Etude asymptotique des fonctions propres de certains opérateurs de Sturm-Liouville et Applications.

Issam MEHRZI

Sous la diréction des Professeurs:
Abderrazak KAROUI (F.S.B)
Jacques FARAUT (U.P.M.C)

March 22, 2011

Plan

- Introduction.
- Méthode d'approximation WKB.
- Approximation uniforme des PSWFs (n fixé et $c >> 1$.)
- Asymptotique des CPSWFs d'aprés D. Slepian.
- Application aux matrices aléatoires.

Introduction

Les fonctions d'ondes sphéroidales de l'ellipsoïde allogé (PSWFs) sont les solutions de:

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)\frac{d\psi_n}{dx}] + (\chi_n - c^2x^2)\psi_n = 0.$$

où c est un paramétre réel strictement positif et les χ_n sont les valeurs propres de l'opérateur differentiel du second ordre :

$$L\psi := \frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d\psi}{dx} - (c^2x^2)\psi.$$

L'étude essentielle de ces fonctions porte sur leurs comportement asymptotique lorsque n fixé et $c >> 1$ et lorsque c fixé et $n >> 1$. Beaucoup de mathématiciens et physiciens ont travaillé sur ce sujet comme H. J. Landau, H. O. Pollak, D. Slepian...

D. Slepian a donné un comportement asymptotique des PSWFs en terme des fonctions d'Hermite. Il a donner aussi une estimation du rapport $\frac{\chi_n}{2c}$ donné par:

$$\frac{\chi_n}{2c} = n + \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2c}\right)^j a_j.$$

Dans cet exposé, on va essayer de donner un comportement des PSWFs en appliquant une méthode d'approximation appelée WKB,(Wentzel, Kramers et Brillouin.)

Méthode d'approximation WKB

Soit $\lambda > 0$.
Le principe de la méthode WKB est de touver un comportement asymptotique,pour de grandes valeurs du paramétre λ, des solutions d'une équation différentielle définie sur $]a, b[$ par:

$$\frac{d}{dx}[k(x)\frac{d\psi}{dx}] + \lambda r(x)\psi = 0, \qquad (1)$$

où $k(x)r(x) > 0$.

On cherche une solution de (1) de la forme

$$\psi(x) = \varphi(x)U(s(x)). \tag{2}$$

Avec le choix suivant:

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{\frac{r(t)}{k(t)}}dt$$

et

$$\varphi(x) = (k(x)r(x))^{-\frac{1}{4}}.$$

L'équation (1) s'écrit en terme de U sous la forme:

$$U^{''}(s(x)) + [\lambda - q(s)]\, U(s(x)) = 0, \tag{3}$$

avec

$$\begin{aligned} q(s(x)) &= -\frac{[k(x)\varphi^{'}(x)]^{'}}{k(x)\varphi(x)} \\ &= \frac{k}{4r}\left[\left(\frac{k^{'}}{k} + \frac{r'}{r}\right)^{'} + \left(\frac{3}{4}\frac{k^{'}}{k} - \frac{1}{4}\frac{r'}{r}\right)\left(\frac{k^{'}}{k} + \frac{r'}{r}\right) \right]. \end{aligned}$$

Ainsi on est rameneé à résoudre l'équation (3) et puis retrouver le comportement des solutions de (1) pour $\lambda >> 1$ par la relation (2).

Approximation uniforme des PSWFs (n fixé et $c >> 1$.)

Soit l'équation différentielle définie sur $[0,1]$ par:

$$(E) \qquad \frac{d}{dx}[(1-x^2)\frac{d\psi_n}{dx}] + (\chi_n - c^2x^2)\psi_n = 0,$$

qui peut s'écrire sous la forme suivante:

$$(E) \qquad \frac{d}{dx}[k(x)\frac{d\psi_n}{dx}] + c^2 r_n(x)\psi_n = 0,$$

avec $k(x) = 1 - x^2$ et $r_n(x) = \frac{\chi_n}{c^2} - x^2$.
On note dans la suite $q_n = \frac{\sqrt{\chi_n}}{c}$.
$k(x) \geq 0$ et $r_n(x)$ est positive sur $[0, q_n]$ et négative sur $[q_n, 1]$, où on suppose que pour c assez grand $q_n < 1$.

Etude sur $[0, q_n]$

On remarque que $r_n(q_n) = 0$. Pour $x \in [0, q_n[$, on cherche une solution de (E) de la forme:

$$\psi_n(x) = \varphi_n(x) U_n(s_n(x)), \tag{4}$$

avec

$$s_n(x) = \int_x^{q_n} \sqrt{\frac{r_n(t)}{k(t)}} dt, \tag{5}$$

et

$$\varphi_n(x) = (k(x) r_n(x))^{-\frac{1}{4}}. \tag{6}$$

L'équation (E) devient en terme de U_n :

$$(E_1) \qquad U_n^{''}(s_n(x)) + [c^2 - Q(s_n(x))]U_n(s_n(x)) = 0,$$

avec

$$\begin{aligned} Q_n(s_n) &= \frac{k}{4r_0(q_n - x)^3}[-\frac{5}{4} + \frac{1}{2}(q_n - x)(\frac{r_0^{'}}{r_0} - \frac{k^{'}}{k}) \\ &+ (q_n - x)^2[(\frac{k^{'}}{k} + \frac{{r_0}^{'}}{r_0})^{'} + (\frac{3}{4}\frac{k^{'}}{k} - \frac{1}{4}\frac{{r_0}^{'}}{r_0})(\frac{k^{'}}{k} + \frac{{r_0}^{'}}{r_0})]], \end{aligned}$$

où on a écrit $r_n(x) = (q_n - x)r_0(x)$, avec $r_0(x) = q_n + x$.

On a:

$$Q_n(s_n(x)) = -\frac{5}{36}\frac{1}{\frac{4}{9}\frac{r_0(q_n)}{k(q_n)}(q_n-x)^3} + (q_n-x)^{-2}f_1(x), \qquad (7)$$

avec

$$\begin{aligned} f_1(x) &= -\frac{5}{16(q_n-x)}[\frac{k(x)}{r_0(x)} - \frac{k(q_n)}{r_0(q_n)}] \\ &+ \frac{k(x)}{r_0(x)}[(\frac{r_0^{'}}{r_0} - \frac{k^{'}}{k}) \\ &+ (q_n-x)[(\frac{k^{'}}{k} + \frac{{r_0}'}{r_0})^{'} + (\frac{3}{4}\frac{k^{'}}{k} - \frac{1}{4}\frac{{r_0}'}{r_0})(\frac{k^{'}}{k} + \frac{{r_0}'}{r_0})]], \end{aligned}$$

qui est continue sur $[0, q_n]$.

On remarque qu'au voisinage de q_n on a:

$$s_n(x) \approx \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2q_n}{1-{q_n}^2}}(q_n - x)^{\frac{3}{2}}. \tag{8}$$

Dans la suite, on va faire apparaître $s_n(x)$ dans l'expression de Q_n.

Lemme 1: *Pour* $x \in [0, q_n]$, *on a*

$$s_n(x) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2q_n}{1-{q_n}^2}}(q_n - x)^{\frac{3}{2}} + \epsilon_n(x),$$

avec

$$|\epsilon_n(x)| \leq \frac{2}{3(1+\sqrt{2})}\frac{\sqrt{q_n} + 2q_n^{\frac{5}{2}}}{(1-q_n^2)^{\frac{3}{2}}}(q_n - x)^{\frac{3}{2}}.$$

Idée de la preuve:
Dans l'expression (5) et en tenant compte de (8),on écrit:

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \sqrt{\frac{2q_n}{1-{q_n}^2}}\int_x^{q_n}\sqrt{q_n-t}\,dt+\epsilon_n(x) \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2q_n}{1-{q_n}^2}}(q_n-x)^{\frac{3}{2}}+\epsilon_n(x), \qquad (9) \end{aligned}$$

avec

$$
\begin{aligned}
\epsilon_n(x) &= \int_x^{q_n} \frac{\sqrt{q_n^2 - t^2} - \sqrt{\frac{2q_n}{1-{q_n}^2}(1-t^2)(q_n - t)}}{\sqrt{1-t^2}} dt \\
&= \frac{1}{1-q_n^2} \int_x^{q_n} \sqrt{q_n - t} \\
&\times \left[\frac{(1-q_n^2)(q_n+t) - 2q_n(1-t^2)}{\sqrt{1-t^2}(\sqrt{q_n+t} + \sqrt{\frac{2q_n}{1-q_n^2}(1-t^2)})} \right] dt. \quad (10)
\end{aligned}
$$

Pour $t \in [0, q_n]$, on trouve

$$
\begin{aligned}
-(1-q_n^2)(q_n+t) + 2q_n(1-t^2) &= q_n - 2q_n t^2 - t + q_n^3 + q_n t^2 \\
&\leq q_n + q_n^3 + q_n t^2 \\
&\leq q_n + 2q_n^3,
\end{aligned}
$$

et puisque

$$\begin{aligned}\sqrt{1-t^2} &> \sqrt{1-q_n^2}\\ \sqrt{q_n+t} &> \sqrt{q_n}\\ 1-t^2 &> 1-q_n^2,\end{aligned}$$

d'où

$$\left|\frac{(1-q_n^2)(q_n+t)-2q_n(1-t^2)}{\sqrt{1-t^2}(\sqrt{q_n+t}+\sqrt{\frac{2q_n}{1-q_n^2}(1-t^2)})}\right| \leq \frac{\sqrt{q_n}+2q_n^{\frac{5}{2}}}{(1+\sqrt{2})\sqrt{1-q_n^2}}. \tag{11}$$

Lemme 2:

$$sup_{x\in[0,q_n]}\left|\frac{\epsilon_n(x)}{s_n(x)}\right| < 1.$$

Idée de la preuve:
On pose

$$C(q_n) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2q_n}{1-{q_n}^2}} \tag{12}$$

et

$$C^{'}(q_n) = \frac{2}{3(1+\sqrt{2})}\frac{\sqrt{q_n}+2q_n^{\frac{5}{2}}}{(1-q_n^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{13}$$

D'aprés le Lemme1 et (5) on atrouve:

$$(C(q_n) - C^{'}(q_n))(q_n - x)^{\frac{3}{2}} \leq s_n(x),$$

d'autre part, d'aprés (12) et (13):

$$C(q_n) - C^{'}(q_n) = C(q_n)\left[1 - \frac{\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})}\frac{1+2q_n^2}{(1-q_n^2)}\right],$$

qui reste positif pour c assez grand. Ainsi on trouve:

$$\left|\frac{\epsilon_n(x)}{s_n(x)}\right| \leq \frac{4}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}\frac{q_n^2}{1-\left(\frac{1+3\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)q_n^2} < 1$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{C^2(q_n)(q_n-x)^3} &= \frac{1}{(s_n(x)-\epsilon_n(x))^2} \\ &= \frac{1}{s_n^2(x)} \frac{1}{(1-\left|\frac{\epsilon_n(x)}{s_n(x)}\right|)^2}, \end{aligned}$$

et d'aprés le Lemme 2, on aura:

$$Q_n(s_n(x)) = -\frac{5}{36}\frac{1}{s_n^2(x)} + (s_n(x))^{-\frac{4}{3}} F(s_n(x)), \tag{14}$$

où $F(s_n(x))$ est continue sur $[0, q_n]$.

Ainsi l'équation (E_1) devient:

$$(E_1) \qquad U_n''(s_n(x)) + [c^2 + \frac{5}{36}\frac{1}{s_n^2(x)} - s_n^{-\frac{4}{3}}(x)F(s_n(x))]U_n(s_n(x)) = 0.$$

Une solution de cette équation est de la forme:

$$\begin{aligned} U_n(s_n(x)) &= A_n\sqrt{cs_n(x)}J_{\frac{1}{3}}(cs_n(x)) + B_n\sqrt{cs_n(x)}J_{-\frac{1}{3}}(cs_n(x)) \\ &+ \int_0^{s_n(x)} K(s_n(x),t)t^{-\frac{4}{3}}F(t)U_n(t)dt, \qquad (15) \end{aligned}$$

où $J_{\pm\frac{1}{3}}$ sont les fonctions de Bessel de premier espéce d'ordre $\pm\frac{1}{3}$, A_n et B_n sont des constantes et

$$K(s,t) = \frac{\sqrt{cs}J_{\frac{1}{3}}(cs)\sqrt{ct}J_{-\frac{1}{3}}(ct) - \sqrt{ct}J_{\frac{1}{3}}(ct)\sqrt{cs}J_{-\frac{1}{3}}(cs)}{W(\sqrt{c.}J_{\frac{1}{3}}(c.)\sqrt{c.}J_{-\frac{1}{3}}(c.))(t)},$$

On sait que $W(J_\nu, J_{-\nu})(t) = -\frac{2\sin(\nu\pi)}{\pi t}$, alors:

$$W(\sqrt{c.}J_{\frac{1}{3}}(c.)\sqrt{c.}J_{-\frac{1}{3}}(c.))(t) = -\frac{2\sin(\frac{\pi}{3})}{\pi}c, \qquad (16)$$

Théorème 1: *Il existe une constante A_n telle que:*

$$sup_{x\in[0,q_n]}\left|\psi_n(x)-\frac{A_n\sqrt{cs_n(x)}}{(k(x)r_n(x))^{\frac{1}{4}}}J_{\frac{1}{3}}(cs_n(x))\right|\leq\frac{C_{q_n}}{c}, \qquad (17)$$

où C_{q_n} est une constante qui ne dépend que de q_n.

Idée de la preuve:
On sait qu'au voisinage de zéro on:

$$J_\nu(z) \approx \frac{(\frac{1}{2}z)^\nu}{\Gamma(\nu+1)},$$

D'autre part, de (12) et de (8) on a:

$$(q_n - x) \approx C^{\frac{2}{3}}(q_n)s_n^{\frac{2}{3}}(x). \tag{18}$$

$$\frac{B_n\sqrt{cs_n(x)}J_{-\frac{1}{3}}(cs_n(x))}{(k(x)(q_n+x)(q_n-x))^{\frac{1}{4}}} \approx \frac{B_n C^{\frac{1}{6}}(q_n)}{(k(x)(q_n+x))^{\frac{1}{4}}2^{\frac{1}{3}}\Gamma(\frac{2}{3})}c^{\frac{1}{6}}.$$

Comme on cherche des fonctions bornées, on doit avoir $B_n = 0$. Donc une solution de (E) sur $[0, q_n]$ est de la forme:

$$\psi_n(x) = \frac{A_n\sqrt{cs_n(x)}J_{\frac{1}{3}}(cs_n(x))}{(k(x)r_n(x))^{\frac{1}{4}}} + \frac{R_c(s_n(x))}{(k(x)r_n(x))^{\frac{1}{4}}}. \tag{19}$$

Pour l'estimation de la deuxiéme quantité dans l'éxpression précédente on doit distinguer le cas $cs_n(x) < 1$ et le cas $cs_n(x) \leq 1$, puisque

$$\left|\sqrt{cs}J_{\pm\nu}(cs)\right| \leq \begin{cases} k(cs)^{\pm\nu+\frac{1}{2}} & si \quad cs \leq 1 \\ k & si \quad cs > 1. \end{cases} \tag{20}$$

Si $cs_n(x) \leq 1$, on a d'aprés (18) et (20):

$$\begin{aligned} \left| \frac{R_c(s_n(x))}{(k(x)r_n(x))^{\frac{1}{4}}} \right| &\approx \frac{|R_c(s_n(x))|\, C^{\frac{1}{6}}(q_n)s_n^{-\frac{1}{6}}(x)}{(k(x)(q_n+x))^{\frac{1}{4}}} \\ &\leq \frac{kMNLC^{\frac{1}{6}}}{(k(x)(q_n+x))^{\frac{1}{4}}}, \end{aligned} \tag{21}$$

où $M = max_{[0,q_n]} U_n(s_n(x))$, $N = max_{[0,q_n]} F(s_n(x))$ et $L = \int_0^{q_n} (1 + \frac{s_n(x)}{t}^{\frac{2}{3}}) t^{-\frac{1}{2}} dt < \infty$.

Si maintenant $cs_n(x) > 1$, on a aussi d'aprés (20):

$$\begin{aligned}
|R_c(s_n(x))| &\leq \frac{kMN\pi}{\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)c}\Big(kc^{\frac{5}{6}}\int_0^{\frac{1}{c}}((ct)^{-\frac{2}{3}}+1)t^{-\frac{1}{2}}\,dt \\
&+ 2k\int_{\frac{1}{c}}^{s_n(x)} t^{-\frac{4}{3}}\,dt\Big) \\
&\leq \frac{kMN\pi\left(L+L^{'}\right)}{\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)c^{\frac{1}{6}}} \qquad (22)
\end{aligned}$$

avec $L = k\int_0^{\frac{1}{c}}((ct)^{-\frac{2}{3}}+1)t^{-\frac{1}{2}}\,dt < \infty$ et $L^{'} = \frac{2k}{c^{\frac{5}{6}}}\int_{\frac{1}{c}}^{s_n(x)} t^{-\frac{4}{3}}\,dt < \infty$. Donc de (12), qui montre que $C(q_n)$ tend vers zéro lorsque c tend vers ∞, (19), (21) et (22) on a le résultat.

Etude sur $]q_n, 1]$

Dans ce cas, on écrit:

$$(E) \qquad \frac{d}{dx}[k(x)\frac{d\psi_n}{dx}] - c^2 r_{1n}(x)\psi_n = 0,$$

avec $k(x) = 1 - x^2$ et $r_{1n}(x) = x^2 - \frac{\chi_n}{c^2}$.
On a $k(1) = 0$, $k(x) = (1+x)(1-x) > 0$ et $r_{1n}(x) > 0$ sur $]q_n, 1[$.
De la même manière que précédemment, on cherche une solution de (E) de la forme:

$$\psi_n(x) = \alpha_n(x) V_n(t_n(x)), \tag{23}$$

avec, pour $x \in]q_n, 1[$:

$$t_n(x) = \int_x^1 \sqrt{\frac{r_{1n}(s)}{k(s)}} ds, \tag{24}$$

et

$$\alpha_n(x) = (k(x) r_{1n}(x))^{-\frac{1}{4}}. \tag{25}$$

En suivant les mêmes téchniques, on aboutit à une équation différentielle en V_n suivante:

$$(E_2) \qquad V_n^{''}(t_n(x)) - [c^2 - \frac{1}{4t_n^2(x)} + G(t_n(x))]V_n(t_n(x)) = 0,$$

où $G(t_n(x))$ est contine sur $]q_n, 1]$.Une solution de (E_2) est:

$$\begin{aligned} V_n(t_n(x)) \quad = \quad & C_n(ct_n(x))^{\frac{1}{2}} I_0((ct_n(x))) + D_n(ct_n(x))^{\frac{1}{2}} K_0((ct_n(x))) + \\ & \int_0^{t_n(x)} \frac{(ct_n(x))^{\frac{1}{2}}(cs)^{\frac{1}{2}}}{c} \times \\ & \big(I_0(ct_n(x))K_0(cs) - I_0(cs)K_0(ct_n(x))\big) G(s)V_n(s)ds \end{aligned}$$

Théorème 2: Il existe deux constantes C_1 et C_2 telles que:
si $ct_n(x) \leq 1$,

$$sup_{x \in]q_n,1]} \left| \psi_n(x) - \frac{C_n \sqrt{ct_n(x)} I_0(ct_n(x))}{(k(x) r_{1n}(x))^{\frac{1}{4}}} \right| \leq \frac{C_1}{c}, \qquad (26)$$

et si $ct_n(x) > 1$,

$$sup_{x \in]q_n,1]} \left| \psi_n(x) - \frac{D_n \sqrt{ct_n(x)} K_0(ct_n(x))}{(k(x) r_{1n}(x))^{\frac{1}{4}}} \right| \leq \frac{C_2}{c}. \qquad (27)$$

Asymptotique des CPSWFs d'aprés D. Slepian.

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad \frac{d}{dx}[(1-x^2)\frac{d\psi_n}{dx}] + (\chi_n - c^2x^2 + \frac{1/4-a^2}{x^2})\psi_n = 0,$$

Les solutions de (E) sont les PSWFs. On pose $t = x\sqrt{c}, 0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{c}}$. dans ce cas, (E) devient

$$L_a\varphi(t) - \frac{1}{c}M\varphi(t) + \frac{\chi_n}{c}\varphi(t) = 0, \qquad (28)$$

où

$$L_a\varphi(t) = \varphi''(t) + \left(\frac{1/4-a^2}{t^2} - t^2\right)\varphi(t), \qquad (29)$$

$$M\varphi(t) = t^2\varphi''(t) + 2t\varphi'(t). \qquad (30)$$

Noter que $\frac{\chi_n}{c} = (4n+2a+2) + O\left(\frac{2n^2}{c}\right) = \mu_n(a) + O\left(\frac{2n^2}{c}\right)$ et que l'équation $L_a\varphi(t) + \mu_n(a)\varphi(t) = 0$ admet la solution bornée sur $[0,1]$, donnée par $V_n(t) = e^{-t^2/2}t^{a+1/2}U(-n, 1+a, t^2)$, avec $U(a,b,x)$ est la fonction hypergéométrique confluente.

De plus, puisque $U(-n, 1+a, t) = (-1)^n n! L_n^{(a)}(t)$, où L_n^a est le polynôme de Laguerre généralisé de degré n et d'ordre a, et puisque

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} M\varphi(t) &= \frac{(n+1)(n+2)V_{n+2}(t)}{c} - \frac{(2n+1)(n+a+\frac{1}{2})+\frac{3}{4}V_n(t)}{c} && (31) \\ &+\frac{1}{c}(n+a)(n+a-1)V_{n-2}(t), && (32) \end{aligned}$$

alors, on conclut que

$$\varphi_{n,c}(x) = e^{-cx^2/2}(\sqrt{c}x)^{a+1/2} L_n^{(a)}(cx^2) + O\left(\frac{1}{c}\right), \quad \forall x \in [0, 1/\sqrt{c}]. \tag{33}$$

Remarque:

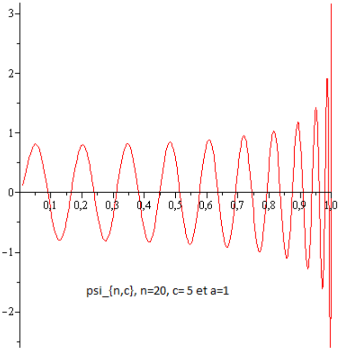
Puisque $H_{2n}(x) = (-4)^n n! L_n^{(-1/2)}(x^2)$ et $H_{2n+1}(x) = 2(-4)^n n! x L_n^{(1/2)}(x^2)$, alors en utilisant (33), on conclut que si $|a| = 1/2$, alors on a les PSWFs normalisées vérifient pour $c >> 1$,

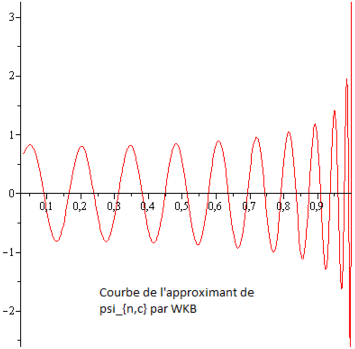
$$\psi_{n,c}(x) \sim \phi_n(\sqrt{c}x), \tag{34}$$

où $\phi_n(\cdot)$ est la fonction d'Hermite normalisée.
D'après [Slepian, 64], on a pour $c >> 1$, et $1 - \frac{1}{c} \leq x \leq 1$

$$\varphi_{n,c}(x) \sim (-1)^n \sqrt{\pi} \frac{2^{a+2n+1} c^{n+a/2+1/4} e^{-c}}{n!} x^{a+1/2} I_0(c\sqrt{1-x^2}), \tag{35}$$

$$\int_0^1 \varphi_{n,c}^2(x) \sim \frac{\Gamma(n+a+1)}{2\sqrt{c}n!}. \tag{36}$$


psi_{n,c}, n=20, c= 5 et a=1


Courbe de l'approximant de
psi_{n,c} par WKB

Application aux matrices aléatoires.

Dans [Tracy-Widom 94], il a été démontré que si le noyau $K(x,y)$ est régulier sur $[0,1]^2$, alors les valeurs propres $\lambda(c)$, données par

$$\int_0^1 cK(cx,cy)f(y)\,dy = \lambda(c)f(x),$$

vérifient l'équation différentielle

$$\frac{\partial\lambda}{\partial c} = \frac{\lambda}{c}\frac{f(1)^2}{\int_0^1 f(x)^2\,dx}. \tag{37}$$

Puisque $lim_{c\to+\infty} = 1$, alors en intégrant (37), sur $[c,+\infty[$ et en utilisant (35) et (36), la formule suivante a été obtenue dans [Slepian, 64],

$$1-\lambda_n(c) = \frac{\pi 2^{2a+4n+3}c^{2n+a+1/2}e^{-2c}}{n!\Gamma(n+a+1)}\left[1+O\left(\frac{1}{c}\right)\right]. \tag{38}$$

Dans [Tracy-Widom, 94], les auteurs ont montré qu'étant donné une matrice aléatoire de l'ensemble de Laguerre, la quantité

$$E(0, s) = \prod_{i=0}^{\infty} (1 - \lambda_i(s))$$

correspond à la probabilité que cette matrice n'a aucune valeur propre dans l'intervalle $(0, s)$. Les résultats précédents sur le comportement des $\lambda_n(c)$ sont la base de l'étude quantitative et asymptotique de la probabilité $E(0, s)$.

Référence:

[1] D. Slepian, Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty IV: Extensions to many dimensions; generalized prolate spheroidal functions, Bell System Tech. J. 43 (1964), 3009–3057.

[2] C. A. Tracy and H. Widom, Level spacing Distributions and the Bessel Kernel, Communication in math. Phy. **161**, (1994), 289–309.