - 1)$ et les mailles doivent en fournir le reste, soit m équations indépendantes avec $m = b - (n - 1)$.

Applications

Diviseur de courant

Considérons le circuit représenté par

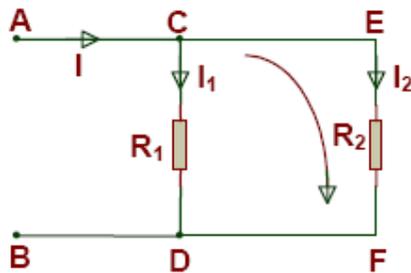


Fig.2.2

Le circuit comporte deux noeuds C et D . La seule équation aux noeuds est: $I = I_1 + I_2$

Il comporte deux branches parcourues par les courants I_1 et I_2 .

Une équation aux mailles est nécessaire: la maille *CEFDC* donne:

$$0 = -R_1 I_1 + R_2 I_2 = R_1 I_1 - R_2 (I - I_1)$$

$$: I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I \text{ et } I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I$$

ce qui donne:

I_1 et I_2 sont des fractions de I .

Diviseur de tension

Considérons le circuit de la Fig.2.3

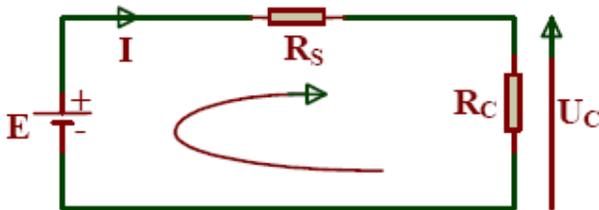


Fig.2.3

La loi des mailles donne :

$$E - R_s I - R_c I = 0, I = \frac{E}{R_s + R_c} \text{ et la tension de charge est :}$$

$$U_c = R_c I = \frac{R_c}{R_s + R_c} E, U_c \text{ est une fraction de } E.$$

Transformations de Kennelly

Ces transformations permettent le passage d'un groupe de résistances branchées en triangle (R_1, R_2, R_3) par un branchement en étoile de résistances ($r_1; r_2; r_3$) de sorte que les deux réseaux soient équivalents, Fig.2.4

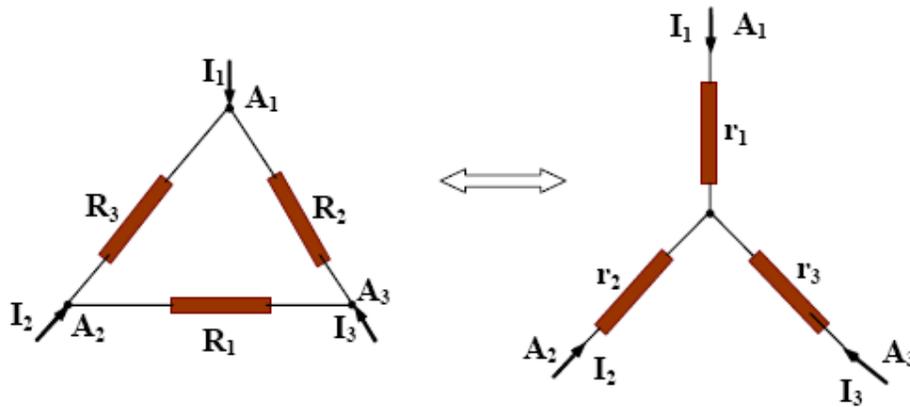


Fig.2.4

Désignons par I_1, I_2 et I_3 les intensités de courant arrivant de l'extérieur en A_1, A_2 et A_3 . Comme les deux réseaux sont équivalents, ces courants restent les mêmes. Supposons que l'on coupe la connection du réseau de résistances avec le reste du réseau en amont de A_3 ($I_3 = 0$), on doit donc avoir une équivalence entre les points A_1 et A_2 des deux réseaux, Fig.2.5 .

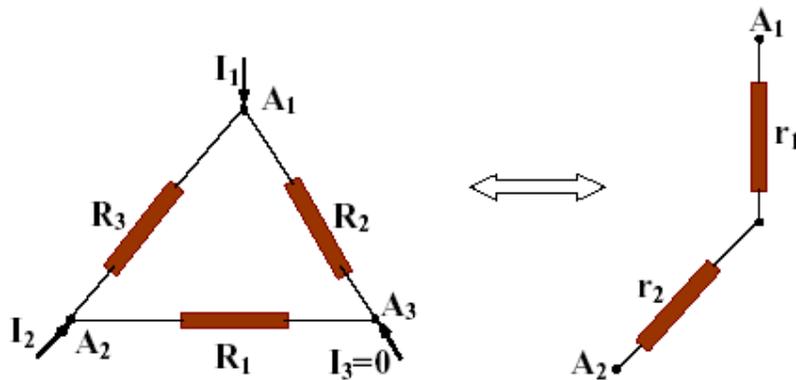


Fig.2.5

$$r_1 + r_2 = \frac{1}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_1 + R_2}} \text{ soit : } r_1 + r_2 = \frac{R_3 (R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (1)$$

En procédant de la même manière en A_1 et A_2 , on obtient :

$$r_2 + r_3 = \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (2) \text{ et } r_1 + r_3 = \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (3)$$

On effectue l'opération suivante : $(1) + (3) - (2)$ on aura :

$$2r_1 = \frac{R_3R_1 + R_2R_1 + 2R_2R_3 - R_1R_2 - R_3R_1}{R_1 + R_2 + R_3}$$

on obtient :

$$r_1 = \frac{R_2R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \text{ de même pour :}$$

$$r_2 = \frac{R_3R_1}{R_1 + R_2 + R_3} \text{ et } r_3 = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

La transformation inverse (étoile-triangle) donne :

$$R_1 = \frac{r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3}{r_1}$$

$$R_2 = \frac{r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3}{r_2}$$

$$R_3 = \frac{r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3}{r_3}$$

Méthodes d'analyse des réseaux linéaires : Théorèmes généraux

Pour cette transformation inverse, le calcul par exemple de R_I se fait de la manière suivante :

$$r_1 \times r_2 = \frac{R_1 R_2 R_3^2}{(R_1 + R_2 + R_3)^2}, \quad r_1 \times r_3 = \frac{R_1 R_2^2 R_3}{(R_1 + R_2 + R_3)^2}$$

$$\text{et } r_2 \times r_3 = \frac{R_1^2 R_2 R_3}{(R_1 + R_2 + R_3)^2}.$$

$$\text{soit : } r_1 \times r_2 + r_1 \times r_3 + r_2 \times r_3 = \frac{R_1 R_2 R_3^2 + R_1 R_2^2 R_3 + R_1^2 R_2 R_3}{(R_1 + R_2 + R_3)^2}$$

$$= \frac{R_1 R_2 R_3 [R_1 + R_2 + R_3]}{(R_1 + R_2 + R_3)^2}$$

on obtient : $r_1 \times r_2 + r_1 \times r_3 + r_2 \times r_3 = \frac{R_1 R_2 R_3}{(R_1 + R_2 + R_3)}$ en divisant cette équation par r_I , on aura l'expression de R_I :

III/ Théorème de superposition

Enoncé :

La réponse d'un réseau linéaire à plusieurs sources indépendantes est égale à la somme des réponses dues aux sources considérées séparément, les autres sources étant rendues passives.

Une source de courant est rendue passive en la remplaçant par un coupe circuit tout en gardant sa résistance interne. Une source de tension est rendue passive en la remplaçant par un court-circuit en série avec sa résistance interne.

Exemple d'application :

Considérons le réseau électrique de la Fig.2.4 , comportant deux sources : l'une de courant et l'autre de tension.

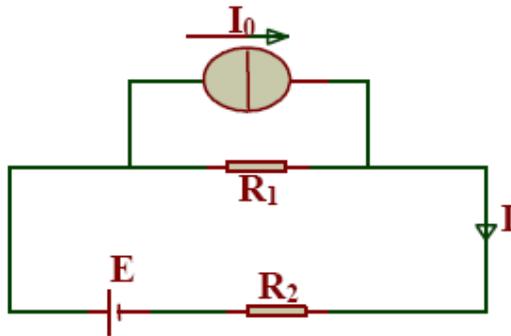


Fig.2.4

Le courant I cherché est la somme de deux courants I_1 et I_2 donnés par les circuits A et B suivants :

Circuit A : la source de courant est ouverte.

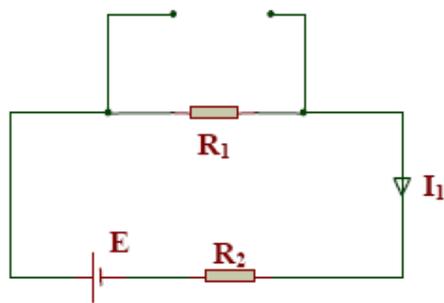
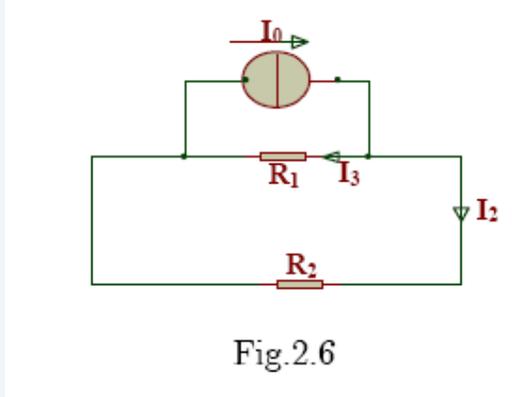


Fig.2.5

Circuit B : la source de tension est court-circuitée.



Circuit A : $E - (R_1 + R_2)I_1 = 0$, d'où : $I_1 = \frac{E}{R_1 + R_2}$

Circuit B : $I_0 = I_2 + I_3$; $R_1 I_3 - R_2 I_2 = 0$; $R_1 (I_0 - I_2) - R_2 I_2 = 0$

d'où : $I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I_0$

$$I = I_1 + I_2 = \frac{E}{R_1 + R_2} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} I_0 = \frac{E + R_1 I_0}{R_1 + R_2}$$

Le courant total est :

III/ Théorème de Thévenin

Enoncé

Un réseau électrique linéaire "vu entre deux bornes A et B" peut être remplacé par un générateur de tension de *f.e.m.* E_{Th} et de résistance interne R_{Th} . E_{Th} est égale à la tension $V_A - V_B$ qui existe quand le réseau est en circuit ouvert et R_{Th} est la résistance entre A et B du réseau rendu passif.

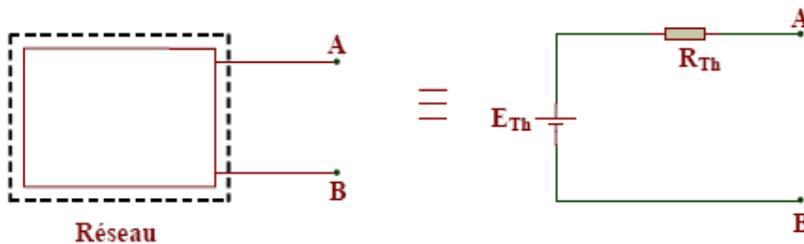


Fig.2.7

Exemple d'application :

Soit le circuit de la figure 2.8(a) où on demande de déterminer l'intensité du courant I_0 en utilisant le théorème de Thévenin.

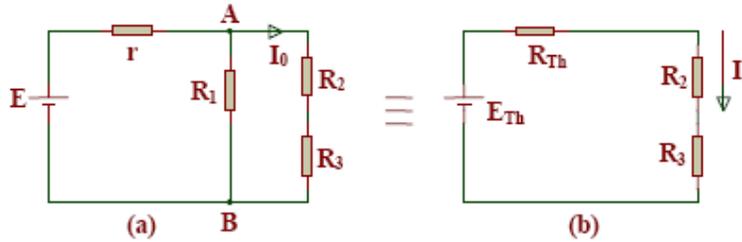


Fig.2.8

Calculons la tension E_{Th} entre A et B lorsqu'on enlève la branche contenant les

résistances R_2 et R_3 , figure 2.9(a). Le courant I dans la maille est :

$$I = \frac{E}{r + R_1}$$

D'où :

$$V_A - V_B = \frac{E}{r + R_1} R_1 = E_{Th}$$

Calcul de R_{Th} après remplacement de E par un court-circuit.

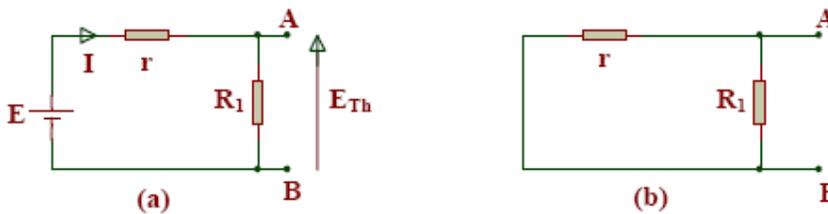


Fig.2.9

La figure 2.9(b) permet d'écrire :

$$R_{AB} = R_{Th} = \frac{rR_1}{r + R_1}$$

La loi des mailles concernant la totalité du réseau de la figure 2.8(b) est :

$$E_{Th} - (R_{Th} + R_2 + R_3) I_0 = 0,$$

et le courant circulant dans la branche AB est donné par :

$$I_0 = \frac{E_{Th}}{R_{Th} + R_2 + R_3}$$

$$I_0 = \frac{ER_1}{rR_1 + (R_2 + R_3)(r + R_1)}$$

ou encore :

IV/ Théorème de Norton

Enoncé

Un réseau électrique linéaire "vu entre deux bornes A et B " peut être remplacé par un générateur de courant I_N et de résistance interne R_N . I_N est égal au courant de courtcircuit I_{cc} qui existe quand le réseau est en courtcircuit ; R_N est la résistance entre A et B du réseau rendu passif.

Fig.2.10

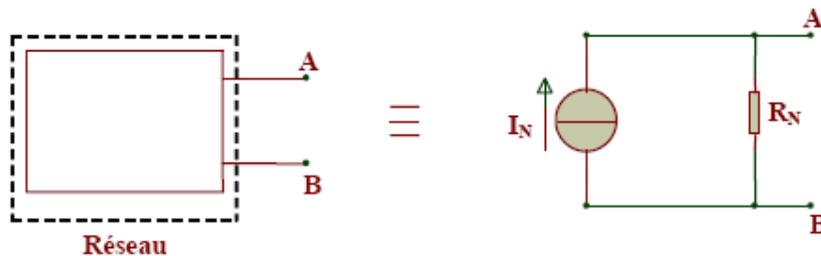


Fig.2.10

Remarque :

$$R_N = R_{Th}$$

Exemple d'application :

Considérons le réseau de la figure 2.11(a) où l'on demande de déterminer l'intensité I_c du courant traversant la résistance R_c en appliquant le théorème de Norton.

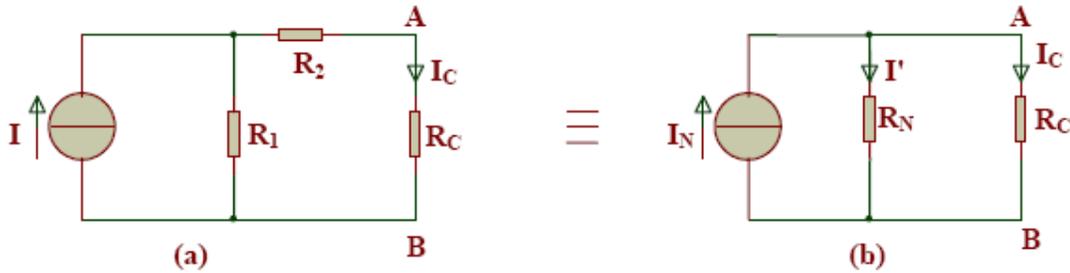


Fig.2.11

Calcul de l'intensité I_N du courant de Norton

Tout d'abord, on court-circuite A et B , figure 2.12(a) :

La loi des mailles donne :

$$+R_1 I_1 - R_2 I_N = 0$$

La loi des noeuds en M s'écrit :

$$I = I_1 + I_N$$

D'où :

$$I_N = I - \frac{R_2}{R_1} I_N$$

$$I_N = \frac{R_1}{R_2 + R_1} I$$

Donc :

Calcul de R_N , figure 2.12(b)

Pour déterminer R_N , résistance interne du générateur de Norton, on ouvre

la source de courant (circuit passif) et on calcule $R_{AB} = R_N = R_1 + R_2$

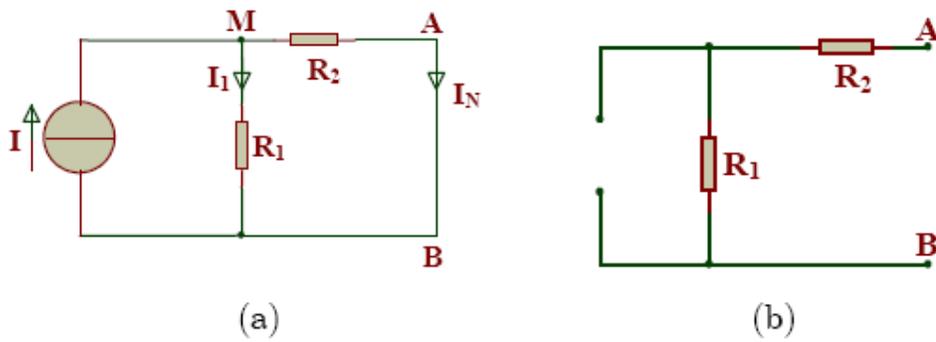


Fig.2.12

Calcul de I_C :

$$R_N I' = R_c I_c = R_c (I_N - I')$$

$$I' = \frac{R_c}{R_N + R_c} I_N$$

d'où :

$$I_c = \frac{(R_1 + R_2)}{(R_1 + R_2 + R_c)} \frac{R_1 I}{(R_1 + R_2)} = \frac{R_1 I}{R_1 + R_2 + R_c}$$

ce qui donne :

VI Equivalence des théorèmes de Thévenin et de Norton

Enoncé

Une source de tension E_{Th} en série avec une résistance R_{Th} est équivalente à une source de courant I_N en parallèle avec cette même résistance R_N .

En effet, les circuits de la Fig 2.13(a,b) sont équivalents :



Fig.2.13

D'où : $E_{Th} = I_N R_N$, $R_{Th} = R_N$
 $I_N = \frac{E_{Th}}{R_{Th}}$, $R_N = R_{Th}$
 et

VI/ Théorème de Millman

Enoncé

Une association de n générateurs de tension linéaires (e_k, r_k) , montés en parallèle entre deux points A et B est équivalente à un générateur de tension linéaire unique (e, r) tel que sa résistance interne r est donnée

par
$$\frac{1}{r} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{r_k} \text{ et sa f.e.m. } e = r \sum_{k=1}^n \frac{e_k}{r_k}$$

Fig 2.15 illustre cette équivalence.

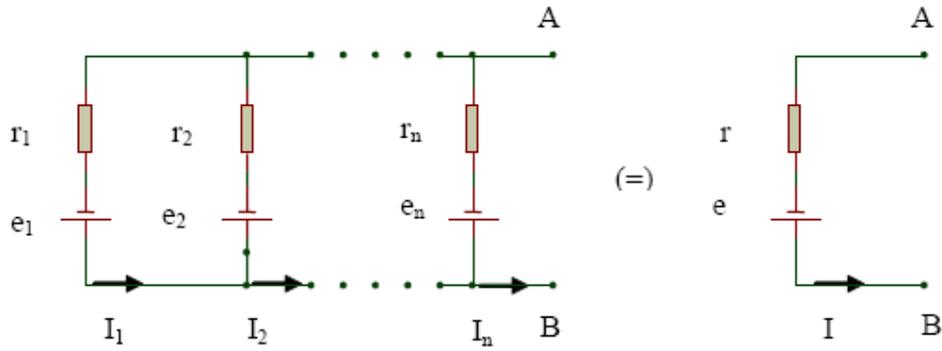


Fig.2.15

Exemple d'application :

On considère les circuits de la fig 2.16 (a,b) et on cherche les conditions pour lesquelles l'intensité du courant I qui traverse R et la tension U aux bornes de R soient les mêmes dans les deux circuits :

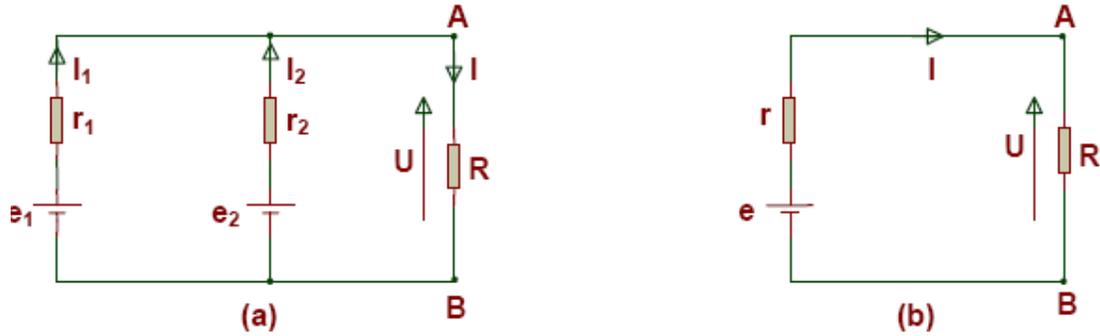


Fig.2.16

Dans le circuit (a), on peut écrire :

$$I = I_1 + I_2$$

$$e_1 - r_1 I_1 - RI = 0$$

$$e_2 - r_2 I_2 - RI = 0$$

$$\text{D'où : } I_1 = \frac{e_1 - RI}{r_1}$$

$$\text{et } I_2 = \frac{e_2 - RI}{r_2}$$

De ce fait / devient :

$$I = I_1 + I_2 = \frac{e_1}{r_1} + \frac{e_2}{r_2} - R \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$$

$$\text{d'où : } I = \frac{r_1 r_2}{r_1 r_2 + R(r_1 + r_2)} \left(\frac{e_1}{r_1} + \frac{e_2}{r_2} \right)$$

En divisant par $r_1 + r_2$

$$I = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \left(\frac{e_1}{r_1} + \frac{e_2}{r_2} \right) \frac{1}{R + \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}}$$

on aura :

Dans le circuit (b), on a : $I = \frac{e}{R + r}$.

En comparant les deux expressions des intensités des courants dans les deux circuits, on obtient :

$$e = r \left(\frac{e_1}{r_1} + \frac{e_2}{r_2} \right) \text{ et } \frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}.$$

tension identiques (piles, éléments d'accumulateurs,...) afin d'obtenir des tensions élevées.

Générateurs de courant en parallèle

Dans la pratique, cette association de générateurs de courant est réalisée pour obtenir des courants intenses, Fig1.18.

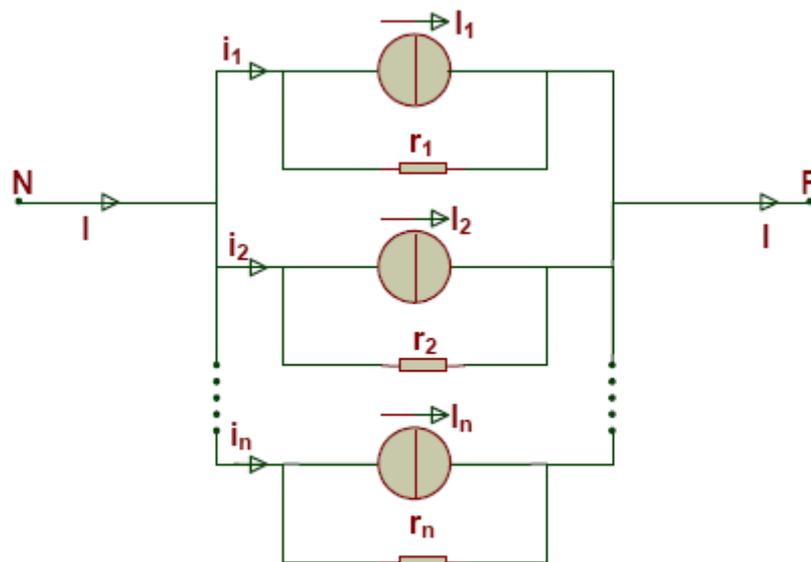


Fig 1.18

$$I = i_1 + i_2 + \dots + i_n$$

$$I = I_1 - \frac{U}{r_1} + I_2 - \frac{U}{r_2} + \dots$$

$$I = \sum_i I_i - U \sum_i \frac{1}{r_i} = \sum_i I_i - U \sum_i g_i = I_{\text{éq}} - U g_{\text{éq}}$$

Où
$$I_{\text{éq}} = \sum_{i=1}^n I_i \text{ et } g_{\text{éq}} = \sum_{i=1}^n g_i$$

sont respectivement l'intensité et la conductance équivalentes du générateur de courant équivalent.